

具有交叉免疫和迁移途中感染的 双毒株斑块扩散模型研究

高树坤^{1,2}, 王文聪^{1,2}, 林彩虹^{1,2}, 张 龙^{1,2*}

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆乌鲁木齐 830017;
2. 新疆维吾尔自治区应用数学重点实验室, 新疆乌鲁木齐 830017)

摘要: 宿主迁移和病原体变异对传染病的传播和持续存在起着重要作用, 该文建立了一类具有交叉免疫和迁移途中感染的双毒株斑块扩散模型, 研究了两种毒株在两个斑块间传播对疾病传播的影响. 首先, 证明了模型解的非负性和有界性. 得到了毒株1和毒株2的基本再生数 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$, 定义了模型的基本再生数 $\mathcal{R}_0$. 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定. 在给定条件下, 当 $\mathcal{R}_1 > 1, \mathcal{R}_2 < 1$ 时, 毒株1占优平衡点 E_1 全局渐近稳定, 当 $\mathcal{R}_2 > 1, \mathcal{R}_1 < 1$ 时, 毒株2占优平衡点 E_2 全局渐近稳定, 证明了疾病的一致持续性. 最后, 通过数值模拟演示了理论结果的有效性.

关键词: 交叉免疫; 迁移途中感染; 双毒株; 双斑块扩散; 稳定性

中图分类号: O175.14

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0227-16

§1 引言

COVID-19^[1]和HIV^[2]等重大流行病往往具有高度传染性, 全球传播和多毒株感染的特点, 其中宿主迁移^[3-4]和病原体变异^[5]是两个主要驱动因素.

由于病原体的变异, 一种疾病往往具有多种毒株, 不同的毒株之间存在不同的交互关系, 例如竞争排斥和共存^[5]. 竞争排斥原理指出任何两个物种不能无限期地占据相同的生态位^[6]. 通过多毒株ODE传染病模型, Thieme等人^[7]证明了竞争排斥原理是有效的, 即具有最高基本再生数的毒株持续存在, 而其它毒株将被淘汰. Castillo-Chavez等人^[8]提出了一类性传播疾病模型, 考虑了两种毒株的竞争作用, 研究发现除非在特殊情况下, 诸如: 重复感染, 合并感染^[9], 交叉免疫^[10], 不同传播模式等, 两种竞争菌株才可能共存. Xue等人^[11]建立了一类具有交叉免疫的多株登革热模型. LeJeune等人^[12]研究了水环境下交叉免疫对两株霍乱弧菌的影响, 建立了具有交叉

收稿日期: 2024-01-12 修回日期: 2024-05-16

* 通讯作者, Email: longzhang_xj@sohu.com

基金项目: 国家自然科学基金(12261087); 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2022D01E41); 新疆维吾尔自治区应用数学重点实验室开放课题(2021D04014)

免疫和环境传播的SIRP模型. Goel等人^[13]为了研究交叉免疫和感染以及免疫时滞对多菌株疾病的影响,建立了具有交叉免疫和多重时滞的SIRC模型. Pell等人^[10]提出了一类具有交叉免疫的双毒株SIR传染病模型

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = a - \beta_1 S I_1 - \beta_2 S I_2 - d S, \\ \dot{I}_1(t) = \beta_1 S I_1 - \gamma_1 I_1 - d_1 I_1, \\ \dot{I}_2(t) = \beta_2 S I_2 + \beta_2 R_l I_2 - \gamma_2 I_2 - d_2 I_2, \\ \dot{R}_l(t) = \gamma_1 I_1(t - \tau) - \beta_2 R_l I_2 - d R_l, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $S(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $R_l(t)$ 分别表示 t 时刻的易感者, 第1种毒株的感染者, 第2种毒株的感染者以及从毒株1恢复但对毒株2易感的个体. a 表示人口的出生率, β_k 表示第 k 种毒株的感染率, d 表示自然死亡率, d_k 表示感染第 k 种毒株的死亡率, γ_k 表示感染第 k 种毒株的恢复率, 其中 $k = 1, 2$.

另一方面, 人口迁移随着城市化、快速交通、经济发展和人类行为的改变而改变. 交通运输的快速发展, 其覆盖范围、速度和效率促进了全球人口的流动. Cui等人^[14-15]提出了一类具有迁移途中感染的SIS斑块扩散模型

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = a - \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - b S_1 + d I_1 - \alpha S_1 + \alpha S_2 - \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{I}_1(t) = \frac{\beta S_1 I_1}{S_1 + I_1} - (c + d + \alpha) I_1 + \alpha I_2 + \frac{\gamma \alpha S_2 I_2}{S_2 + I_2}, \\ \dot{S}_2(t) = a - \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - b S_2 + d I_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 - \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \\ \dot{I}_2(t) = \frac{\beta S_2 I_2}{S_2 + I_2} - (c + d + \alpha) I_2 + \alpha I_1 + \frac{\gamma \alpha S_1 I_1}{S_1 + I_1}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $S_i(t)$, $I_i(t)$ ($i = 1, 2$)分别表示在 t 时刻第 i 斑块上的易感者, 感染者. β 表示斑块内部疾病的感染率, b 表示自然死亡率, c 表示感染个体的死亡率, d 表示恢复率, α 表示迁移速率, γ 表示迁移途中感染率. 研究发现迁移途中感染会加剧疾病的传播.

此外, Sun等人^[16]建立了一类传播系数受媒体报道影响的SIS斑块模型, 研究了媒体报道和人员流动对传染病在斑块间传播的影响. Liu等人^[17]提出了一类斑块环境下具有时滞和迁移相关传染的周期SIS传染病模型, 进一步推广了Cui等人^[15]的研究结果. Gao^[18]建立了一类具有标准发生率的SIS斑块模型, 研究旅行频率对传染病在斑块间传播的影响. Gao^[19]建立了一类具有标准发生率的SIS斑块模型, 研究扩散如何影响传播规模和分布. Gao等人^[20]建立了一类具有标准发生率的SIAS 斑块模型, 研究无症状感染者对传染病空间扩散的影响. Gao等人^[21]建立了一类具有非线性发生率和非常数扩散率的SIRS斑块模型, 研究传染病斑块模型中基于相对流行率的扩散. 这些工作从不同方面展示了宿主迁移对传染病的分布和动态起着重要影响.

本文组织如下: §2建立并介绍了模型. §3证明了模型解的非负性和有界性, 得到模型的平衡点以及基本再生数. §4对模型的无病平衡点 E_0 , 毒株1占优平衡点 E_1 , 毒株2占优平衡点 E_2 的动力学进行分析, 证明了疾病的一致持续性. §5通过数值模拟演示了理论成果的有效性, 并对参数进行了敏感性分析. §6总结了本文所得结论.

§2 模型的建立与介绍

考虑到交叉免疫在斑块的疾病传播中对两种毒株的传播扩散具有不同的影响, 建立具有交

叉免疫和迁移途中感染的双毒株双斑块扩散模型

$$\begin{cases} \dot{S}_i(t) = a - \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{N_i} - \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} + m S_j - m S_i - \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{N_j} - \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} - d S_i, \\ \dot{I}_{i1}(t) = \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{N_i} + \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{N_j} + m I_{j1} - m I_{i1} - \gamma_1 I_{i1} - d_1 I_{i1}, \\ \dot{I}_{i2}(t) = \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} + \frac{\beta_2 R_{il} I_{i2}}{N_i} + \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} + \frac{\mu_2 m R_{jl} I_{j2}}{N_j} + m I_{j2} - m I_{i2} - \gamma_2 I_{i2} - d_2 I_{i2}, \\ \dot{R}_{il}(t) = \gamma_1 I_{i1} - \frac{\beta_2 R_{il} I_{i2}}{N_i} - \frac{\mu_2 m R_{jl} I_{j2}}{N_j} + m R_{jl} - m R_{il} - d R_{il}, i, j = 1, 2, i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

初始条件为

$$S_i(0) \geq 0, I_{i1}(0) \geq 0, I_{i2}(0) \geq 0, R_{il}(0) \geq 0. \quad (4)$$

这里 S_i, I_{ik}, R_{il} 分别表示第 i 个斑块上的易感者, 第 k 种毒株的感染者, 从第 1 种毒株恢复但对第 2 种毒株易感的个体, m 为迁移速率, μ_k 为迁移途中第 k 种毒株的感染率, 其中 $k = 1, 2$, 其余参数含义与模型(1)相同, 这里不再赘述.

在迁移途中, 忽略了个体在迁移途中的出生和死亡, 并且假设迁移途中受感染个体不会恢复. 在生物学的观点来看, 迁移途中的易感者和恢复者的数量应该是非负的, 也就是说

$$m S_j - \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{N_j} - \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} \geq 0, \quad m R_{jl} - \frac{\mu_2 m R_{jl} I_{j2}}{N_j} \geq 0.$$

§3 模型的基本性质及基本再生数

定理3.1 模型(3)在初始条件(4)下的解 $(S_1(t), I_{11}(t), I_{12}(t), R_{1l}(t), S_2(t), I_{21}(t), I_{22}(t), R_{2l}(t))$ 在 $[0, +\infty)$ 上是非负且最终有界.

证 由常微分方程解的存在唯一性定理^[22]知, 模型(3)在(4)下的解 $(S_1(t), \dots, R_{2l}(t))$ 在 $[0, T)$ 上存在唯一, 其中 $T \leq \infty$ 为饱和解的最大存在范围.

首先, 证明解的非负性. 只需证明模型(3)对满足任意正初始值(4)的解 $(S_1(t), \dots, R_{2l}(t))$ 也为正. 定义 $m(t) = \min \{S_1(t), I_{11}(t), \dots, R_{2l}(t)\}$, 则有 $m(0) > 0$. 用反证法, 假设存在一个 $t^* > 0$ 使得 $m(t^*) = 0$, 并且对所有 $t \in [0, t^*)$ 有 $m(t) > 0$.

如果在 $t^* = t_1$ 时刻, $m(t_1) = S_1(t_1) = 0$, 此时 $\dot{S}_1(t) \Big|_{t=t_1} \leq 0$. 由模型(3)第一个方程在 $i = 1$ 时有

$$\dot{S}_1(t) \Big|_{t=t_1} = a + m S_2 - \frac{\mu_1 m S_2 I_{21}}{N_2} - \frac{\mu_2 m S_2 I_{22}}{N_2}, m S_2 - \frac{\mu_1 m S_2 I_{21}}{N_2} - \frac{\mu_2 m S_2 I_{22}}{N_2} \geq 0,$$

故 $\dot{S}_1(t) \Big|_{t=t_1} > 0$, 矛盾. 因此 $S_1(t) > 0$, 对所有 $t \in [0, T)$ 成立. 同理可证 S_2 恒正对所有 $t \in [0, T)$ 成立.

如果在 $t^* = t_2$ 时刻, $m(t_2) = I_{11}(t_2) = 0$, 此时 $\dot{I}_{11}(t) \Big|_{t=t_2} \leq 0$. 由模型(3)第二个方程在 $i = 1$ 时有

$$\dot{I}_{11}(t) \Big|_{t=t_2} = \frac{\mu_1 m S_2 I_{21}}{N_2} + m I_{21} > 0,$$

矛盾. 因此 $I_{11}(t) > 0$, 对所有 $t \in [0, T)$ 成立. 同理可证 I_{21} 恒正对所有 $t \in [0, T)$ 成立.

同理类似可证 $I_{12}, I_{22}, R_{1l}, R_{2l}$ 在 $[0, T)$ 上的非负性.

令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, 得到

$$\dot{N}(t) = 2a - d(S_1 + S_2 + R_{1l} + R_{2l}) - d_1(I_{11} + I_{21}) - (d_2 + \gamma_2)(I_{12} + I_{22}) \leq 2a - \eta N,$$

这里 $\eta = \min\{d, d_1, \gamma_2 + d_2\}$, 由比较原理得: $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{2a}{\eta}$. 进一步得到集合

$$\Gamma = \{(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) \in \mathbf{R}_+^8 : N(t) \leq \frac{2a}{\eta}\} \text{ 为模型(3)的正不变集.}$$

因此模型(3)的解 $(S_1(t), I_{11}(t), I_{12}(t), R_{1l}(t), S_2(t), I_{21}(t), I_{22}(t), R_{2l}(t))$ 在 $[0, T]$ 是最终有界的, 由解的延拓定理^[22]知 $T = \infty$. 定理得证.

模型(3)存在无病平衡点 $E_0 = (\frac{a}{d}, 0, 0, 0, \frac{a}{d}, 0, 0, 0)$, 毒株1占优平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, 0, R^*, S^*, I^*, 0, R^*)$, 毒株2占优平衡点 $E_2 = (S_*, 0, I_*, 0, S_*, 0, I_*, 0)$. 其中

$$S^* = \frac{a(\gamma_1 + d)}{d(\beta_1 + \mu_1 m - d_1 + d)}, \quad I^* = \frac{a(\frac{\beta_1 + \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1} - 1)}{(\beta_1 + \mu_1 m - d_1 + d)}, \quad R^* = \frac{a\gamma_1(\frac{\beta_1 + \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1} - 1)}{d(\beta_1 + \mu_1 m - d_1 + d)},$$

$$S_* = \frac{a}{(\gamma_2 + d_2)(\frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2} - 1) + d}, \quad I_* = \frac{a(\frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2} - 1)}{(\gamma_2 + d_2)(\frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2} - 1) + d}.$$

通过下一代矩阵^[23]的方法, 计算得

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1(\gamma_1 + d_1 + m) + \mu_1 m^2}{(\gamma_1 + d_1)(\gamma_1 + d_1 + 2m)} & 0 & \frac{\beta_1 m + \mu_1 m(\gamma_1 + d_1 + m)}{(\gamma_1 + d_1)(\gamma_1 + d_1 + 2m)} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2(\gamma_2 + d_2 + m) + \mu_2 m^2}{(\gamma_2 + d_2)(\gamma_2 + d_2 + 2m)} & 0 & \frac{\beta_2 m + \mu_2 m(\gamma_2 + d_2 + m)}{(\gamma_2 + d_2)(\gamma_2 + d_2 + 2m)} \\ \frac{\mu_1 m(\gamma_1 + d_1 + m) + \beta_1 m}{(\gamma_1 + d_1)(\gamma_1 + d_1 + 2m)} & 0 & \frac{\mu_1 m^2 + \beta_1(\gamma_1 + d_1 + m)}{(\gamma_1 + d_1)(\gamma_1 + d_1 + 2m)} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2 m(\gamma_2 + d_2 + m) + \beta_2 m}{(\gamma_2 + d_2)(\gamma_2 + d_2 + 2m)} & 0 & \frac{\mu_2 m^2 + \beta_2(\gamma_2 + d_2 + m)}{(\gamma_2 + d_2)(\gamma_2 + d_2 + 2m)} \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = \frac{\beta_1 + \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1}$, $\lambda_2 = \frac{\beta_1 - \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1 + 2m}$, $\lambda_3 = \frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2}$, $\lambda_4 = \frac{\beta_2 - \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2 + 2m}$. 可得毒株1基本再生数 $\mathcal{R}_1 = \frac{\beta_1 + \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1}$, 毒株2基本再生数 $\mathcal{R}_2 = \frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2}$, 并且从 E_1 和 E_2 的表达式可以看出, 当 $\mathcal{R}_1 > 1$ 时, E_1 存在. 当 $\mathcal{R}_2 > 1$ 时, E_2 存在.

综上所述, 本文定义了模型(3)的基本再生数 $\mathcal{R}_0 = \max\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$.

注1 由于模型维数过高, 没有计算得到模型(3)共存平衡点 E_c 的存在性, 通过定理4.7证明疾病的一致持续性来证明共存平衡点的存在性, 并且在数值模拟部分演示其存在性.

§4 模型的动力学分析

定理4.1 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型(3)的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定.

证 模型(3)在 E_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -m - d & -\beta_1 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -m - d \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} m & -\mu_1 m & -\mu_2 m & 0 \\ 0 & \mu_1 m + m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 m + m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

其中 $A = \beta_1 - m - \gamma_1 - d_1$, $B = \beta_2 - m - \gamma_2 - d_2$.

计算矩阵 $J(E_0)$ 的特征方程, 得 $|\lambda I - J(E_0)| = |\lambda I - X - Y| |\lambda I - X + Y| = 0$, 其中

$$|\lambda I - X - Y| = (\lambda + d)^2 (\lambda - (\beta_1 + \mu_1 m - \gamma_1 - d_1)) (\lambda - (\beta_2 + \mu_2 m - \gamma_2 - d_2)),$$

其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -d < 0$, $\lambda_3 = \beta_1 + \mu_1 m - \gamma_1 - d_1$, $\lambda_4 = \beta_2 + \mu_2 m - \gamma_2 - d_2$.

由于 $\mathcal{R}_1 < 1$, $\beta_1 + \mu_1 m < \gamma_1 + d_1$, 故 $\lambda_3 < 0$. 由于 $\mathcal{R}_2 < 1$, $\beta_2 + \mu_2 m < \gamma_2 + d_2$, 故 $\lambda_4 < 0$.

$$|\lambda I - X + Y| = (\lambda + 2m + d)^2 (\lambda - w) (\lambda - v).$$

其中 $w = \beta_1 - \mu_1 m - 2m - \gamma_1 - d_1$, $v = \beta_2 - \mu_2 m - 2m - \gamma_2 - d_2$.

其特征值为 $\lambda_5 = \lambda_6 = -2m - d < 0$, $\lambda_7 = w < \lambda_3 < 0$, $\lambda_8 = v < \lambda_4 < 0$.

因此当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型(3)无病平衡点 E_0 局部渐近稳定.

定理4.2 当 $\mathcal{R}_1 > 1$ 时, (i) 若 $\mathcal{R}_2 < \frac{\mathcal{R}_1(d+\gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1+d}$, $\beta_1 \geq \mu_1 m$, 则模型(3)毒株1占优平衡点 E_1 局部渐近稳定.

(ii) 若 $\mathcal{R}_2 < \frac{\mathcal{R}_1(d+\gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1+d}$, $\beta_1 < \mu_1 m$, $\mu_1 m - \beta_1 < (d+2m)$, 则模型(3)毒株1占优平衡点 E_1 局部渐近稳定.

证 模型(3)在毒株1占优平衡点 E_1 处Jacobian矩阵 $J(E_1)$ 的特征方程为

$$|\lambda I - J(E_1)| = |\lambda I - X_1 - Y_1||\lambda I - X_1 + Y_1| = 0.$$

$X_1 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{-(\beta_1 I^*(I^*+R^*))}{(N^*)^2} - m - d & -\frac{\beta_1 S^*(S^*+R^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta_1 S^* I^* - \beta_2 S^*(N^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta_1 S^* I^*}{(N^*)^2} \\ \frac{\beta_1 I^*(I^*+R^*)}{(N^*)^2} & \frac{\beta_1 S^*(S^*+R^*)}{(N^*)^2} - m - \gamma_1 - d_1 & -\frac{\beta_1 S^* I^*}{(N^*)^2} & -\frac{\beta_1 S^* I^*}{(N^*)^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2(S^*+R^*)(N^*)}{(N^*)^2} - m - \gamma_2 - d_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -\frac{\beta_2 R^*(N^*)}{(N^*)^2} & -m - d \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_1 m I^*(I^*+R^*)}{(N^*)^2} + m & -\frac{\mu_1 m S^*(S^*+R^*)}{(N^*)^2} & \frac{\mu_1 m S^* I^* - \mu_2 m S^*(N^*)}{(N^*)^2} & \frac{\mu_1 m S^* I^*}{(N^*)^2} \\ \frac{\mu_1 m I^*(I^*+R^*)}{(N^*)^2} & \frac{\mu_1 m S^*(S^*+R^*)}{(N^*)^2} + m & -\frac{\mu_1 m S^* I^*}{(N^*)^2} & -\frac{\mu_1 m S^* I^*}{(N^*)^2} \\ 0 & 0 & \frac{\mu_2 m(S^*+R^*)(N^*)}{(N^*)^2} + m & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_2 m R^*(N^*)}{(N^*)^2} & m \end{pmatrix},$$

其中 $N^* = S^* + I^* + R^*$. 通过计算, 可得特征方程 $|\lambda I - J(E_1)|$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m)(S^* + R^*)(N^*)}{(N^*)^2} - \gamma_2 - d_2, \lambda_2 = -d < 0,$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = -(\gamma_1 + d_1 + d + A - B), \lambda_3 \lambda_4 = d(\gamma_1 + d_1 - B) + (\gamma_1 + d_1)A + \gamma_1 C,$$

$$\lambda_5 = \frac{(\beta_2 - \mu_2 m)(S^* + R^*)(N^*)}{(N^*)^2} - r_2 - d_2 - 2m, \lambda_7 + \lambda_8 = -(\gamma_1 + d_1 + d + 4m - E + D),$$

$$\lambda_6 = -2m - d < 0, \lambda_7 \lambda_8 = (d + 2m)(\gamma_1 + d_1 + 2m - E) + (\gamma_1 + d_1 + 2m)D + \gamma_1 F.$$

$$A = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m)I^*(I^* + R^*)}{(N^*)^2}, B = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m)S^*(S^* + R^*)}{(N^*)^2}, C = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m)S^* I^*}{(N^*)^2},$$

$$D = \frac{(\beta_1 - \mu_1 m)I^*(I^* + R^*)}{(N^*)^2}, E = \frac{(\beta_1 - \mu_1 m)S^*(S^* + R^*)}{(N^*)^2}, F = \frac{(\beta_1 - \mu_1 m)S^* I^*}{(N^*)^2}.$$

由于 $\mathcal{R}_2 < \frac{\mathcal{R}_1(d+\gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1+d}$, 得 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_5 < \lambda_1 < 0$. 由于 $\gamma_1 + d_1 - B > \gamma_1 + d_1 - \frac{(\beta_1 + \mu_1 m)S^*}{N^*} = 0$, 可得 $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$, $\lambda_3 \lambda_4 > 0$. 故 $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 < 0$. 由于 $B > E$, 故 $\gamma_1 + d_1 > B > E$, 可得 $\lambda_7 + \lambda_8 < 0$.

当 $\beta_1 - \mu_1 m \geq 0$ 时, $\lambda_7 \lambda_8 > 0$, 此时 $\lambda_7 < 0$, $\lambda_8 < 0$, $J(E_1)$ 的全部特征值都小于0.

当 $\mu_1 m - \beta_1 > 0$ 时, D, E, F 都小于0. 由条件 $\mu_1 m - \beta_1 < (d+2m)$, 可得

$$\lambda_7 \lambda_8 > \gamma_1((d+2m) + D + F) > \gamma_1((d+2m) + \beta_1 - \mu_1 m) > 0,$$

此时 $\lambda_7 < 0$, $\lambda_8 < 0$, $J(E_1)$ 的全部特征值都小于0.

因此满足(i)或(ii)时, 模型(3)毒株1占优平衡点 E_1 局部渐近稳定.

定理4.3 当 $\mathcal{R}_2 > 1$ 时, (i) 若 $\beta_2 \geq \mu_2 m$, $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$, 则模型(3)毒株2占优平衡点 E_2 局部渐近稳定.

(ii) 若 $\beta_2 < \mu_2 m$, $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$, $\mu_2 m - \beta_2 < (2m+d)$, 则模型(3)毒株2占优平衡点 E_2 局部渐近稳定.

证 模型(3)在毒株2占优平衡点 E_2 处Jacobian矩阵 $J(E_2)$ 的特征方程为

$$|\lambda I - J(E_2)| = |\lambda I - X_2 - Y_2||\lambda I - X_2 + Y_2| = 0,$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_2(I_*)^2}{(N_*)^2} - m - d & -\frac{\beta_1 S_* N_* - \beta_2 S_* I_*}{(N_*)^2} & -\frac{\beta_2(S_*)^2}{(N_*)^2} & \frac{\beta_2 S_* I_*}{(N_*)^2} \\ 0 & \frac{\beta_1 S_* N_*}{(N_*)^2} - m - \gamma_1 - d_1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2(I_*)^2}{(N_*)^2} & -\frac{\beta_2 S_* I_*}{(N_*)^2} & \frac{\beta_2(S_*)^2}{(N_*)^2} - m - \gamma_2 - d_2 & -\frac{\beta_2 S_* I_* - \beta_2 I_* N_*}{(N_*)^2} \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\frac{\beta_2 I_* N_*}{(N_*)^2} - m - d \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_2 m(I_*)^2}{(N_*)^2} + m & -\frac{\mu_1 m S_* N_* - \mu_2 m S_* I_*}{(N_*)^2} & -\frac{\mu_2 m(S_*)^2}{(N_*)^2} & \frac{\mu_2 m S_* I_*}{(N_*)^2} \\ 0 & \frac{\mu_1 m S_* N_*}{(N_*)^2} + m & 0 & 0 \\ \frac{\mu_2 m(I_*)^2}{(N_*)^2} & -\frac{\mu_2 m S_* I_*}{(N_*)^2} & \frac{\mu_2 m(S_*)^2}{(N_*)^2} + m & -\frac{\mu_2 m S_* I_* - \mu_2 m I_* N_*}{(N_*)^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_2 m I_* N_*}{(N_*)^2} + m \end{pmatrix}.$$

其中 $N_* = S_* + I_*$. 通过计算, 可得特征方程 $|\lambda I - J(E_2)|$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m) S_* N_*}{(N_*)^2} - \gamma_1 - d_1, \lambda_2 = -\bar{D} - d < 0,$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = -(\gamma_2 + d_2 + d - \bar{B} + \bar{A}), \lambda_3 \lambda_4 = d(\gamma_2 + d_2 - \bar{B}) + (\gamma_2 + d_2) \bar{A},$$

$$\lambda_5 = \frac{(\beta_1 - \mu_1 m) S_* N_*}{(N_*)^2} - \gamma_1 - d_1 - 2m < \lambda_1, \lambda_7 + \lambda_8 = -(\gamma_2 + d_2 + d + 4m - \bar{F} + \bar{E}),$$

$$\lambda_6 = -\bar{H} - d - 2m, \lambda_7 \lambda_8 = (2m + d)(\gamma_2 + d_2 + 2m - \bar{F}) + (\gamma_2 + d_2 + 2m) \bar{E}.$$

$$\bar{A} = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m)(I_*)^2}{(N_*)^2}, \bar{B} = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m)(S_*)^2}{(N_*)^2}, \bar{C} = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m) S_* I_*}{(N_*)^2}, \bar{D} = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m) I_* N_*}{(N_*)^2},$$

$$\bar{E} = \frac{(\beta_2 - \mu_2 m)(I_*)^2}{(N_*)^2}, \bar{F} = \frac{(\beta_2 - \mu_2 m)(S_*)^2}{(N_*)^2}, \bar{G} = \frac{(\beta_2 - \mu_2 m) S_* I_*}{(N_*)^2}, \bar{H} = \frac{(\beta_2 - \mu_2 m) I_* N_*}{(N_*)^2}.$$

由于 $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$, 可得 $\lambda_1 < 0$. 由于 $\gamma_2 + d_2 - \bar{B} > \gamma_2 + d_2 - \frac{(\beta_2 + \mu_2 m) S_*}{N_*} = 0$, 因此 $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$, $\lambda_3 \lambda_4 > 0$, 故 $\lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$. $\gamma_2 + d_2 - \bar{F} > \gamma_2 + d_2 - \bar{B} > 0$, 得 $\lambda_7 + \lambda_8 < 0$.

当 $\beta_2 - \mu_2 m \geq 0$ 时, $\lambda_6 < 0, \bar{E} > 0, \lambda_7 \lambda_8 > 0$, 故 $\lambda_7 < 0, \lambda_8 < 0$, $J(E_2)$ 全部特征值小于0.

当 $\mu_2 m - \beta_2 > 0$ 时, $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}$ 都小于0. 由条件 $\mu_2 m - \beta_2 < (2m + d)$, 可得 $\lambda_6 = -\bar{H} - d - 2m < \mu_2 m - \beta_2 - d - 2m < 0, \lambda_7 \lambda_8 > (\gamma_2 + d_2 + 2m)(2m + d - (\beta_2 - \mu_2 m)) > 0$. 此时 $\lambda_7 < 0, \lambda_8 < 0$, $J(E_2)$ 全部特征值小于0.

因此满足(i)或(ii)时, 模型(3)毒株2占优平衡点 E_2 局部渐近稳定.

注2 根据定理4.2中 $\mathcal{R}_2 < \frac{\mathcal{R}_1(d+\gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1+d} < \mathcal{R}_1$ 和定理4.3中 $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$, 可以看出毒株1和毒株2满足竞争排斥原理^[7], 即基本再生数高的毒株会在竞争中占优.

定理4.4 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型(3)无病平衡点 E_0 全局渐近稳定.

证 由于 $\mathcal{R}_1 = \frac{\beta_1 + \mu_1 m}{\gamma_1 + d_1} < 1$, 可得 $\beta_1 + \mu_1 m < \gamma_1 + d_1$. 由模型(3)可得

$$\dot{I}_{11} + \dot{I}_{21} = (\beta_1 + \mu_1 m) \frac{S_1 I_{11}}{N_1} - \gamma_1 I_{11} - d_1 I_{11} + (\beta_1 + \mu_1 m) \frac{S_2 I_{21}}{N_1} - \gamma_1 I_{21} - d_1 I_{21} \leq$$

$$[\beta_1 + \mu_1 m - \gamma_1 - d_1](I_{11} + I_{21}).$$

由比较原理以及 I_{11} 与 I_{21} 的非负性和有界性, 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (I_{11} + I_{21}) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0.$$

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0$, 对于充分小常数 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时,

有 $I_{11} < \varepsilon, I_{21} < \varepsilon$, 故由模型(3)可得

$$\dot{R}_{1l} + \dot{R}_{2l} \leq 2\gamma_1\varepsilon - (\beta_2 + \mu_2 m) \frac{R_{1l}I_{12}}{N_1} - (\beta_2 + \mu_2 m) \frac{R_{2l}I_{22}}{N_2} - dR_{1l} - dR_{2l} \leq$$

$$2\gamma_1\varepsilon - d(R_{1l} + R_{2l}).$$

由比较原理得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup(R_{1l} + R_{2l}) \leq \frac{2\gamma_1\varepsilon}{d}$. 由 R_{1l} 和 R_{2l} 的非负性和有界性, 可得当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $R_{1l} \rightarrow 0, R_{2l} \rightarrow 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{1l} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} R_{2l} = 0$.

由于 $\mathcal{R}_2 = \frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2} < 1$, 可得 $(\beta_2 + \mu_2 m) < \gamma_2 + d_2$. 由模型(3)可得

$$\dot{I}_{12} + \dot{I}_{22} = (\beta_2 + \mu_2 m) \left(\frac{S_1 I_{12}}{N_1} + \frac{R_{1l} I_{12}}{N_1} + \frac{S_2 I_{22}}{N_2} + \frac{R_{2l} I_{22}}{N_2} \right) - (\gamma_2 + d_2)(I_{12} + I_{22}) \leq$$

$$\left[(\beta_2 + \mu_2 m) - (\gamma_2 + d_2) \right] (I_{12} + I_{22}).$$

由比较原理及 I_{12} 和 I_{22} 的非负和有界性, 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (I_{12} + I_{22}) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{12} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{22} = 0$.

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} R_{1l} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} R_{2l} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{12} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{22} = 0$. 可得极限系统

$$\dot{S}_1 = a + mS_2 - mS_1 - dS_1, \quad \dot{S}_2 = a + mS_1 - mS_2 - dS_2.$$

将两式相加和相减得

$$\dot{S}_1 + \dot{S}_2 = 2a - d(S_1 + S_2), \quad \dot{S}_1 - \dot{S}_2 = -(2m + d)(S_1 - S_2).$$

由比较原理以及 S_1 和 S_2 的非负性和对称性, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1 + S_2) = \frac{2a}{d}, \lim_{t \rightarrow \infty} (S_1 - S_2) = 0$. 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1 = \frac{a}{d}, \lim_{t \rightarrow \infty} S_2 = \frac{a}{d}$. 因此当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型(3)无病平衡点 E_0 全局渐近稳定.

定理4.5 当 $\mathcal{R}_1 > 1, \mathcal{R}_2 < 1, 2d > d_1, H < |\beta_1 - \mu_1 m| < K$, 其中

$$\max \left\{ \frac{H = [2u(u+v) + \frac{1}{2}\gamma_1(u-\gamma_1)] - [(2u(u+v) + \frac{1}{2}\gamma_1(u-\gamma_1))^2 + (u+v)(u^2v - \frac{1}{4}\gamma_1^2u)]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(u+v)}, 0 \right\},$$

$$K = \frac{[2u(u+v) + \frac{1}{2}\gamma_1(u-\gamma_1)] + [(2u(u+v) + \frac{1}{2}\gamma_1(u-\gamma_1))^2 + (u+v)(u^2v - \frac{1}{4}\gamma_1^2u)]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(u+v)}, u = 2m + d, v = 2m + \gamma_1 + d_1,$$

模型(3)的毒株1占优平衡点 E_1 全局渐近稳定.

证 由于 $\mathcal{R}_2 < 1, E_2$ 不存在. 由模型(3)得

$$\dot{I}_{12} + \dot{I}_{22} = (\beta_2 + \mu_2 m) \left(\frac{(S_1 + R_{1l})I_{12}}{N_1} + \frac{(S_2 + R_{2l})I_{22}}{N_2} \right) - (\gamma_2 + d_2)(I_{12} + I_{22}) \leq$$

$$(\beta_2 + \mu_2 m - \gamma_2 - d_2)(I_{12} + I_{22}).$$

对上式两边进行积分可得

$$(I_{12}(t) + I_{22}(t)) \leq (I_{12}(0) + I_{22}(0))e^{(\beta_2 + \mu_2 m - \gamma_2 - d_2)t}.$$

由于 $\mathcal{R}_2 < 1$, 故 $\beta_2 + \mu_2 m - \gamma_2 - d_2 < 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{12} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I_{22} = 0$.

因此考虑六维模型

$$\begin{cases} \dot{S}_i = a - \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{S_i + I_{i1} + R_{il}} + mS_j - mS_i - \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{S_j + I_{j1} + R_{jl}} - dS_i, \\ \dot{I}_{i1} = \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{S_i + I_{i1} + R_{il}} + \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{S_j + I_{j1} + R_{jl}} + mI_{j1} - mI_{i1} - \gamma_1 I_{i1} - d_1 I_{i1}, \\ \dot{R}_{il} = \gamma_1 I_{i1} + mR_{jl} - mR_{il} - dR_{il}, i, j = 1, 2, i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

构造Lyapunov函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ (S_1(t) - S_2(t))^2 + (I_{11}(t) - I_{21}(t))^2 + (R_{1l}(t) - R_{2l}(t))^2 \}.$$

$$\dot{V} = -(2m+d)(S_1-S_2)^2 - (2m+\gamma_1+d_1)(I_{11}-I_{21})^2 - (2m+d)(R_{1l}-R_{2l})^2 + (\beta_1-\mu_1m) \cdot \left(\frac{S_2 I_{21}}{S_2+I_{21}+R_{2l}} - \frac{S_1 I_{11}}{S_1+I_{11}+R_{1l}} \right) [(S_1-S_2) - (I_{11}-I_{21})] + \gamma_1(I_{11}-I_{21})(R_{1l}-R_{2l}).$$

其中

$$\left(\frac{S_2 I_{21}}{S_2+I_{21}+R_{2l}} - \frac{S_1 I_{11}}{S_1+I_{11}+R_{1l}} \right) = \frac{S_2 S_1 (I_{21}-I_{11}) + I_{21} I_{11} (S_2-S_1) + S_2 I_{21} R_{1l} - S_1 I_{21} R_{2l}}{(S_2+I_{21}+R_{2l})(S_1+I_{11}+R_{1l})} \leq$$

$$2|S_2-S_1| + 2|I_{21}-I_{11}| + |R_{1l}-R_{2l}|.$$

其中上式分子中 $S_2 I_{21} R_{1l} - S_1 I_{11} R_{2l}$, 进行变形

$$S_2 I_{21} R_{1l} - S_1 I_{11} R_{2l} = S_2 I_{21} R_{1l} - S_1 I_{21} R_{1l} + S_1 I_{21} R_{1l} - S_1 I_{11} R_{1l} + S_1 I_{11} R_{1l} - S_1 I_{11} R_{2l} = I_{21} R_{1l} (S_2 - S_1) + S_1 R_{1l} (I_{21} - I_{11}) + S_1 I_{11} (R_{1l} - R_{2l}).$$

$$\dot{V} \leq -\{(2m+d) - 2|\beta_1 - \mu_1 m|\}(S_1 - S_2)^2 - \{(2m+\gamma_1+d_1) - 2|\beta_1 - \mu_1 m|\}(I_{11} - I_{21})^2 - (2m+d)(R_{1l} - R_{2l})^2 + 4|\beta_1 - \mu_1 m||S_2 - S_1||I_{21} - I_{11}| + |\beta_1 - \mu_1 m||S_2 - S_1||R_{1l} - R_{2l}| + (|\beta_1 - \mu_1 m| + \gamma_1)|I_{21} - I_{11}||R_{1l} - R_{2l}|.$$

$\dot{V}$ 负定等价于如下二次型 $\bar{V}$ 是正定的, 这里

$$\bar{V} = \begin{vmatrix} (2m+d) - 2|\beta_1 - \mu_1 m| & -2|\beta_1 - \mu_1 m| & -\frac{1}{2}|\beta_1 - \mu_1 m| \\ -2|\beta_1 - \mu_1 m| & (2m+\gamma_1+d_1) - 2|\beta_1 - \mu_1 m| & -\frac{1}{2}(|\beta_1 - \mu_1 m| + \gamma_1) \\ -\frac{1}{2}|\beta_1 - \mu_1 m| & -\frac{1}{2}(|\beta_1 - \mu_1 m| + \gamma_1) & 2m+d \end{vmatrix},$$

$\bar{V}$ 是正定的当且仅当它的一阶、二阶和三阶顺序主子式都大于0. 由于 $H < |\beta_1 - \mu_1 m| < K$, 三个顺序主子式都大于0, $\bar{V}$ 是正定的, 那么 $\dot{V}$ 是负定的.

因此可以找到一个正的常数 λ , 满足

$$\dot{V} \leq -\lambda\{(S_1(t) - S_2(t))^2 + (I_{11}(t) - I_{21}(t))^2 + (R_{1l}(t) - R_{2l}(t))^2\} = -2\lambda V(t) \leq 0.$$

有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1(t) - S_2(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (I_{11}(t) - I_{21}(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (R_{1l}(t) - R_{2l}(t)) = 0$.

由Lyapunov稳定性定理^[24], 知 $\omega(x) \cap \mathbf{R}_+^6$ 包含在集合 $\{x \in \mathbf{R}_+^6 | V' = 0\} = \{(S_1, I_{11}, R_{1l}, S_2, I_{21}, R_{2l}) \in \mathbf{R}_+^6 | S_1 = S_2, I_{11} = I_{21}, R_{1l} = R_{2l}\}$. 其中 $\omega(x)$ 是方程的解的 ω -极限集, 其初值为 x , $\mathbf{R}_+^6$ 表示状态空间 $\{x \in \mathbf{R}_+^6 | x \geq 0\}$. 在该集合下, 模型(5)可转化为三维单斑块模型.

$$\begin{cases} \dot{S} = a - \frac{\beta_1 SI}{S+I+R} - \frac{\mu_1 m SI}{S+I+R} - dS, \\ \dot{I} = \frac{\beta_1 SI}{S+I+R} + \frac{\mu_1 m SI}{S+I+R} - \gamma_1 I - d_1 I, \\ \dot{R} = \gamma_1 I - dR. \end{cases} \quad (6)$$

模型(6)的正平衡点为 $E^* = (S^*, I^*, R^*)$, 其中 $S^* = \frac{a(\gamma_1+d)}{d(\beta_1+\mu_1 m-d_1+d)}$, $I^* = \frac{a(\frac{\beta_1+\mu_1 m}{\gamma_1+d_1}-1)}{(\beta_1+\mu_1 m-d_1+d)}$,

$R^* = \frac{a\gamma_1(\frac{\beta_1+\mu_1 m}{\gamma_1+d_1}-1)}{d(\beta_1+\mu_1 m-d_1+d)}$. 接下来证明 E^* 全局渐近稳定.

构造Lyapunov函数

$$L = \left[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*) - (S^* + I^* + R^*) \ln \frac{(S+I+R)}{(S^*+I^*+R^*)} \right] + \frac{(d_1+d)}{(\beta_1+\mu_1 m)} \times \frac{(S^*+I^*+R^*)}{(I^*+R^*)} \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + \frac{d_1+d}{2\gamma_1} \left(1 + \frac{S^*}{I^*+R^*} \right) \frac{(R-R^*)^2}{(S+I+R)},$$

将 $a = d(S^* + R^*) + d_1 I^*$, $\gamma_1 + d_1 = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m) S^*}{S^* + I^* + R^*}$, $\gamma_1 I^* = d R^*$ 代入可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -d \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - d_1 \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} - \\ & (d + d_1) \left(\frac{(S - S^*)(I - I^*)}{S + I + R} + \frac{(R - R^*)(I - I^*)}{S + I + R} \right) + \\ & \frac{(d_1 + d)(S^* + I^* + R^*)}{(I^* + R^*)} (I - I^*) \left(\frac{S}{S + I + R} - \frac{S^*}{S^* + I^* + R^*} \right) + \frac{(d_1 + d)}{\gamma_1} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \times \\ & \frac{(R - R^*)(\gamma_1(I - I^*) - d(R - R^*))}{S + I + R} - \frac{(d_1 + d)}{2\gamma_1} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2 (S' + I' + R')}{(S + I + R)^2}. \end{aligned}$$

将 $\frac{S}{S + I + R} - \frac{S^*}{S^* + I^* + R^*} = \frac{(I^* + R^*)(S - S^*) - S^*(I - I^*) - S^*(R - R^*)}{(S + I + R)(S^* + I^* + R^*)}$ 代入上式,

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -d \frac{[(S - S^*) + (R - R^*)]^2}{S + I + R} - \left(d_1 + \frac{(d_1 + d) S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(I - I^*)^2}{S + I + R} - \\ & \frac{(d_1 + d)}{2\gamma_1} \left(1 + \frac{S^*}{I^* + R^*} \right) \frac{(R - R^*)^2}{(S + I + R)^2} (a + d(S + R) + (2d - d_1)I). \end{aligned}$$

由于 $2d - d_1 > 0$, $\dot{L}$ 是负定的. $\dot{L} = 0$ 当且仅当 $S = S^*, I = I^*, R = R^*$, 因此在 $\{(S, I, R) \in \Gamma : \dot{L} = 0\}$ 中最大的不变集是单点集 $\{E^*\}$. 根据Lasalle不变原理^[25], 可得 $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ 在 Γ 内部是全局渐近稳定.

根据文献[26]中的定理2.3可得模型(5)地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, R^*, S^*, I^*, R^*)$ 全局渐近稳定. 因此证明了模型(3)毒株1占优平衡点 $E_1 = (S^*, I^*, 0, R^*, S^*, I^*, 0, R^*)$ 全局渐近稳定.

定理4.6 当 $\mathcal{R}_2 > 1$, $\mathcal{R}_1 < 1$, $|\beta_2 - \mu_2 m| < \frac{(2m+d)(2m+\gamma_2+d_2)}{2m+d+2m+\gamma_2+d_2}$ 时, 模型(3)毒株2占优平衡点 E_2 全局渐近稳定.

证 由于 $\mathcal{R}_1 < 1$, E_1 不存在. 由 $\mathcal{R}_1 < 1$, 以及 $I_{11}(t)$ 和 $I_{21}(t)$ 的非负性和有界性, 可得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I_{11}(t) \rightarrow 0$, $I_{21}(t) \rightarrow 0$. 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0$. 从定理4.4证明可知, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{1l} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{2l} = 0$. 由 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{11} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{21} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{1l} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{2l} = 0$. 得到四维极限模型

$$\begin{cases} \dot{S}_i = a - \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} + m S_j - m S_i - \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} - d S_i, \\ \dot{I}_{i2} = \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} + \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} + m I_{j2} - m I_{i2} - \gamma_2 I_{i2} - d_2 I_{i2}, i, j = 1, 2, i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

构造函数 $V(t) = \frac{1}{2} \{(S_1(t) - S_2(t))^2 + (I_{12}(t) - I_{22}(t))^2\}$, 与定理4.5证明类似, 可以找到一个正的常数 λ , 满足

$$\dot{V} \leq -\lambda \{(S_1(t) - S_2(t))^2 + (I_{12}(t) - I_{22}(t))^2\} = -2\lambda V(t) \leq 0.$$

故 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1(t) - S_2(t)) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (I_{12}(t) - I_{22}(t)) = 0$.

将模型(7)转化为二维单斑块模型

$$\begin{cases} \dot{S} = a - \frac{\beta_2 S I}{S + I + R} - \frac{\mu_2 m S I}{S + I + R} - d S, \\ \dot{I} = \frac{\beta_2 S I}{S + I + R} + \frac{\mu_2 m S I}{S + I + R} - \gamma_2 I - d_2 I. \end{cases} \quad (8)$$

模型(8)的正平衡点 $E_* = (S_*, I_*)$, 其中 $S_* = \frac{a}{(\gamma_2 + d_2)(\mathcal{R}_2 - 1) + d}$, $I_* = \frac{a(\mathcal{R}_2 - 1)}{(\gamma_2 + d_2)(\mathcal{R}_2 - 1) + d}$. 接下

来证明 E_* 在模型(8)下是全局渐近稳定的. 模型(8)等价于系统

$$\begin{cases} \dot{N} = a - dN - (\gamma_2 + d_2 - d)I, \\ \dot{I} = (\beta_2 + \mu_2 m) \left(1 - \frac{I}{N} - \frac{\gamma_2 + d_2}{\beta_2 + \mu_2 m} \right). \end{cases} \quad (9)$$

模型(9)的正平衡点 $E_* = (N_*, I_*)$, $N_* = S_* + I_*$, 将 $a = dN_* + (\gamma_2 + d_2 - d)I_*$, $\frac{\gamma_2 + d_2}{\beta_2 + \mu_2 m} = \frac{N_* - I_*}{N_*}$, 代入模型(9)有

$$\begin{cases} \dot{N} = -d(N - N_*) - (\gamma_2 + d_2 - d)(I - I_*), \\ \dot{I} = (\beta_2 + \mu_2 m)I \left(\frac{I_*(N - N_*)}{NN_*} \right) - (\beta_2 + \mu_2 m) \frac{I}{N} (I - I_*), \end{cases} \quad (10)$$

当 $N > N_*$ 时, $\frac{I_*(N - N_*)}{NN_*}$ 为正, 当 $N < N_*$ 时, $\frac{I_*(N - N_*)}{NN_*}$ 为负.

构造Lyapunov函数

$$L = \frac{\beta_2 + \mu_2 m}{\gamma_2 + d_2 - d} \int_{N_*}^N \frac{I_*(x - N_*)}{xN_*} dx + I - I_* \ln \frac{I}{I_*}.$$

$$\dot{L} = -\frac{d(\beta_2 + \mu_2 m)}{\gamma_2 + d_2 - d} \frac{I_*(N - N_*)^2}{NN_*} - (\beta_2 + \mu_2 m) \frac{1}{N} (I - I_*)^2.$$

对于任意 $(N, I) \neq (N_*, I_*)$, 有 $\dot{L} < 0$, 因此在 $\{(S, I) \in \Gamma : \dot{L} = 0\}$ 中最大的不变集是单点集 $\{E_*\}$. 根据Lasalle不变原理^[25], $E_* = (N_*, I_*)$ 在 Γ 内部是全局渐近稳定. 那么在模型(8)中 $E_* = (S_*, I_*)$ 在 Γ 内部是全局渐近稳定.

根据文献[26]中的定理2.3可以得到模型(7)的地方病平衡点 $E_* = (S_*, I_*, S_*, I_*)$ 全局渐近稳定, 因此证明了模型(3)毒株2占优平衡点 $E_2 = (S_*, 0, I_*, 0, S_*, 0, I_*, 0)$ 全局渐近稳定.

在证明疾病一致持续之前, 先通过文献[9]中的方法得到两个阈值

$$\mathcal{R}_1^2 = \frac{(\beta_1 + \mu_1 m)(\gamma_2 + d_2)}{(\beta_2 + \mu_2 m)(\gamma_1 + d_1)}, \mathcal{R}_2^1 = \frac{(\beta_2 + \mu_2 m)(\gamma_1 + d_1) \left(\frac{(\beta_1 + \mu_1 m)}{(\gamma_1 + d_1)} \gamma_1 + d_1 \right)}{(\beta_1 + \mu_1 m)(\gamma_2 + d_2)(d + \gamma_1)},$$

其中 $\mathcal{R}_2^1$ 表示毒株1处于平衡时毒株2的入侵再生数, $\mathcal{R}_1^2$ 表示毒株2处于平衡时毒株1的入侵再生数.

注3 化简两个入侵再生数得 $\mathcal{R}_1^2 = \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2}$, $\mathcal{R}_2^1 = \frac{\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_1\gamma_1 + d)}{\mathcal{R}_1(d + \gamma_1)}$. 定理4.2中 $\mathcal{R}_2 < \frac{\mathcal{R}_1(d + \gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1 + d}$ 等价于 $\mathcal{R}_2^1 < 1$, 定理4.3中 $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$ 等价于 $\mathcal{R}_1^2 < 1$. 通过定理4.2和定理4.3, 猜测当两种毒株的基本再生数满足在 $\frac{\mathcal{R}_1(d + \gamma_1)}{\mathcal{R}_1\gamma_1 + d} < \mathcal{R}_2 < \mathcal{R}_1$ 区间的内部时, 共存平衡点 E_c 存在.

定理4.7 如果 $\mathcal{R}_0 > 1$, $\mathcal{R}_1^2 > 1$ 和 $\mathcal{R}_2^1 > 1$, 该疾病一致持续, 即存在 $\epsilon > 0$, 使得模型(3)的所有解满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} S_i(t) > \epsilon$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} I_{ij}(t) > \epsilon$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} R_{il}(t) > \epsilon$. 对所有初始条件 $\phi = (S_1(0), I_{11}(0), I_{12}(0), R_{1l}(0), S_2(0), I_{21}(0), I_{22}(0), R_{2l}(0)) \in \Gamma$, 其中 $I_{11}(0) + I_{21}(0) > 0$, $I_{12}(0) + I_{22}(0) > 0$, 并且模型(3)至少有一个共存平衡点 $E_c = (\tilde{S}_1, \tilde{I}_{11}, \tilde{I}_{12}, \tilde{R}_{1l}, \tilde{S}_2, \tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}, \tilde{R}_{2l})$.

证 定义

$$X_0 = \{(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) \in X : I_{11} > 0, I_{12} > 0, I_{21} > 0, I_{22} > 0\},$$

$$\partial X_0 = X \setminus X_0 = \{(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) \in X : I_{11} = I_{21} = 0 \text{ 或 } I_{12} = I_{22} = 0\},$$

$$M_\partial = \{x_0 \in \partial X_0 : u(t, x_0) \in \partial X_0, \forall t \geq 0\}, M_0 = \{E_0, E_1, E_2\},$$

$$A_1 = \{x_0 \in X : I_{11} = I_{21} = 0\}, A_2 = \{x_0 \in X : I_{12} = I_{22} = 0\}.$$

首先证明 $M_\partial = A_1 \cup A_2$. 这就是为了证明如果 $x_0 \in M_\partial$, 那么 $x(t) \in A_1$ 或 $x(t) \in A_2$. 为了

不失一般性, 假设存在一个 $t_1 > 0$, 使得 $I_{11}(t_1) > 0, I_{12}(t_1) > 0$ 和 $I_{21}(t_1) = 0, I_{22}(t_1) = 0$. 注意到

$$\begin{aligned}\dot{I}_{11}(t) &\geq -(m + \gamma_1 + d_1)I_{11}, \quad \dot{I}_{12}(t) \geq -(m + \gamma_2 + d_2)I_{12}, \\ \dot{I}_{21}(t) &\geq -(m + \gamma_1 + d_1)I_{21}, \quad \dot{I}_{22}(t) \geq -(m + \gamma_2 + d_2)I_{22},\end{aligned}$$

因此如果有 $t_0 > 0$ 使得 $I_{ij}(t_0) > 0$, 那么有 $I_{ij}(t) > 0$, 对任意 $t > t_0$, 其中 $i, j = 1, 2$.

由于 $I_{11}(t_1) > 0, I_{12}(t_1) > 0$, 那么 $I_{11}(t) > 0, I_{12}(t) > 0$, 对任意 $t > t_1$. 注意到 $I_{21}(t_1) = 0$ 和 $\dot{I}_{21}(t_1) > 0$, 那么存在 δ , 使得 $I_{21}(t) > 0$, 对于 $t \in (t_1, t_1 + \delta)$. 进一步有 $I_{21}(t) > 0$ 对任意 $t > t_1$. 因此, $(I_{11}(t), I_{12}(t), I_{21}(t), I_{22}(t)) \notin \partial X_0$, 矛盾. 因此, $M_\partial = A_1 \cup A_2$. M_0 在 ∂X_0 中是孤立和非环的. 根据文献[27]中的定理4.6, 接下来只需要证明

$$W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset, \quad W^s(E_1) \cap X_0 = \emptyset, \quad W^s(E_2) \cap X_0 = \emptyset.$$

先证明 $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$. 假设存在一个解 $u_t(x_0) = u(t, x_0) \in X_0$ 使得: $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t(x_0) \in X_0 = E_0$, 对于 $t \geq 0$, 其中 $x_0 \in X_0$. 也就是说, 对于任意给定充分小的 δ , 存在 $t_2 > 0$, 使得

$$S_0 - \delta < S_i(t) < S_0 + \delta, 0 < I_{ij}(t) < \delta, 0 < R_{il}(t) < \delta, i, j = 1, 2.$$

如果 t 足够大, 有

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(t) \geq \left(\frac{\beta_1(S_0 - \delta)}{N_1} - (m + \gamma_1 + d_1) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_1 m(S_0 - \delta)}{N_2} + m \right) I_{21}, \\ \dot{I}_{12}(t) \geq \left(\frac{\beta_2(S_0 - \delta)}{N_1} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m(S_0 - \delta)}{N_2} + m \right) I_{22}, \\ \dot{I}_{21}(t) \geq \left(\frac{\beta_1(S_0 - \delta)}{N_2} - (m + \gamma_1 + d_1) \right) I_{21} + \left(\frac{\mu_1 m(S_0 - \delta)}{N_1} + m \right) I_{11}, \\ \dot{I}_{22}(t) \geq \left(\frac{\beta_2(S_0 - \delta)}{N_2} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m(S_0 - \delta)}{N_1} + m \right) I_{12}, \end{cases}$$

考虑如下比较系统

$$\begin{cases} \hat{I}_{11}(t) = \left(\frac{\beta_1(S_0 - \delta)}{N_1} - (m + \gamma_1 + d_1) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_1 m(S_0 - \delta)}{N_2} + m \right) I_{21}, \\ \hat{I}_{12}(t) = \left(\frac{\beta_2(S_0 - \delta)}{N_1} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m(S_0 - \delta)}{N_2} + m \right) I_{22}, \\ \hat{I}_{21}(t) = \left(\frac{\beta_1(S_0 - \delta)}{N_2} - (m + \gamma_1 + d_1) \right) I_{21} + \left(\frac{\mu_1 m(S_0 - \delta)}{N_1} + m \right) I_{11}, \\ \hat{I}_{22}(t) = \left(\frac{\beta_2(S_0 - \delta)}{N_2} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m(S_0 - \delta)}{N_1} + m \right) I_{12}, \end{cases}$$

由于 $\mathcal{R}_0 > 1$ 当且仅当 $\sigma(F - V) > 0$, 这里 $\sigma(F - V)$ 是矩阵 $F - V$ 的稳定模量. 因此当 $\mathcal{R}_0 > 1$, 给定充分小的 δ_1 , 使得 $\sigma(F - V - \delta D) > 0$, 对于 $0 \leq \delta \leq \delta_1$.

注意到 $F - V - \delta D$ 有一个正的特征向量与一个正的特征值 $\sigma(F - V - \delta D)$, 根据比较原理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{ij}(t) = \infty, i, j = 1, 2$, 矛盾, 因此 $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$.

接下来证明 $W^s(E_1) \cap X_0 = \emptyset$, 假设存在一个解 $u_t(x_0) \in X_0$, 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t(x_0) = E_1$, 对于 $t \geq 0$, 其中 $x_0 \in X_0$. 也就是说, 对于任意给定充分小的 δ , 存在 $t_3 > 0$, 使得

$$S^* - \delta < S_i(t), 0 < I_{12}(t) < \delta, 0 < I_{22}(t) < \delta, R^* - \delta < R_{il}(t), i = 1, 2.$$

当 t 足够大, 有

$$\begin{cases} \dot{I}_{12}(t) \geq \left(\frac{\beta_2[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} + m \right) I_{22}, \\ \dot{I}_{22}(t) \geq \left(\frac{\beta_2[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} + m \right) I_{12}, \end{cases}$$

考虑比较系统

$$\begin{cases} \dot{I}_{12}(t) = \left(\frac{\beta_2[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} + m \right) I_{22}, \\ \dot{I}_{22}(t) = \left(\frac{\beta_2[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} - (m + \gamma_2 + d_2) \right) I_{11} + \left(\frac{\mu_2 m[(S^* - \delta) + (R^* - \delta)]}{N^*} + m \right) I_{12}, \end{cases}$$

由于 $\mathcal{R}_2^1 > 1$ 当且仅当 $\sigma(F_1 - V_1) > 0$, 这里 $\sigma(F_1 - V_1)$ 是矩阵 $F_1 - V_1$ 的稳定模量, 因此当 $\mathcal{R}_2^1 > 1$, 给定充分小的 δ_2 , 使得 $\sigma(F_1 - V_1 - \delta D_1) > 0$, 对于 $0 \leq \delta \leq \delta_2$.

注意到 $F_1 - V_1 - \delta D_1$ 有一个正的特征向量与一个正的特征值 $\sigma(F_1 - V_1 - \delta D_1)$, 根据比较原理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{12}(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{22}(t) = \infty$, 矛盾, 因此 $W^s(E_1) \cap X_0 = \emptyset$.

类似可证 $W^s(E_2) \cap X_0 = \emptyset$ ($\mathcal{R}_1^2 > 1$), 因此得到了 $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ 的一致持续性.

由模型(3)的第一个方程可得 $\dot{S}_i(t) = a - \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{N_i} - \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} + m S_j - m S_i - \frac{\mu_1 m S_j I_{j1}}{N_j} - \frac{\mu_2 m S_j I_{j2}}{N_j} - d S_i \geq a - \frac{\beta_1 S_i I_{i1}}{N_i} - \frac{\beta_2 S_i I_{i2}}{N_i} - m S_i - d S_i \geq a - (\beta_1 + \beta_2 + m + d) S_i$.

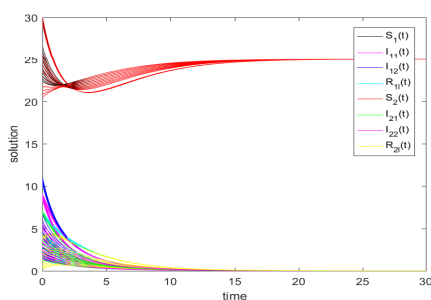
由比较原理得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} S_i \geq \frac{a}{\beta_1 + \beta_2 + m + d}$.

由模型(3)的第四个方程可得 $\dot{R}_{il}(t) = \gamma_1 I_{i1} - \frac{\beta_2 R_{il} I_{i2}}{N_i} - \frac{\mu_2 m R_{jl} I_{j2}}{N_j} + m R_{jl} - m R_{il} - d R_{il} \geq \gamma_1 I_{i1} - \frac{\beta_2 R_{il} I_{i2}}{N_i} - m R_{il} - d R_{il} \geq \gamma_1 I_{i1} - (\beta_2 + m + d) R_{il}$.

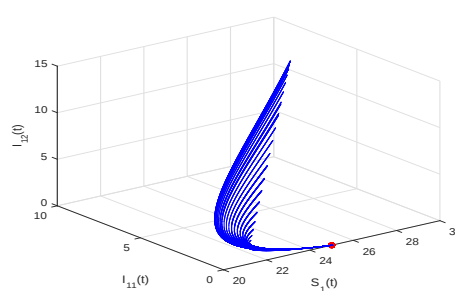
R_{il} 的一致持续性可由 I_{i1} 的一致持续性保证. 由文献[27]中的定理4.6可知, 该模型关于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致持续的, 解的最终有界性意味着 $u_t(x_0)$ 是点耗散的. 根据文献[28]中的定理2.4, 模型(3)至少有一个共存平衡点 $E_c = (\tilde{S}_1, \tilde{I}_{11}, \tilde{I}_{12}, \tilde{R}_{1l}, \tilde{S}_2, \tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}, \tilde{R}_{2l})$.

§5 数值模拟

本节主要对模型(3)的四类平衡点进行了数值模拟, 其中图1对无病平衡点 E_0 模拟, 图2对毒株1占优平衡点 E_1 模拟, 图3对毒株2占优平衡点 E_2 模拟, 图4对共存平衡点 E_c 模拟, 图a是模型全部仓室的时间序列图, 图b是三维相图.



(1a)



(1b)

图1 无病平衡点的时间序列图及三维相图

图1中初值取值如下: $(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) = (26, 5, 6, 4, 25, 4, 5, 2)$. 参数取值如下: $a = 10, \beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.4, m = 0.5, \mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0.5, d = 0.4, d_1 = 0.5, d_2 = 0.6, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.35$. 通过计算可得此时基本再生数 $\mathcal{R}_1 = 0.625, \mathcal{R}_2 = 0.6842$. 由图1可得系统(3)无病平衡点 $E_0 = (25, 0, 0, 0, 25, 0, 0, 0)$ 全局渐近稳定.

图2中初值取值如下: $(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) = (18, 13, 3, 7, 17, 14, 4, 7)$. 参数取值如下: $a = 10, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.2, m = 0.2, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.2, d = 0.3, d_1 = 0.2, d_2 = 0.3, \gamma_1 =$

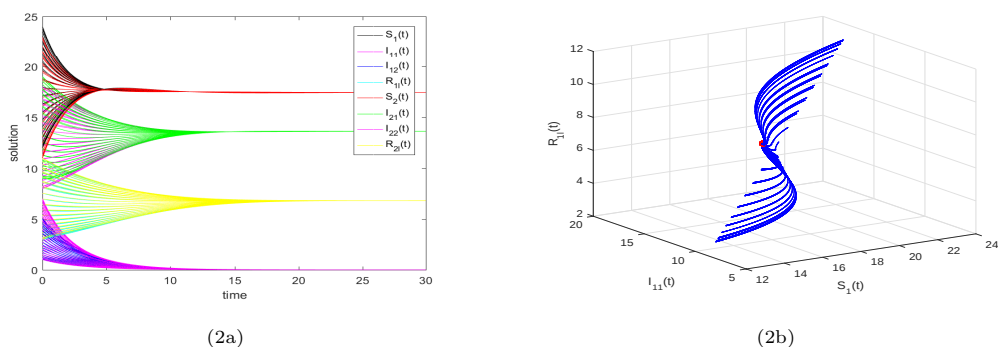


图2 毒株1占优平衡点的时间序列图及三维相图

0.15, $\gamma_2 = 0.2$. 通过计算可得此时基本再生数 $\mathcal{R}_1 = 2.1714$, $\mathcal{R}_2 = 0.48$. 由图2可得系统(3)毒株1占优平衡点 $E_1 = (17.4419, 13.6213, 0, 6.8106, 17.4419, 13.6213, 0, 6.8106)$ 全局渐近稳定.

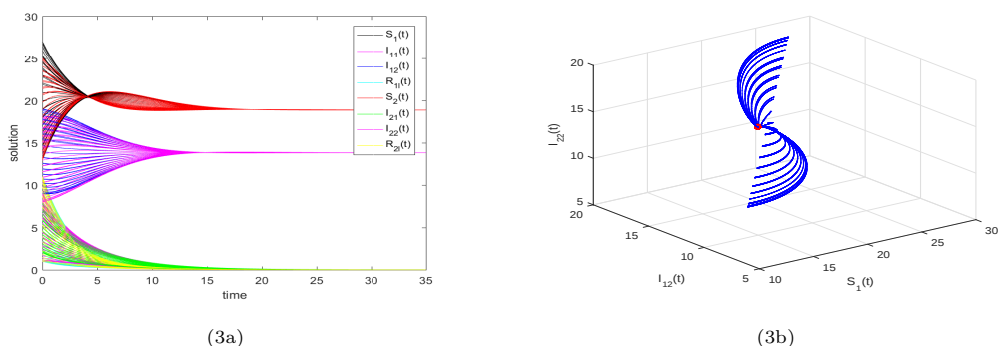
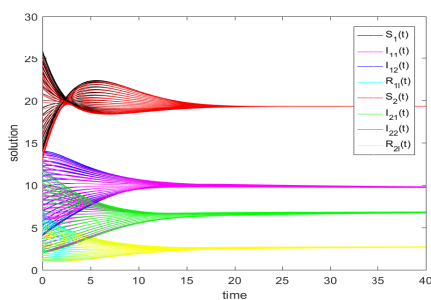


图3 毒株2占优平衡点的时间序列图及三维相图

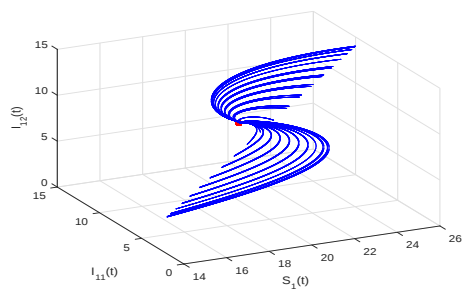
图3中初值取值如下: $(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) = (20, 5, 14, 6, 19, 5, 13, 6)$. 参数取值如下: $a = 10, \beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.7, m = 0.2, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.4, d = 0.2, d_1 = 0.25, d_2 = 0.3, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.15$. 通过计算可得此时基本再生数 $\mathcal{R}_1 = 0.6857$, $\mathcal{R}_2 = 1.7333$. 由图3可得系统(3) 毒株2占优平衡点 $E_2 = (18.8679, 0, 13.8365, 0, 18.8679, 0, 13.8365, 0)$ 全局渐近稳定.

图4中初值取值如下: $(S_1, I_{11}, I_{12}, R_{1l}, S_2, I_{21}, I_{22}, R_{2l}) = (20, 6, 9, 4, 19, 7, 10, 3)$. 参数取值如下: $a = 10, \beta_1 = 0.75, \beta_2 = 0.65, m = 0.25, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.2, d = 0.2, d_1 = 0.25, d_2 = 0.25, \gamma_1 = 0.15, \gamma_2 = 0.15$. 通过计算可得此时基本再生数 $\mathcal{R}_1 = 2$, $\mathcal{R}_2 = 1.75$. 由图4可得系统(3)共存平衡点 $E_c = (19.31, 6.897, 9.655, 2.677, 19.31, 6.897, 9.655, 2.677)$ 全局渐近稳定. 且满足注3中的猜测.

基本再生数作为疾病传播的阈值起着重要作用. 图5基于拉丁超立方抽样(LHS)和偏秩相关系数(PRCC)分析了模型对参数的不确定性和敏感性, 参数范围见表1. 从图5可以看出, 斑块内感染率 β_i , 迁移途中感染率 μ_i , 迁移率 m 和基本再生数呈正相关, 感染者的恢复率 γ_i , 感染者的死亡率 d_i 和基本再生数呈负相关.



(4a)

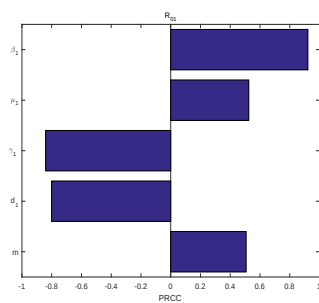


(4b)

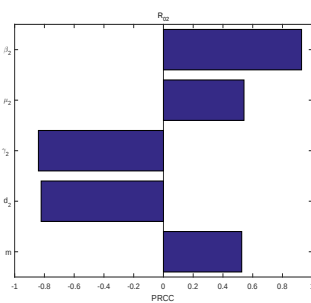
图4 共存平衡点的时间序列图及三维相图

表1 参数的基线值和范围

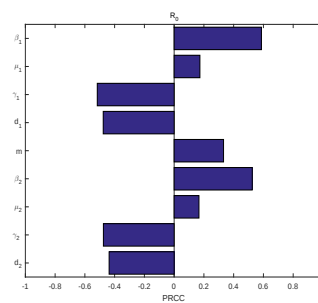
参数	基线值(范围)	参数	基线值(范围)
β_1	0.3 (0.01 – 0.9)	β_2	0.3 (0.01 – 0.8)
μ_1	0.2 (0.01 – 0.8)	μ_2	0.2 (0.01 – 0.7)
γ_1	0.15 (0.01 – 0.7)	γ_2	0.2 (0.01 – 0.65)
d_1	0.2 (0.01 – 0.6)	d_2	0.15 (0.01 – 0.6)
m	0.1 (0.01 – 0.6)		



(5a)



(5b)



(5c)

图5 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0$ 参数的敏感性分析

§6 结论

宿主迁移和病原体变异对传染病的传播和持续存在起着重要作用, 宿主迁移使病原体能够侵入新的地区, 病原体变异产生新的毒株使疾病持续存在. 本文考虑了一类具有交叉免疫和迁移途中感染的双毒株斑块扩散模型, 计算了模型的无病平衡点 E_0 , 毒株1占优平衡点 E_1 , 毒株2占优平衡点 E_2 . 得到了毒株1的基本再生数 $\mathcal{R}_1$, 毒株2的基本再生数 $\mathcal{R}_2$, 定义了系统的基本再生数 $\mathcal{R}_0$. 以基本再生数和入侵再生数为阈值, 证明了 E_0, E_1, E_2 的局部和全局渐近稳定性, 并且对系统的四类平衡点进行了数值模拟. 得到了以下结论.

(1) 从两个毒株的基本再生数 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ 的表达形式及图5, 可以看出迁移途中产生的感染会加剧疾病的传播, 对两种毒株都会产生影响, 由迁移所产生的感染可能会导致斑块内疾病爆发.

(2) 由于考虑了交叉免疫, 两种毒株间存在差异, 系统在毒株占优平衡点处稳定的条件也有所不同, 但两种毒株仍然满足竞争排斥原理.

(3) 当迁移途中的感染率和迁移速率的乘积较小时, 不会影响系统平衡点的稳定性. 但迁移途中的感染率和迁移速率的乘积较大时, 会影响系统的平衡点的稳定性. 因此, 采取适当的措施控制迁移速率和迁移途中的感染率有助于控制疾病在斑块内爆发.

参考文献:

- [1] Lee G Q, Reddy K, Einkauff K B, et al. HIV-1 DNA sequence diversity and evolution during acute subtype C infection[J]. *Nature Communications*, 2019, 10(1): 27-37.
- [2] Koelle K, Martin M A, Antia R, et al. The changing epidemiology of SARS-CoV-2[J]. *Science*, 2022, 375(6585): 1116-1121.
- [3] Chinazzi M, Davis J T, Ajelli M, et al. The effect of travel restrictions on the spread of the 2019 novel coronavirus (COVID-19) outbreak[J]. *Science*, 2020, 368(6489): 395-400.
- [4] Kraemer M U G, Gutierrez B, et al. The effect of human mobility and control measures on the COVID-19 epidemic in China[J]. *Science*, 2020, 368(6490): 493-497.
- [5] Balmer O, Tanner M. Prevalence and implications of multiple-strain infections[J]. *The Lancet Infectious Diseases*, 2011, 11 (11): 868-878.
- [6] Levin S A. Community equilibria and stability, and an extension of the competitive exclusion principle[J]. *The American Naturalist*, 1970, 104(939): 413-423.
- [7] Bremermann H J, Thieme H R. A competitive exclusion principle for pathogen virulence[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1989, 27(2): 179-190.
- [8] Castillo-Chavez C, Huang Wenzhang, et al. Competitive exclusion in gonorrhea models and other sexually transmitted diseases[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1996, 56(2): 494-508.
- [9] Gao Daozhou, Porco T C, Ruan Shigui. Coinfection dynamics of two diseases in a single host population[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 442(1): 171-188.
- [10] Pell B, Brozak S, Kuang Yang, et al. The emergence of a virus variant: dynamics of a competition model with cross-immunity time-delay validated by wastewater surveillance data for COVID-19[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2023, 86(5): 1-34.
- [11] Xue Ling, Zhang Hongyu, et al. Transmission dynamics of multi-strain dengue virus with cross-immunity[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 392: 125742.
- [12] LeJeune L, Browne C. Effect of cross-immunity in a two-strain cholera model with aquatic component[J]. *Mathematical Biosciences*, 2023, 365: 109086.
- [13] Goel S, Bhatia S K, Tripathi J P, et al. SIRC epidemic model with cross-immunity and multiple time delays[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2023, 87(3): 42.
- [14] Cui Jingan, Takeuchi Y, Saito Y. Spreading disease with transport-related infection[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2006, 239(3): 376-390.
- [15] Takeuchi Y, Liu Xianning, Cui Jingan. Global dynamics of SIS models with transport-related infection[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 329(2): 1460-1471.
- [16] Sun Chengjun, Yang Wei, Arino J, et al. Effect of media-induced social distancing on disease transmission in a two patch setting[J]. *Mathematical Biosciences*, 2011, 230(2): 87-95.
- [17] Liu Junli, Bai Zhenguo, Zhang Tailei. A periodic two-patch SIS model with time delay and transport-related infection[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2018, 437(6585): 36-44.
- [18] Gao Daozhou. Travel frequency and infectious diseases[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2019, 79(4): 1581-1606.

- [19] Gao Daozhou. How does dispersal affect the infection size?[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2020, 80(5): 2144-2169.
- [20] Gao Daozhou, Munganga J M W, Van Den Driessche P, et al. Effects of asymptomatic infections on the spatial spread of infectious diseases[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2022, 82(3): 899-923.
- [21] Lu Min, Gao Daozhou, Huang Jicai, et al. Relative prevalence-based dispersal in an epidemic patch model[J]. Journal of Mathematical Biology, 2023, 86(4): 1-35.
- [22] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to Functional Differential Equations[M]. New York: Springer, 1993.
- [23] Van Den Driessche P, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [24] Sastry S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control[M]. Berlin: Springer Science Business Media, 2013.
- [25] LaSalle J P. The Stability of Dynamical Systems, in: Regional Conference Series in Applied Mathematics[M]. Philadelphia: SIAM, 1976.
- [26] Castillo-Chavez C, Thieme H R. Mathematical population dynamics: analysis of heterogeneity[J]. Theory of Epidemics, 1995, 1: 33-50.
- [27] Thieme H R. Persistence under relaxed point-dissipativity (with application to an endemic model)[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1993, 24(2): 407-435.
- [28] Zhao Xiaoqiang. Uniform persistence and periodic coexistence states in infinite-dimensional periodic semiflows with applications[J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 1995, 3(4): 473-495.

Study on two-strain and two-patch epidemic model with cross-immunity and transport-related infection

GAO Shu-kun^{1,2}, WANG Wen-cong^{1,2}, LIN Cai-hong^{1,2}, ZHANG Long^{1,2}

- (1. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830017, China;
- 2. The Key Laboratory of Applied Mathematics of Xinjiang Uygur Autonomous Region, Urumqi 830017, China)

Abstract: Host migration and pathogen variation play important roles in the distribution and persistence of infectious diseases. This paper establishes a two-strain and two-patch epidemic model with cross-immunity and transport-related infection, and studies the impact of two strains spreading between two patches on disease transmission. First, the positivity and boundedness of the system are proved. The basic reproduction numbers $\mathcal{R}_1$ and $\mathcal{R}_2$ for strains 1 and 2, and the basic reproduction number $\mathcal{R}_0$ of the system are established, by which we find that the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_0 < 1$. Under some given conditions, we find that the strain 1 dominant equilibrium E_1 is globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_1 > 1$ and $\mathcal{R}_2 < 1$, and the strain 2 dominant equilibrium E_2 is globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_1 < 1$ and $\mathcal{R}_2 > 1$, and demonstrated uniform persistence of the disease. Finally, some numerical examples are given to illustrate the theoretical results.

Keywords: cross-immunity; transport-related infection; two strains; two patches; stability

MR Subject Classification: 39A05; 34B10