

层数为2的分层树和排列树的计数问题

蔡静果, 侯江霞*

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆乌鲁木齐 830046)

摘要: 排列树是一类连通的排列图, 顶点标号为 $[n]$, 边由逆序构成. 一个含有 $n-1$ 个逆序的排列树可以看作是一类层数为2的分层树. 该文首先用关联矩阵给出了一个2层分层树的计数公式; 其次对排列树进行了分类, 得到了 n 个顶点的排列树的个数为 2^{n-2} ($n \geq 2$), 并刻画了排列树的结构; 给出了排列树与含有 $n-1$ 个格子的Ferrers图之间的联系.

关键词: 排列树; 分层树; 关联矩阵; Ferrers图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0243-10

§1 引言

排列图最早是Chartrand等人在1967年提出的^[1]. 1971年, Pnueli等人给出了一个新的定义, 即排列图 G_π 是 n 个顶点的简单图且顶点被 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 标记, $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ 是 $[n]$ 的一个排列, 如果 $(i-j)(\pi_i - \pi_j) < 0$ 成立, 则在图 G_π 中点 i 和点 j 之间有一条边^[2]. Koh等人在2007年将排列图的定义转化为其对应排列的逆序相连, 并且给出了连通排列图的一个递推关系式^[3], 但他们在文中没有给出一个关于连通排列图的计数公式. 排列图在网络设计、基因组学、数据挖掘、内存分配和生物信息学等领域有着广泛的应用. 具体可见参考文献[4-5].

文献[6]给出了分层树与排列图的生成树之间的关系, 通过研究排列图上的阿贝尔沙堆模型(Abelian sandpile model), 建立了排列图上阿贝尔沙堆模型的循环构型与完全分层树之间的一个双射. 在本文中, 采用文献[6]中排列图的定义.

定义1.1^[6] 若排列 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$, 图 G_π 的顶点集为 $[n]$, 当 $i > j$ 且 $\pi_i < \pi_j$, 即 (π_i, π_j) 是排列 π 的一个逆序时, 则 (π_i, π_j) 之间有边, 称 G_π 为排列图.

若 n 个顶点的排列图有 $n-1$ 条边, 即该排列图对应的排列有 $n-1$ 个逆序, 这样的排列图实际上是树结构, 称其为排列树.

定义1.2^[6] 若 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ 不存在正整数 $k < n$ 使得 $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\} = [k]$, 则称 π 是不可分解的.

收稿日期: 2024-07-09 修回日期: 2025-04-18

*通讯作者, E-mail: jxhou@xju.edu.cn

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金面上项目(2025D01C39)

由文献[6]可知若排列图是连通的, 当且仅当其对应的排列是不可分解的.

例如, 图1是排列 $\pi = 3421$ 和 $\pi' = 3124$ 对应的排列图, 由排列不可分解的定义可知, π 不可分解, 则排列图 G_π 是连通的; 而 π' 可分解为 $312-4$, 故排列图 $G_{\pi'}$ 是不连通的.

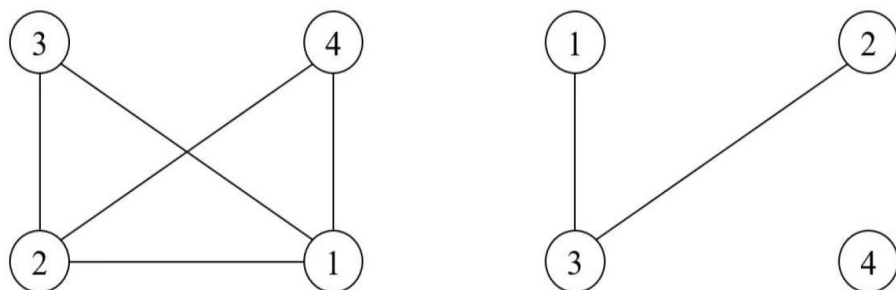


图1 连通的排列图 G_{3421} (左)和不连通的排列图 G_{3124} (右)

1997年, Postnikov提出交错树的定义, 并利用生成函数的方法给出了该类树的计数公式^[7]. 2019年, Dugan等人给出了分层树的定义. 实际上, Postnikov定义的交错树就是2层的分层树. Dugan等人同样利用生成函数的方法对文献[7]中的计数公式进行了推广, 给出了分层树的计数公式^[8]. 2020年, Yan等人通过建立分层树与有根标记树之间的双射, 给出了Dugan等人提出的计数公式的组合证明^[9]. 2023年, Dong等人利用Tutte多项式证明了有关分层树权重多项式的等式^[10]. 本文采用文献[9]中分层树的定义.

定义1.3^[9] 记 T 是顶点集为 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 的标记树, 当 $m \geq 2$ 时, 存在一个关于 T 的分层映射 $t: [n] \rightarrow [m]$, 满足条件

- 1) 对于任意两个相邻顶点 u 和 v , 有 $t(u) \neq t(v)$;
- 2) 若顶点 u 和 v 相邻, 当且仅当 $u > v$ 时, 则 $t(u) > t(v)$,

则称 T 为分层树.

本文主要研究层数为2的分层树和排列树的计数问题. 在§2中, 层数为2的分层树的个数可以通过求完全分层图的生成树的个数来计算, 得到一个含关联矩阵的计数公式. §3对 n 个顶点的排列树进行了分类, 利用分块连边的方法得到了 n 个顶点的排列树的个数为 2^{n-2} ($n \geq 2$), 并刻画了排列树的结构, 还得到了 n 个顶点的排列树与含有 $n-1$ 个格子的Ferrers图之间的关系.

§2 层数为2的分层树的计数公式

记 $T_{(p_1, p_2)}$ 为第一层有 p_1 个顶点、第二层有 p_2 个顶点的分层树的个数, 且满足 $p_1 + p_2 = n$. 首先, 考虑当 $p_1 = 2, p_2 = n-2$ 的情况, 可以用递推关系式, 给出计数公式 $T_{(2, n-2)}$.

引理2.1 $T_{(2, n-2)} = 2T_{(2, n-3)} + 2^{n-2} - 1$.

证 用 $[n]$ 来标记分层树的顶点. 由分层树的定义可知, 1一定是第一层的顶点标号, 而 n 一定是第二层的顶点标号, 故只需考虑剩余的 $n-2$ 个顶点的位置. 对于 $p_1 = 2, p_2 = n-2$ 时, 可以考虑在 $T_{(2, n-3)}$ 的基础上增加点 n , 故 n 的位置有以下两种情况.

- 1) 当 n 只与第一层的一个顶点相连时, 分层树有 $2T_{(2, n-3)}$ 种选择;

2) 当 n 与第一层两个顶点都相连时, 需要分情况讨论.

若第一层的点为1和2时, 可以从剩余的 $n-3$ 个点中选择 k 个点与1相连, $k=0, 1, 2, \dots, n-3$, 则有 $\binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} + \dots + \binom{n-3}{n-3} = 2^{n-3}$ 种选择; 若第一层的点为1和3时, 2必定与1相连, 可以从剩余的 $n-4$ 个点中选择 k 个点与1相连, $k=0, 1, 2, \dots, n-4$, 故有 $\binom{n-4}{0} + \binom{n-4}{1} + \dots + \binom{n-4}{n-4} = 2^{n-4}$ 种选择; 依此类推, 当第一层顶点的标号为1和 $n-1$ 时, 剩余的点必须和1相连, 故只有1种选择.

因此可以得到一个递推关系式 $T_{(2,n-2)} = 2T_{(2,n-3)} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \dots + 2^2 + 2 + 1$, 化简得 $T_{(2,n-2)} = 2T_{(2,n-3)} + 2^{n-2} - 1$.

定理2.2 当 $p_1 = 2, p_2 = n-2$ 时, 则有 $T_{(2,n-2)} = 2^{n-2}(n-3) + 1, n \geq 3$.

证 对引理2.1的递推关系式利用递归的方法, 和初始条件 $T_{(2,1)} = 1$ 可以得证.

对于离散结构的计数问题, 一般通过寻找其满足的递推关系式, 并利用发生函数的方法求出其通项表达式. 但是用生成函数的方法来求解 $T_{(p_1, p_2)}$ 时, 由于其递推关系式较为复杂, 实际并不可行. 2001年, 谭尚旺等人在研究连通二部图的生成树的计数问题时, 给出了一个含有关联矩阵的计数公式^[11]. 受此启发, 2层的分层树可以看做是一个二部图; 一个满足分层映射 t 的2层完全分层图可以看作是一个完全二部图. 因此, 2层分层树的计数问题就转化为求此类完全分层图的生成树的计数问题. 完全分层图的定义是由Dong在2023年的报告中提到的, 其定义如下.

定义2.3 设 G 是一个满足分层映射 t 的分层图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为图 G 的顶点集和边集, 由 $v > v', t(v) > t(v')$ 得 $vv' \in E(G)$, 则称图 G 为完全分层图; 否则, 称图 G 为不完全分层图.

例II1 图2中左图是一个层数为2的完全分层图, 右图是一个层数为2的不完全分层图.



图2 5个顶点的完全分层图(左) 和5个顶点的不完全分层图(右)

本文中还要用到的关联矩阵和邻接矩阵的定义.

定义2.4^[11] 给定一个图 G , 其边集为 $|E(G)| = s$, 顶点集为 $|V(G)| = n$. 定义一个 $n \times s$ 阶矩阵 $M(G) = (m_{ij})_{n \times s}$, 其元素 m_{ij} 满足以下条件.

- ① 如果顶点 v_i 与 e_j 相关联, 即 v_i 是 e_j 的一个端点, 则 $m_{ij} = 1$;
- ② 如果顶点 v_i 与 e_j 不是相关联的, 则 $m_{ij} = 0$.

称矩阵 $M(G)$ 为图 G 的关联矩阵.

定义2.5^[11] 给定一个图 G , 其边集为 $|E(G)| = s$, 顶点集为 $|V(G)| = n$. 定义一个 $n \times n$ 阶矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 其元素 a_{ij} 满足以下条件.

① 如果顶点 v_i 与 v_j 之间存在边, 即 $(v_i, v_j) \in E(G)$, 则 $a_{ij} = 1$;

② 如果顶点 v_i 与 v_j 之间无边, 则 $a_{ij} = 0$.

称矩阵 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵.

若 $J_{p_1 p_2}$ 为 $p_1 \times p_2$ 阶全1矩阵, $J_{p_1+p_2} = \begin{pmatrix} J_{p_1 \times p_1} & -J_{p_1 \times p_2} \\ -J_{p_2 \times p_1} & J_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}$, $M(G)^T$ 表示 $M(G)$ 的转置矩阵, 图 G 中所有与顶点 v 相关联的边的个数称为 v 的度, 记为 $d(v)$. 定义

$$R = M(G)M(G)^T = A(G) + \text{diag}(d(v_1), \dots, d(v_n)),$$

其中 $d(v_i)$ 为顶点 v_i 的度, $i = 1, 2, \dots, n$.

引理2.6^[11] 若图 G 是一个顶点集分别为 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ 的连通二部图, $t(G)$ 为图 G 生成树的个数, 则有

$$t(G) = (n+m)^{-2} \det(J_{n+m} + R). \quad (1)$$

定理2.7 图 G 是一个顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的2层连通的完全分层图, $\mathcal{G}$ 为2层完全分层图的集合, $t(G)$ 为图 G 生成树的个数, 故有

$$T_{(p_1, p_2)} = \sum_{G \in \mathcal{G}} t(G) = \sum_{G \in \mathcal{G}} n^{-2} \det(J_{p_1+p_2} + R). \quad (2)$$

证 把分层树看作是此类连通的2层完全分层图的生成树, 故可以通过求连通的2层完全分层图的生成树个数来计算分层树的个数. 根据分层树的定义知, 1一定在第一层, 而 n 一定在第二层. 设第一层有 p_1 个点, 第二层有 p_2 个点, 且 $p_1 + p_2 = n$. 对完全分层图的顶点按以下要求进行标记, 第一层的顶点从左到右依次标记为 $\{v_1, v_2, \dots, v_{p_1}\}$, 第二层的顶点从左到右依次标记为 $\{v_{p_1+1}, v_{p_1+2}, \dots, v_n\}$, 而 n 个顶点的完全分层图共有 $\binom{n-2}{p_1-1}$ 个, 即集合 $\mathcal{G}$ 的元素个数为 $\binom{n-2}{p_1-1}$ 个, 故需要求出所有完全分层图的生成树的个数. 而完全分层图的生成树可以由引理2.6求解, 故有

$$T_{(p_1, p_2)} = \sum_{G \in \mathcal{G}} t(G) = \sum_{G \in \mathcal{G}} n^{-2} \det(J_{p_1+p_2} + R).$$

表 1 5个顶点且层数为2的分层树的个数

p_1	1	2	3	4
p_2	4	3	2	1
$T_{(p_1, p_2)}$	1	17	17	1

例II2 若层数 $m = 2$, 顶点数 $n = 5$ 时, 则 p_1 的值可以是1, 2, 3, 4; 利用定理2.7计算分层树的个数, 具体的数值可见表1. 由参考文献[9]中的引理3.3可知, 该引理构造了第 i 层 k 个顶点的分层树和第 j 层 k 个顶点的分层树之间的双射, 故有分层树的个数 $T_{(p_1, p_2)} = T_{(p_2, p_1)}$.

当 $p_1 = 1, p_2 = 4$ 时, 其对应的树结构为星图, 则有 $T_{(1,4)} = T_{(4,1)} = 1$.

当 $p_1 = 2, p_2 = 3$ 时, 故可知, $T_{(2,3)} = T_{(3,2)}$. 下面以 $p_1 = 3, p_2 = 2$ 为例来计算其数量.

当 $p_1 = 3, p_2 = 2$ 时, 其完全分层图的个数为3, 即第一层顶点分别被1, 2, 3; 1, 2, 4和1, 3, 4所标记, 其详细的计算过程如下.

1) 第一层顶点被1, 2, 3标记, 第二层顶点被4, 5标记的完全分层图如图3所示, 其对应生成树

的个数如下.

由图3可以知道

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, J_{3+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

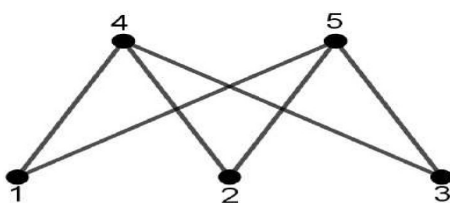


图 3 第一层顶点被1, 2, 3标记的完全分层图

$$\text{则 } |R + J_{3+2}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 300, \text{ 故 } t(G) = (3+2)^{-2} \times 300 = 12.$$

2) 第一层顶点被1, 2, 4标记, 第二层顶点被3, 5标记的完全分层图如图4所示, 其对应生成树的个数如下.

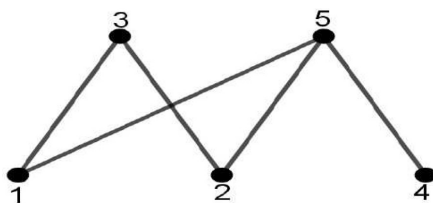


图 4 第一层顶点被1, 2, 4标记的完全分层图

由式(1)得 $t(G) = 5^{-2} \times 100 = 4$.

3) 第一层顶点被1, 3, 4标记, 第二层顶点被2, 5标记的完全分层图如图5所示, 其对应生成树的个数如下.

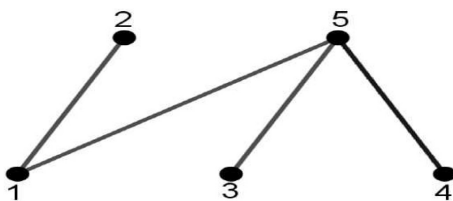


图5 第一层顶点被1, 3, 4标记的完全分层图

由式(1)得 $t(G) = 5^{-2} \times 25 = 1$.

因此当 $p_1 = 3, p_2 = 2$ 时, $T_{(3,2)} = 12 + 4 + 1 = 17$, 故 $T_{(2,3)} = T_{(3,2)} = 17$.

故 $n = 5$, 即 $p_1 + p_2 = 5$ 时, $T_{(p_1,p_2)} = T_{(1,4)} + T_{(2,3)} + T_{(3,2)} + T_{(4,1)} = 1 + 17 + 17 + 1 = 36$.

§3 n 个顶点的排列树和含有 $n - 1$ 个格子的Ferrers图

在定义1.1中, 当排列有 $n - 1$ 个逆序时, 可以得到一个排列树. 由定义1.3可知, 此时的排列树满足分层树的定义. 实际上, n 个顶点排列树是层数为2的分层树中的一类. 本节中, 将 n 个顶点的排列树分为PTG和UPTG两类, 其定义如下.

定义3.1 对于任意有 $n - 1$ 个逆序的 n 元排列 π , 若满足

- 1) π 为不可分解的排列;
- 2) $\pi = \{\omega, \nu\}$, ω 和 ν 是 $[n]$ 的递增子序列;
- 3) $\omega = p_{i_1} \cdots p_{i_k} n, \nu = 1p_{j_1} \cdots p_{j_l}$, 且 $p_{i_1} > p_{j_l}$,

称该排列对应的排列树为PTG; 如果只满足前两个条件, 不满足第三个条件, 则该排列对应的排列树记为UPTG.

例III1 排列 $\pi = 512364$, 易知该排列不可分解. $\pi = 512364$ 可写成2个递增子序列, $\omega = 56, \nu = 1234$, 且 $5 > 4$, 故 π 对应的排列树为PTG. 排列 $\pi' = 241635$ 不可分解, $\omega = 246$ 和 $\nu = 135$ 为递增子序列, 但 $2 < 5$, 故排列 π' 只满足条件(1)和(2), 则 π' 对应的排列树是UPTG.

Acan等人^[12]用递归的方法给出了 n 个顶点的排列树的个数为 $2^{n-2} (n \geq 2)$, 但是并没有对排列树的结构进行刻画. 由于排列树就是层数为2的分层树, 本文从分层树的定义和排列树的构造出发, 给出该计数公式一个新的证明方法.

定理3.2 设 $T(n)$ 为 n 个顶点的排列树的个数, 则有

$$T(n) = 2^{n-2}, n \geq 2.$$

证 由定义3.1可知, n 个顶点的排列树的个数与满足上述条件的排列的个数相等. 根据排列树的定义知, 1一定在 ν 中, n 在 ω 中, 故当 ν 中的元素确定时, ω 中的元素也随之确定, 此时所对应的排列是唯一的. 下面分两种情况来证明唯一性.

(T1) 第一层的所有顶点标号都小于第二层的顶点标号, 即对应的排列树属于PTG类.

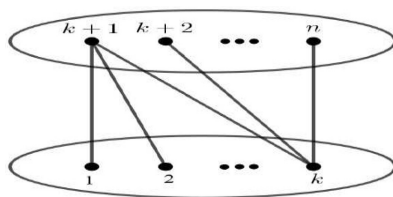


图6 PTG类所对应的排列树

若顶点 $k+1$ 与顶点 1 有边, 则顶点 $k+1$ 一定和 $1, 2, \dots, k$ 都有边; 然而顶点 $k+2$ 和 $\{1, 2, \dots, k\}$ 中两个点都有边时, 此时一定含有圈, 与树结构相矛盾. 为了保证其连通性, 故顶点 $k+2$ 只能和 k 有边. 同理顶点 $k+3, \dots, n$ 也一定只能与 k 有边, 如图6所示, 其所对应的排列为 $(k+1)12 \cdots (k-1)(k+2) \cdots nk$, 此时排列的逆序数为 $n-1$.

若顶点 $k+1$ 和 1 不相连, $k+1$ 必和 $\{2, \dots, k\}$ 中的点有边. 为了保证排列树的连通性, 顶点 $k+2, \dots, n$ 中至少有一个和 1 相连. 设顶点 $k+r$ ($r=2, 3, \dots, n-k$)和 1 有边, 故顶点 $k+1$ 一定和 1 有边, 与假设矛盾.

(T2) 若第一层中的顶点标号集中至少存在一个标号大于第二层的顶点标号, 即对应的排列树属于UPTG类.

对于此种情况, 首先把排列树进行分块, 同时保持递增关系. 把第一层的顶点集 ν 分成 m 块, 记为 $V_1, V_2, \dots, V_m$. 第二层的顶点集 ω 分成 ℓ 块, 记为 $W_1, W_2, \dots, W_\ell$, 保证每块的顶点标号满足以下关系.

①任取 $\nu_{i_s} \in V_i, \omega_{i_t} \in W_i$, 则有 $\nu_{i_s} < \omega_{i_t}$.

②若 $\nu_{(i+1)_s} \in V_{i+1}, \omega_{i_t} \in W_i$, 则有 $\omega_{i_t} < \nu_{(i+1)_s}$.

若 $\ell < m$, 当 $i=1, 2, \dots, m-1$ 时, 满足任取 $\nu_{i_k} \in V_i, \omega_{i_\ell} \in W_i$, 有 $\nu_{i_k} < \omega_{i_\ell}$. 此时 n 必定在 V_m 中, 即 n 在第一层, 与定义3.1矛盾, 则不存在 $\ell < m$ 的情况.

若 $\ell > m$, 由其分块情况知 $W_{m+1}, W_{m+2}, \dots, W_\ell$ 中顶点标号一定是大于 V_m 的顶点标号, 故可以把 W_m 和 $W_{m+1}, W_{m+2}, \dots, W_\ell$ 合为一块, 此时必有 $\ell = m$.

若 $\ell = m$, 则满足条件①, 故只有 $\ell = m$ 这一种情况.

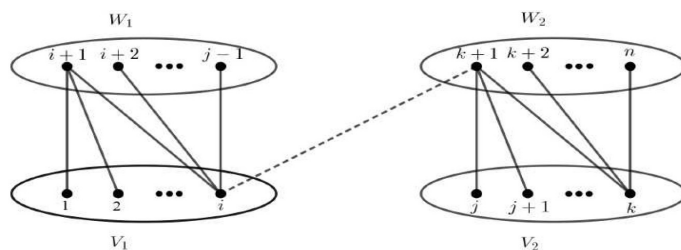


图7 UPTG类所对应的排列树

现只需证明 $\ell = m$ 时, 对应排列的个数是唯一的. 当 $m=1$ 时属于情况(T1).

下面以 $m = 2$ 为例, 其分块情况如图7所示, 每一块按情况(T1)来进行连边, 通过计算可知共有 $n - 2$ 条边. 因为 UPTG 类所对应的排列树有 $n - 1$ 条边, 则需增加一条边, 为了保证其连通性, 只能在顶点 i 与顶点 $k + 1$ 连边, 即图7中虚线部分, 故该排列树所对应的排列只能是 $(i + 1)12 \cdots (i - 1)(i + 2) \cdots (j - 1)(k + 1)ij(j + 1) \cdots (k - 1)(k + 2) \cdots nk$, 逆序数为 $n - 1$. 若顶点 $k + 2$ 与 i 连边, 则顶点 $k + 1$ 一定必与 i 相连, 此时排列树的边数为 n , 与 $n - 1$ 相矛盾, 故 UPTG 类所对应的排列树的结构如图7所示.

同理 $m > 2$ 时, 其与 $m = 2$ 的证明类似.

因此, n 个顶点的排列树所对应的排列可以通过第一层点的个数来计算. 除了 1 在第一层, n 在第二层外, 第一层的点的个数可以为 $0, 1, 2, \cdots, n - 2$, 故对应的排列树的个数为

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = 2^{n-2}, n \geq 2.$$

文献[6]找到了含有一个下降集的排列图与整数分拆中的 Ferrers 图之间的关系, 故 n 个顶点的排列树与 Ferrers 图也有一定的联系. 下面主要是对含有 $n - 1$ 个格子的 Ferrers 图进行研究, 扩充了 Ferrers 图的定义并提出了完整的 Ferrers 图和不完整的 Ferrers 图, 刻画了它们与排列树之间的关系.

定义3.3^[6] 若存在一个 $m \times k$ 且个数为 $n - 1$ 个的格子, 行标从左到右分别记为 $t_1, t_2, \cdots, t_m$, 列标从上到下分别记为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 且 $m + k = n$, 满足

- 1) 若 (t_i, a_j) ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$) 有格子, 且 $q \leq i, p \leq j$, 则 (t_q, a_p) 也一定有格子;
- 2) (t_1, a_k) 和 (t_m, a_1) 都有格子,

则称其为完整的 Ferrers 图.

实际上, 完整的 Ferrers 图可以看作是一个二部图的图表示. 若将定义3.3中的条件改为: 1) 若 (t_i, a_j) ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$) 有格子, 且 $q \leq i, p \leq j$, 则 (t_q, a_p) 不一定都有格子; 2) 每一行最右边必有一个格子, 则称其为不完整的 Ferrers 图. 如图8所示. 下文中所提到的完整的 Ferrers 图和不完整的 Ferrers 图都是含有 $n - 1$ 个格子.



图8 完整的 Ferrers 图(左)和不完整的 Ferrers 图(右)

引理3.4 若 G 为完整的 Ferrers 图, 则 G 与 PTG 之间存在一个双射.

证 给定一个 PTG 类的排列树, 由排列树的定义, 可以得到一个含有 $n - 1$ 个逆序的排列 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$. 由排列 $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$, 可以得到一个含有 $n - 1$ 个格子的完整的 Ferrers 图 G , 其做法如下: 若排列 π 中 (π_1, π_i) 构成 i_1 个逆序, 即 $\pi_1 > \pi_i, 2 \leq i \leq n$. 故可以画一个 $i_1 \times 1$ 的格子, 用 π_1 来标记 $i_1 \times 1$ 格子的底边, 该格子最右侧的边从下到上依次用 π 中从左到右 π_i 的值来标记; 若

排列 π 中 (π_2, π_j) 构成 j_1 个逆序, 即 $\pi_2 > \pi_j, 3 \leq j \leq n$. 如果 $\pi_i = \pi_j$, 则在 $i_1 \times 1$ 格子中找到标记为 π_i 的格子, 在其右边增加一个格子, π_i 的标号移到新增格子的右边. 按此方法依次加入 j_1 个格子; 依次类推至排列 π 的最后一个数字 π_n , 就得到了含有 $n-1$ 个格子的完整的Ferrers图 G , 其外边界可以看作是一个从下到上依次由排列 π 标记的格路径.

反之, 若 G 是完整的Ferrers图, 其外边界是一个从下到上依次由排列 π 标记的格路径. 由完整的Ferrers图的定义知, 排列 π 满足定义3.1中的三个条件, 故可由排列 π 得到其相应的排列树PTG.

例III2 若排列 $\pi = 512364$, 则其对应的排列树与完整的Ferrers图如图9所示, 完整的Ferrers图中粗线表示从下到上的一条格路径.

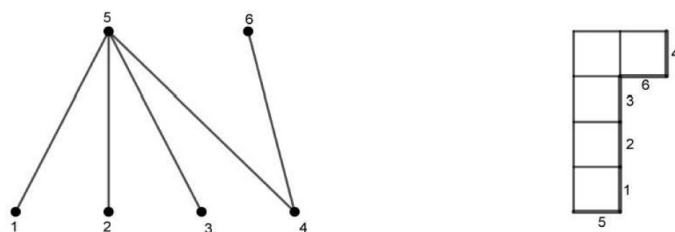


图9 排列512364对应的排列树PTG(左)和PTG对应的完整的Ferrers图(右)

推论3.5 由引理3.4知PTG类排列树和完整的Ferrers图的个数相同, 其个数为 $n-1, n \geq 2$.

引理3.6 若 G 为不完整的Ferrers图, 则 G 与UPTG之间存在一个双射.

证 该引理的证明与上述引理3.4的证明类似. 由UPTG的定义, 得到的是一个不完整的Ferrers图.

例III3 若排列 $\pi' = 241635$, 则其对应的排列树与不完整的Ferrers图如图10所示, 不完整的Ferrers图中粗线表示从下到上的一条格路径.

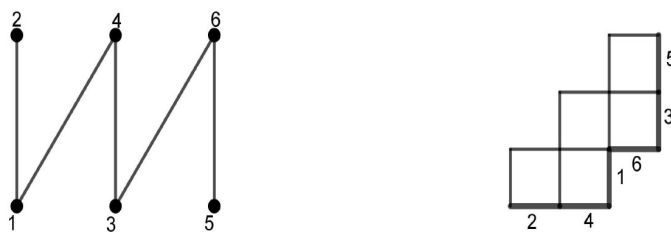


图10 排列241635对应的排列树UPTG(左)和UPTG对应的不完整的Ferrers图(右)

由定义3.1知, 完整的Ferrers图和不完整的Ferrers图对应的排列是不相同的, 即没有交集. 则可知完整的Ferrers图和不完整的Ferrers图的个数与排列树的个数相同, 即可以由定理3.2中的计数公式求出.

推论3.7 由引理3.6知UPTG类排列树和不完整的Ferrers图的个数相同, 其个数为

$$2^{n-2} - n + 1, n \geq 2.$$

参考文献:

- [1] Chartrand G, Harary F. Planar permutation graphs[J]. Ann Inst H. Poincaré Sect B (NS), 1967, 3: 433-438.
- [2] Pnueli A, Lempel A, Even S. Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs[J]. Canad J Math, 1971, 23: 160-175.
- [3] Koh Y, Ree S. Connected permutation graphs[J]. Discrete Math, 2007, 307(21): 2628-2635.
- [4] Balbuena C, Marcote X. On restricted connectivities of permutation graphs[J]. Networks, 2005, 45(3): 113-118.
- [5] Dukes M, Selig T, Smith J P, et al. The Abelian sandpile model on Ferrers graphs-a classification of recurrent configurations[J]. European J Combin, 2019, 81: 221-241.
- [6] Dukes M, Selig T, Smith J P, et al. Permutation graphs and the Abelian sandpile model, tiered trees and non-ambiguous binary trees[J]. Electron J Combin, 2019, 26(3), P3.29, 25pages.
- [7] Postnikov A. Intransitive trees[J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 79(2): 360-366.
- [8] Dugan W, Glennon S, Gunnells P E, et al. Tiered trees, weights, and q -Eulerian numbers[J]. J Combin Theory Ser A, 2019, 164: 24-49.
- [9] Yan S H F, Yan Danna, Zhou Hao. A bijective enumeration of tiered trees[J]. Discrete Math, 2020, 343: 111983.
- [10] Dong Fengming, Yan S H F. Proving identities on weight polynomials of tiered trees via Tutte polynomials[J]. J Combin Theory Ser A, 2023, 193: 105689.
- [11] 谭尚旺, 张德龙. 二部图生成树的新的计数公式(英文)[J]. 应用数学, 2001(S1): 185-188.
- [12] Acan H, Hitczenko P. On random trees obtained from permutation graphs[J]. Discrete Math, 2016, 339: 2871-2883.

Enumeration of tiered trees with 2 tiers and permutation trees

CAI Jing-guo, HOU Jiang-xia

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: A permutation tree is a type of connected permutation graph whose vertices are labeled by $[n]$, with edges formed by inversions. A permutation tree containing $n-1$ inversions can be regarded as a kind of 2-layered hierarchical tree. In this paper, a counting formula for 2-layered hierarchical trees were derived by using incidence matrices. Subsequently, a classification of permutation trees is given, and the number of permutation trees with n vertices is shown to be 2^{n-2} for $n \geq 2$, together with a characterization of their structure. A connection is also established between permutation trees and Ferrers diagrams with $n-1$ cells.

Keywords: permutation trees; tiered trees; incidence matrix; Ferrers graph

MR Subject Classification: 05A15; 05C05