

周期变化区域上粪-口途径传染病 传播模型的动力学

张 寒, 朱 敏*

(安徽师范大学 数学与统计学院, 安徽芜湖 241000)

摘 要: 与传统固定区域中的粪-口途径传染病传播模型不同, 该模型是建立在周期性变化的区域中, 旨在探讨空间区域的周期性变化对该传染病的影响. 借助于下一代感染算子及特征值等方法, 分析该模型的基本再生数 R_0 的相关性质, 并比较其与固定区域中基本再生数 $\widehat{R}_0$ 的关系. 该模型在周期变化区域上的动力学表明: 当 $R_0 > 1$ 时, 在一定条件下该模型具有唯一的全局渐近稳定的正T-周期解; 当 $R_0 \leq 1$ 时, 该模型仅有零解并且是全局渐近稳定的. 最后数值模拟进一步表明较大的区域演化率 $\rho(t)$ 会增加该病毒传播的风险.

关键词: 粪-口途径传染病模型; 周期变化区域; 基本再生数; 周期解

中图分类号: O175.14

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0209-18

§1 引 言

人类社会的发展至今, 传染性疾病间断性地暴发威胁人类社会公共健康和国家安全, 例如新型冠状病毒肺炎(COVID-19)的全球大流行极大改变了人们的生活方式^[1]. 据世界卫生组织不完全统计, 2019年全球5540万死亡病例中大约1440万死于传染性疾病, 约占死亡总人口的26%^[2]. 传染性疾病可以通过蚊虫、飞沫以及排泄物等媒介进行传播(见[3-5]及其中的参考文献), 本文所研究的粪-口途径传染病主要是以排泄物作为媒介进行传播. 粪-口途径传播是指病毒和细菌随着粪便排出体外污染水源和食物, 随后又进入人体消化道感染人的过程, 所以此类传播也叫做消化道传播. 甲肝、霍乱、伤寒、诺如病毒胃肠炎、蛔虫病和弓形虫感染症等都是比较常见的粪-口途径传染病(见[6-7]及其中的参考文献). 此类疾病的传播通常与污染的水源有很大的关系, 通过对水源的治理能有效地阻止该类疾病的传播, 但是在相对落后的地区由于缺乏对水源的保护导致水源被污染, 最终使得此类传染病更容易在这些地区暴发和传播. 例如2017年8月也门暴发了霍乱疫情, 每天约有5000例水源传播新发病例, 随后4个月内的感染人数甚至超过了50万, 并且

收稿日期: 2023-12-13 修回日期: 2024-06-18

*通讯作者, Email: min_zhuly@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(11801009); 安徽省自然科学基金面上项目(2208085MA08)

超过1975人死亡^[8]. 因此, 不仅要在医学上提高治疗粪-口途径传染病的治疗水平, 还要通过研究该传染病的传播动力学来寻找病毒传播的规律, 降低疾病传播的风险.

自Kermack和McKendrick提出了最具影响力的SIR和SIS仓室模型以来, 通过数学模型研究传染病的传播规律受到了很多学者的关注^[9]. 根据粪-口途径传染病中病原体的存在方式和传播特点, Capasso和Maddalena^[6]研究欧洲地中海地区霍乱传染病的传播规律时提出了传染病传播模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 - a_{11} u_1 + a_{12} u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 - a_{22} u_2 + g(u_1). \end{cases} \quad (1)$$

在上述模型中, a_{11} , a_{12} 和 a_{22} 均为正常数, $u_1(x, t)$ 和 $u_2(x, t)$ 分别表示为细菌种群和感染人群在有界区域 Ω 内位置 x 和时刻 t 的空间密度. d_1 和 d_2 均为大于或等于0的扩散系数. 术语 $-a_{11}u_1$ 描述的是细菌种群的自然死亡率, $\frac{1}{a_{11}}$ 表示细菌种群在自然环境中的平均寿命. 感染人群对细菌种群生长速率的促进作用由术语 $a_{12}u_2$ 表示, 而 $-a_{22}u_2$ 描述的是由于传染病传染性的平均持续时间有限所引起的感染人群的自然衰减. 最后的函数项 $g(u_1)$ 是指在疾病传播过程中易感人群总数不变的前提下人类的感染率.

此外, 文献[6]假设了函数 $g(\cdot) \in C^2(\mathbf{R})$, 且满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{g(z)}{z} < \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}$ 和 $\frac{g(z)}{z}$ 关于 z 单调递减, 以及对 $\forall z \geq 0$ 都有 $g'(z) > 0$ 和 $g(0) = 0$. 随后, 该文研究了不同的边界条件下反应-扩散模型解的长期行为. 对于齐次Neumann边界条件, 文引入了一个阈值参数 θ 并得到了如下结论: 若 $\theta < 1$, 则传染病最终会消失; 若 $\theta > 1$, 则传染病最终会趋向一个正稳定态并形成地方病. 对于Robin边界条件, 文又引入了两个新的阈值参数 θ_m 和 θ_M , 并得到了如下结论: 若 $\theta_m < 1$, 则传染病最终会消失; 若 $\theta_M > 1$, 则传染病最终会形成地方病.

近些年来, 一些文献对粪-口途径传染病的传播动力学进行了理论研究. 文献[10]将自由边界引入到具有反应-扩散结构的粪-口模型中, 研究了病毒的区域扩张能力对该流行病传播的影响; 文献[11]研究了具有非局部扩散项和双稳态现象的非线性粪-口模型, 给出了熄灭波型整体解的存在唯一性、Lyapunov稳定性以及整体解的一个导数估计; 文献[12]对一种带有时滞的粪-口模型的整体行为进行探讨, 得到非平凡稳态解的持久性、存在唯一性和吸引力.

回顾模型(1), 其中 $a_{12}u_2$ 项体现了细菌增长的线性发生率, 为了更符合现实中的实际情况, 文献[13]考虑了非线性发生率, 提出了如下的反应-扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 - \alpha u_1 + h(u_2), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 - \beta u_2 + g(u_1), & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

模型(2)与(1)相比, 符号 α 和 β 各自与 a_{11} 和 a_{22} 意义相同, 其它相同符号所代表的含义相同, 不同的是模型(2)中的函数项 $h(u_2)$ 描述的是感染人群对细菌种群增长率的非线性促进作用.

另外, 大多数反应-扩散传染病模型都是建立在固定区域上的(见[12-16]及其中的参考文献), 也就是生物种群的栖息地不会随着时间而发生改变. 但在现实中, 生物种群在自然环境中的栖息地并不是一成不变的, 很多种群的栖息地随着时间不断变化, 例如文献[17]中描述了滨海水鸟的栖息地受气候变化和人类活动的影响不断减小甚至消失这一现象. 迄今为止, 已经有一些学者研究了变化区域上反应-扩散传染病模型解的长期行为^[18-22], 例如文献[19]对连续演化域上反应-扩散模型的稳定性结果进行分析, 得到了由交错扩散产生的不稳定性条件; 文献[20]研究了 n 维各

向同性增长域上的一类反应-扩散方程模型, 给出了该模型解的渐近行为.

降雨量、温度和植被覆盖等因素直接影响了生物种群栖息地的变化, 气候变化具有明显的周期特征, 所以生物种群栖息地环境也会随着气候做周期性变化. 例如, 文献[22]研究的就是 n 维各向同性周期演化域上的扩散Logistic方程, 分析了区域演化率对物种持久性的影响.

考虑到粪-口途径传染病在传播过程中病原体生存的环境也会呈现周期变化, 本文将在模型(2)的基础上建立周期变化区域上传染病模型, 并探究区域的周期性变化对传染病的影响. 如同文献[23], 假设 $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 是随时间 t 不断变化的单连通变化区域, $\partial\Omega(t)$ 为区域边界, $\partial/\partial\eta$ 是 $\partial\Omega(t)$ 上的外法向导数. 对于任意的 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega(t)$, 假设在位置 $x(t)$ 和时刻 t 处病原体和感染人群的密度分别为 $u_1(x(t), t)$ 和 $u_2(x(t), t)$. 此外, 区域 $\Omega(t)$ 的变化会产生了一个流速场 $\mathbf{a} = \dot{x}(t)$, 所以还需要在区域 $\Omega(t)$ 上分别引入稀释项 $u_1(\nabla \cdot \mathbf{a})$, $u_2(\nabla \cdot \mathbf{a})$ 和对流项 $\mathbf{a} \cdot \nabla u_1$, $\mathbf{a} \cdot \nabla u_2$, 稀释项是由空间局部区域体积膨胀所引起的, 而对流项表示由流速 $\mathbf{a}$ 决定的物质在区域 $\Omega(t)$ 周围传输. 受文献[20-22]建模思想的启发, 根据质量守恒定律、Reynold输运定理和Fick定律^[23-24], 构建了如下变化区域 $\Omega(t)$ 上的粪-口模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \nabla u_1 = d_1 \nabla^2 u_1 - \alpha(t)u_1 + h(u_2), & x \in \Omega(t), t > 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \nabla u_2 = d_2 \nabla^2 u_2 - \beta(t)u_2 + g(u_1), & x \in \Omega(t), t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

并伴随边界条件

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x(t), t) = \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x(t), t) = 0, \quad x \in \partial\Omega(t), t > 0, \quad (4)$$

和初始条件

$$u_1(x, 0) = u_{1,0}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{2,0}(x), \quad x \in \Omega(t). \quad (5)$$

在一般情况下, 由于变化区域 $\Omega(t)$ 的不确定性导致分析问题(3)-(5)的动力学具有很大困难, 于是从Lagrangian坐标观点^[24]进行研究. 假设 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是固定区域 $\Omega(0)$ 上的笛卡尔坐标, $\Omega(t)$ 的演化是各向同性的且为 T -周期的, 即 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \rho(t)y, \quad y \in \Omega(0), t \geq 0, \quad (6)$$

其中 $\rho(t) \in C^1(\mathbf{R})$ 称为区域演化率, 并满足 $\rho(t) = \rho(t+T)$ 和 $\rho(0) = 1$. 同时定义

$$u_1(x(t), t) = w_1(y, t), \quad u_2(x(t), t) = w_2(y, t), \quad (7)$$

利用(6)-(7)可直接计算得如下结果

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{x}(t) = \dot{\rho}(t)y = \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}x(t), \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \nabla u_1 \cdot \mathbf{a}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla u_2 \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{n\dot{\rho}}{\rho}, \quad \Delta u_1 = \frac{1}{\rho^2(t)}\Delta w_1, \quad \Delta u_2 = \frac{1}{\rho^2(t)}\Delta w_2. \end{aligned}$$

将上述结果代入模型(3)-(5), 整理后得到固定区域上的传播模型

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)}\Delta w_1 = h(w_2) - \alpha(t)w_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)}\Delta w_2 = g(w_1) - \beta(t)w_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ w_1(y, 0) = u_{1,0}(x(0)) := w_{1,0}(y), \quad w_2(y, 0) = u_{2,0}(x(0)) := w_{2,0}(y), & y \in \Omega(0). \end{cases} \quad (8)$$

根据文献[6]中关于函数 $g(\cdot)$ 的假设, 假设函数 $h(\cdot) \in C^2(\mathbf{R})$ 和 T -周期函数 $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^1(\mathbf{R})$, 且以下条件成立.

(J1) 对 $\forall z \geq 0$, 均有 $g'(z) > 0$, $h'(z) > 0$ 和 $g(0) = h(0) = 0$.

(J2) $\frac{h(z)}{z}$, $\frac{g(z)}{z}$ 关于 z 单调递减, 以及

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{h(z)}{z} < \frac{(\alpha^m - nL)(\beta^m - nL)}{g'(0)}, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{g(z)}{z} < \frac{(\alpha^m - nL)(\beta^m - nL)}{h'(0)},$$

其中

$$\alpha^m = \min_{t \in [0, T]} \alpha(t), \quad \beta^m = \min_{t \in [0, T]} \beta(t), \quad L = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right| < \frac{1}{n} \min\{\alpha^m, \beta^m\}.$$

在本文中, 将重点关注周期演化率 $\rho(t)$ 对问题(8)的动力学影响, 以此来揭示区域的周期变化对疾病传播的影响. 其余内容安排如下: §2 探讨问题(8)的基本再生数 R_0 及其相关的特征值问题; §3 分析不同阈值条件下问题(8)稳定态的相关动力学; $\rho(t) \equiv 1$ 时相关的动力学结果进一步在 §4 中呈现, §5 进行一些数值模拟, 并给出了传染病动力学解释.

§2 基本再生数

在传染病动力学中, 基本再生数是一个非常重要的概念, 它是判断疾病传播或消退的一种关键阈值. 基本再生数是指在发病初期, 所有人均为易感者时, 一个病人在平均患病期内所传染的人数^[24]. 对于一般的常微分传染病模型, 基本再生数可以由下一代矩阵法^[25]算出, 而对于反应-扩散传染病模型, 可以利用下一代感染算子的谱半径或者相关的主特征值问题^[26]求得.

下面探究问题(8)的基本再生数, 首先将问题(8)在无病平衡点 $(0, 0)$ 处线性化得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - D(t)\Delta \kappa = P\kappa - Q(t)\kappa, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\kappa = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{\rho^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{\rho^2(t)} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & h'(0) \\ g'(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} & 0 \\ 0 & \beta(t) + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \end{pmatrix},$$

初始条件与问题(8)一致.

考虑到(8)的相关系数均为周期函数, 于是选取 C_T , 它是由 $\mathbf{R}$ 映射到 $C(\overline{\Omega}(0), \mathbf{R})$ 上的所有 T -周期的且连续的函数组成的一个有序的 Banach 空间, 并定义正锥 $C_T^+ := \{\psi \in C_T : \psi(t)y \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}, y \in \overline{\Omega}(0)\}$ 和最大模 $\|\cdot\|$, 记 $\tau(y, t) := \tau(t)(y)$, $\forall \tau \in C_T^+$. 同时, 设 $K(t, \varsigma)$ 为系统

$$\begin{cases} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - D(t)\Delta \kappa = -Q(t)\kappa, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0 \end{cases}$$

的演化算子. 根据标准半群理论^[27], 存在正常数 N 和 c_0 使得

$$\|K(t, \varsigma)\| \leq Ne^{-c_0(t-\varsigma)}, \quad \forall t > \varsigma, t, \varsigma \in \mathbf{R},$$

假设 $\xi = (\phi, \psi) \in C_T \times C_T$ 是病原体 w_1 和感染人群 w_2 在空间 $y \in \Omega(0)$ 和时刻 ς 处的密度分布, 根据文献^[26, 28], 线性算子 $\vartheta : C_T \times C_T \mapsto C_T \times C_T$, 具体表示为

$$\vartheta(\xi)(t) := \int_{-\infty}^t P \cdot K(t, \varsigma) \xi(\cdot, \varsigma) d\varsigma = \int_0^\infty P \cdot K(t, t-a) \xi(\cdot, t-a) da,$$

其被称为下一代感染算子, 显然 ϑ 在 $C_T \times C_T$ 中是正的, 紧的和连续的. 再由文献[28], 定义算子 ϑ 的谱半径 $R_0 = r(\vartheta)$ 为问题(8)的基本再生数.

根据文献[29]中的定理3.7, 定理3.8和命题3.9, 有如下结果.

引理2.1 (i) $R_0 = \omega_0$, 其中 ω_0 是下面周期抛物问题的主特征值.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \phi_1 = \frac{h'(0)}{\omega} \phi_2 - \alpha(t) \phi_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \phi_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \phi_2 = \frac{g'(0)}{\omega} \phi_1 - \beta(t) \phi_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \phi_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \phi_1(y, 0) = \phi_1(y, T), \phi_2(y, 0) = \phi_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $(\phi_1, \phi_2) \in C_T \times C_T$ 是相应特征函数对, 在 $\Omega(0) \times (0, \infty)$ 上满足 $\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$.

(ii) $\text{sign}(1 - R_0) = \text{sign}\lambda_0$, λ_0 是下面周期抛物问题的主特征值.

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \psi_1 = h'(0) \psi_2 - \alpha(t) \psi_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \psi_1 + \lambda \psi_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \psi_2 = g'(0) \psi_1 - \beta(t) \psi_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \psi_2 + \lambda \psi_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \psi_1(y, 0) = \psi_1(y, T), \psi_2(y, 0) = \psi_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $(\psi_1, \psi_2) \in C_T \times C_T$ 是相应特征函数对, 在 $\Omega(0) \times (0, \infty)$ 上满足 $\psi_1 > 0, \psi_2 > 0$.

进一步给出问题(8)的基本再生数 R_0 的一些性质.

定理2.1 定义 $\bar{\alpha} := \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t) dt, \bar{\beta} := \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t) dt$, 则有

$$R_0 \geq \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}, \quad (12)$$

特别当 $\alpha(t) \equiv \alpha^*$ 和 $\beta(t) \equiv \beta^*$ 均为常数时, 则

$$R_0 \geq \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\alpha^*\beta^*}}. \quad (13)$$

证 考虑到特征值问题(10)是齐次Neumann边界条件, 于是假设

$$\phi_1(y, t) = p(t), \phi_2(y, t) = q(t), \quad y \in \Omega(0), t > 0,$$

其中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 分别满足 $p(t) = p(t+T) > 0, q(t) = q(t+T) > 0, t \geq 0$. 将 $\phi_1(y, t)$ 和 $\phi_2(y, t)$ 代入问题(10)的前两个方程得

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = \frac{h'(0)}{R_0} q(t) - \alpha(t) p(t) - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} p(t), \\ \dot{q}(t) = \frac{g'(0)}{R_0} p(t) - \beta(t) q(t) - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} q(t), \end{cases} \quad (14)$$

由于 $\rho(t)$ 和 $\dot{\rho}(t)$ 是连续的周期函数, 那么(14)就等价于

$$\begin{cases} \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{h'(0)}{R_0} \frac{q(t)}{p(t)} - \alpha(t) - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}, \\ \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{g'(0)}{R_0} \frac{p(t)}{q(t)} - \beta(t) - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}. \end{cases} \quad (15)$$

进一步, 在(15)的两端分别取 $[0, T]$ 上的积分平均值得到

$$\begin{cases} \frac{1}{R_0} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T h'(0) \frac{q(t)}{p(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t) dt, \\ \frac{1}{R_0} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g'(0) \frac{p(t)}{q(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t) dt, \end{cases} \quad (16)$$

再将(16)两边对应相乘, 即

$$\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T h'(0) \frac{q(t)}{p(t)} dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g'(0) \frac{p(t)}{q(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t) dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t) dt, \quad (17)$$

应用Hölder不等式, 有

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T h'(0) \frac{q(t)}{p(t)} dt\right) \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T g'(0) \frac{p(t)}{q(t)} dt\right) \geq h'(0)g'(0), \quad (18)$$

结合(17)-(18)易得(12). 最后, 当 $\alpha(t) \equiv \alpha^*$ 和 $\beta(t) \equiv \beta^*$ 均为常数时, 代入(12)可以直接得到(13).

§3 周期演化区域上的动力学

本节利用上下解方法^[30]探究问题(8)在周期演化区域上的动力学行为, 首先考虑(8)的稳态问题

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta w_1 = h(w_2) - \alpha(t)w_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta w_2 = g(w_1) - \beta(t)w_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ w_1(y, 0) = w_1(y, T), w_2(y, 0) = w_2(y, T), & y \in \Omega(0). \end{cases} \quad (19)$$

首先结合文献[24]给出辅助周期问题(19)的上下解定义.

定义3.1 设 $((\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t), (\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t)) \in C^{2,1}(\Omega(0) \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega}(0) \times [0, \infty))$ 是一对非负函数, 如果满足 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \geq (\hat{w}_1, \hat{w}_2) \geq (0, 0)$ 且下列关系成立

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \tilde{w}_1 \geq h(\tilde{w}_2) - \alpha(t)\tilde{w}_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\tilde{w}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \tilde{w}_2 \geq g(\tilde{w}_1) - \beta(t)\tilde{w}_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\tilde{w}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \hat{w}_1 \leq h(\hat{w}_2) - \alpha(t)\hat{w}_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{w}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \hat{w}_2 \leq g(\hat{w}_1) - \beta(t)\hat{w}_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{w}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \eta} \geq 0 = \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial \eta} \geq 0 = \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial \eta}, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \tilde{w}_1(y, 0) \geq \tilde{w}_1(y, T), \tilde{w}_2(y, 0) \geq \tilde{w}_2(y, T), & y \in \Omega(0), \\ \hat{w}_1(y, 0) \leq \hat{w}_1(y, T), \hat{w}_2(y, 0) \leq \hat{w}_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (20)$$

则称 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t)$ 和 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t)$ 为问题(19)的一对有序上下解.

利用问题(19)的上下解定义, 下面给出问题(19)周期解的存在性.

定理3.1 如果 $R_0 > 1$, 那么问题(19)至少存在一个正 T -周期解 $(w_1(y, t), w_2(y, t))$.

证 假设 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t) = (K_1, K_2)$ 是问题(19)的一个上解, K_1 和 K_2 为待定的常数. 将其代

入(20)中的第一式和第二式得

$$\begin{cases} h(K_2) - \alpha(t)K_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}K_1 \leq 0, & t > 0, \\ g(K_1) - \beta(t)K_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}K_2 \leq 0, & t > 0. \end{cases} \quad (21)$$

根据条件(J1)和(J2)可知 $h(K_2) < h'(0)K_2$, $g(K_1) < g'(0)K_1$. 因此只需要不等式

$$\begin{cases} h'(0)K_2 - \alpha^m K_1 + nLK_1 \leq 0, \\ g'(0)K_1 - \beta^m K_2 + nLK_2 \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

成立, 那么(21)自然成立. 此外, 不等式(22)又等价于

$$\frac{g(K_1)}{K_1} < \frac{(\beta^m - nL)K_2}{K_1} \leq \frac{(\alpha^m - nL)(\beta^m - nL)}{h'(0)}, \quad (23)$$

再次根据条件(J2)可知存在 $K^* > 0$, 当 $z \geq K^*$ 时

$$\frac{g(z)}{z} < \frac{(\alpha^m - nL)(\beta^m - nL)}{h'(0)}, \quad \frac{h(z)}{z} < \frac{(\alpha^m - nL)(\beta^m - nL)}{g'(0)}$$

均成立. 令 $K_1 = K^*$, $K_2 = \frac{(\alpha^m - nL)}{h'(0)}K^*$, 则 (K_1, K_2) 满足不等式(23), 即满足不等式(21). 因此 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t) = (K_1, K_2)$ 是问题(19)的一个上解.

进一步, 令 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t) = (\sigma\phi_1, \sigma\phi_2)(y, t)$ 为问题(19)的一个下解, 其中 (ϕ_1, ϕ_2) 是问题(10)的主特征函数对, σ 为待定常数. 根据 $R_0 > 1$ 和条件

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{h(\sigma\phi_2)}{\sigma} = h'(0)\phi_2, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{g(\sigma\phi_1)}{\sigma} = g'(0)\phi_1$$

可知, 当 σ 充分小时有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \hat{w}_1 - h(\hat{w}_2) + \alpha(t)\hat{w}_1 + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{w}_1 = \\ & \sigma \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \sigma \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \phi_1 - h(\sigma\phi_2) + \sigma\alpha(t)\phi_1 + \sigma \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\phi_1 = \\ & \sigma \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \phi_1 - \frac{h(\sigma\phi_2)}{\sigma} + \alpha(t)\phi_1 + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\phi_1 \right) = \sigma \left(\frac{h'(0)}{R_0}\phi_2 - \frac{h(\sigma\phi_2)}{\sigma} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

类似可知

$$\frac{\partial \hat{w}_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \hat{w}_2 - g(\hat{w}_1) + \beta(t)\hat{w}_2 + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{w}_2 \leq 0.$$

因此 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t) = (\sigma\phi_1, \sigma\phi_2)(y, t)$ 为问题(19)的一个下解.

显然 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t)$ 和 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t)$ 均满足问题(20)的初边值条件, 那么函数对

$$(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t) = (K_1, K_2), \quad (\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, t) = (\sigma\phi_1, \sigma\phi_2)(y, t)$$

是问题(19)的一对有序上下解, 应用文献[30]中的定理2.1可推断出(19)至少有一个正T-周期解.

定理3.2 如果 $R_0 \leq 1$, 那么问题(19)无正T-周期解.

证 假设结果不成立, 则问题(19)至少存在一个正T-周期解, 记为 $(w_1^+(y, t), w_2^+(y, t))$, 将其解代入问题(19)可得

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1^+}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta w_1^+ = h(w_2^+) - \alpha(t)w_1^+ - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_1^+, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_2^+}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta w_2^+ = g(w_1^+) - \beta(t)w_2^+ - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}w_2^+, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_1^+}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2^+}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ w_1^+(y, 0) = w_1^+(y, T), \quad w_2^+(y, 0) = w_2^+(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (24)$$

根据条件(J1)和(J2)可知 $h'(0)w_2^+ > h(w_2^+)$ 以及 $g'(0)w_1^+ > g(w_1^+)$, 由(24)进一步可得

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1^+}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta w_1^+ < h'(0)w_2^+ - \alpha(t)w_1^+ - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} w_1^+, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_2^+}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta w_2^+ < g'(0)w_1^+ - \beta(t)w_2^+ - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} w_2^+, & y \in \Omega(0), t > 0, \end{cases} \quad (25)$$

初边值条件与(24)一致. 注意到问题(11)中的主特征值 λ_0 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \psi_1 = h'(0)\psi_2 - \alpha(t)\psi_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \psi_1 + \lambda_0 \psi_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \psi_2 = g'(0)\psi_1 - \beta(t)\psi_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \psi_2 + \lambda_0 \psi_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \end{cases} \quad (26)$$

初边值条件与(11)一致. 对比(25)与(26)可知 $\lambda_0 < 0$, 回顾引理2.1中的(ii)可得 $R_0 > 1$, 这与 $R_0 \leq 1$ 相矛盾, 故得证.

进一步利用单调迭代方法来获得问题(19)的真实正T-周期解. 记

$$S = \{(w_1, w_2) \in C(\overline{\Omega}(0) \times [0, \infty)) : (\widehat{w}_1, \widehat{w}_2)(y, t) \leq (w_1, w_2)(y, t) \leq (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)(y, t), y \in \overline{\Omega}(0), t \geq 0\}$$

和

$$S_0 = \{(w_{1,0}, w_{2,0}) \in C(\overline{\Omega}(0)) : (\widehat{w}_1, \widehat{w}_2)(y, 0) \leq (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \leq (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)(y, 0), y \in \overline{\Omega}(0)\},$$

其中 $(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2)$ 和 $(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2)$ 分别为定理3.1中所取得的上解和下解.

定理3.3 如果 $R_0 > 1$, 则问题(19)在 S 中分别可以取得最大正T-周期解 $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ 和最小正T-周期解 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$. 若 $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)(y, 0) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, 0)$, 则问题(19)在 S 中存在唯一的正T-周期解 (w_1^*, w_2^*) , 且满足 $(\overline{w}_1, \overline{w}_2) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2) := (w_1^*, w_2^*)$.

证 设

$$M_1 = \max_{(y,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]} \{\alpha(t) + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\}, M_2 = \max_{(y,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T]} \{\beta(t) + \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\}$$

和

$$\begin{aligned} H(t, w_1, w_2) &= M_1 w_1 + h(w_2) - \alpha(t)w_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} w_1, \\ G(t, w_1, w_2) &= M_2 w_2 + g(w_1) - \beta(t)w_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} w_2. \end{aligned}$$

那么问题(19)就等同于

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta w_1 + M_1 w_1 = H(t, w_1, w_2), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta w_2 + M_2 w_2 = G(t, w_1, w_2), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ w_1(y, 0) = w_1(y, T), w_2(y, 0) = w_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (27)$$

显然 $H(t, w_1, w_2)$ 和 $G(t, w_1, w_2)$ 关于 w_1 和 w_2 都是单调非减的. 因此选取初值

$$(\overline{w}_1^{(0)}, \overline{w}_2^{(0)}) = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = (K_1, K_2), (\underline{w}_1^{(0)}, \underline{w}_2^{(0)}) = (\widehat{w}_1, \widehat{w}_2) = (\sigma\phi_1, \sigma\phi_2),$$

结合(27)考虑如下的迭代过程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}_1^{(k)}}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \bar{w}_1^{(k)} + M_1 \bar{w}_1^{(k)} = H(t, \bar{w}_1^{(k-1)}, \bar{w}_2^{(k-1)}), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_2^{(k)}}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \bar{w}_2^{(k)} + M_2 \bar{w}_2^{(k)} = G(t, \bar{w}_1^{(k-1)}, \bar{w}_2^{(k-1)}), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \underline{w}_1^{(k)}}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \underline{w}_1^{(k)} + M_1 \underline{w}_1^{(k)} = H(t, \underline{w}_1^{(k-1)}, \underline{w}_2^{(k-1)}), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \underline{w}_2^{(k)}}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \underline{w}_2^{(k)} + M_2 \underline{w}_2^{(k)} = G(t, \underline{w}_1^{(k-1)}, \underline{w}_2^{(k-1)}), & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_1^{(k)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{w}_1^{(k)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{w}_2^{(k)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{w}_2^{(k)}}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \bar{w}_1^{(k)}(y, 0) = \bar{w}_1^{(k-1)}(y, T), \bar{w}_2^{(k)}(y, 0) = \bar{w}_2^{(k-1)}(y, T), & y \in \Omega(0), \\ \underline{w}_1^{(k)}(y, 0) = \underline{w}_1^{(k-1)}(y, T), \underline{w}_2^{(k)}(y, 0) = \underline{w}_2^{(k-1)}(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (28)$$

其中 $k = 1, 2, \dots$. 根据文献[30]中的定理A, 由迭代过程(28)得到的上解序列 $(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})$ 和下解序列 $(\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)})$ 满足如下关系

$$(\underline{w}_1^{(0)}, \underline{w}_2^{(0)}) \leq (\underline{w}_1^{(k-1)}, \underline{w}_2^{(k-1)}) \leq (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)}) \leq (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)}) \leq (\bar{w}_1^{(k-1)}, \bar{w}_2^{(k-1)}) \leq (\bar{w}_1^{(0)}, \bar{w}_2^{(0)}). \quad (29)$$

根据标准的 L^p 理论和Sobolev嵌入定理^[31], 迭代序列满足

$$((\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)}), (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)})) \in C^{2,1}(\Omega(0) \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega}(0) \times [0, \infty)).$$

结合关系式(29)可知逐点极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)}) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)}) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2) \quad (30)$$

存在且满足

$$(\underline{w}_1^{(0)}, \underline{w}_2^{(0)}) \leq (\underline{w}_1^{(k-1)}, \underline{w}_2^{(k-1)}) \leq (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)}) \leq (\bar{w}_1, \bar{w}_2) \leq (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)}) \leq (\bar{w}_1^{(k-1)}, \bar{w}_2^{(k-1)}) \leq (\bar{w}_1^{(0)}, \bar{w}_2^{(0)}) \quad (31)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \bar{w}_1 = h(\bar{w}_2) - \alpha(t) \bar{w}_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \bar{w}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \bar{w}_2 = g(\bar{w}_1) - \beta(t) \bar{w}_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \bar{w}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \underline{w}_1}{\partial t} - \frac{d_1}{\rho^2(t)} \Delta \underline{w}_1 = h(\underline{w}_2) - \alpha(t) \underline{w}_1 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \underline{w}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \underline{w}_2}{\partial t} - \frac{d_2}{\rho^2(t)} \Delta \underline{w}_2 = g(\underline{w}_1) - \beta(t) \underline{w}_2 - \frac{n\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \underline{w}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{w}_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{w}_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \bar{w}_1(y, 0) = \bar{w}_1(y, T), \bar{w}_2(y, 0) = \bar{w}_2(y, T), & y \in \Omega(0), \\ \underline{w}_1(y, 0) = \underline{w}_1(y, T), \underline{w}_2(y, 0) = \underline{w}_2(y, T), & y \in \Omega(0). \end{cases}$$

根据文献[30], $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ 和 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ 是问题(19)两个真实 T -周期解, 其中 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ 为最大正 T -周期解, $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ 为最小正 T -周期解.

最后考虑 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, 0) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, 0)$ 的情况, 将问题(19)看作一个初边值问题, 初始条件

为 $(w_1, w_2)(y, 0) = (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y))$, 利用初边值抛物系统解的存在唯一性相关理论可得

$$(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t) := (w_1^*, w_2^*)(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0,$$

即唯一性得证.

以上已经建立问题(19)的正T-周期解的存在性, 紧接着探究问题(8)解的吸引性. 根据文献[30]中的定理B和引理3.1, 首先给出下面的引理.

引理3.1 假设迭代过程(28)中的周期条件由

$$(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})(y, 0) = (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)})(y, 0) = (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y))$$

所取代, 其中 $(w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \in S_0$, $k = 1, 2, \dots$, 那么所获得的序列 $(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})$ 和 $(\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)})$ 单调收敛到问题(8)的唯一解 $(W_1, W_2)(y, t)$, 且满足关系

$$\begin{aligned} (\underline{w}_1^{(0)}, \underline{w}_2^{(0)}) &\leq (\underline{w}_1^{(k-1)}, \underline{w}_2^{(k-1)}) \leq (\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)}) \leq (W_1, W_2) \leq \\ &(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)}) \leq (\bar{w}_1^{(k-1)}, \bar{w}_2^{(k-1)}) \leq (\bar{w}_1^{(0)}, \bar{w}_2^{(0)}), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

引理3.2 对任意的正整数 k 和 k' , 设 $(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})$, $(\underline{w}_1^{(k')}, \underline{w}_2^{(k')})$ 是问题(19)的一对有序上下解, 若初始条件满足

$$(\underline{w}_1^{(k')}, \underline{w}_2^{(k')})(y, 0) \leq (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \leq (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})(y, 0), \quad y \in \Omega(0),$$

那么 $(\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})$, $(\underline{w}_1^{(k')}, \underline{w}_2^{(k')})$ 也是问题(8)的一对有序上下解.

引理3.3 设 $(W_1, W_2)(y, t; w_{1,0}, w_{2,0})$ 是问题(8)的解, 对任意 $(w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \in S_0$, 都有

$$(\underline{w}_1^{(k)}, \underline{w}_2^{(k)})(y, t) \leq (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0,$$

其中 k 为任意常数.

基于上述引理, 对问题(8)解的收敛结果表述如下.

定理3.4 设 $(W_1, W_2)(y, t; w_{1,0}, w_{2,0})$ 是问题(8)的任意解, 则如下结论成立.

(i) 如果 $R_0 > 1$, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = \begin{cases} (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t), & \text{若 } (\bar{w}_1, \bar{w}_2) \leq (w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \quad y \in \Omega(0), \\ (\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t), & \text{若 } (\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq (w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\underline{w}_1, \underline{w}_2), \quad y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (32)$$

其中 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t)$ 和 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t)$ 分别是问题(19)的最大和最小正T-周期解.

此外, 对于任意 $(w_{1,0}, w_{2,0}) \in S_0$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t) \leq (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0. \quad (33)$$

进一步, 如果 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, 0) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, 0) \equiv (w_1^*, w_2^*)(y, 0)$, 则有

$$(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t) \equiv (w_1^*, w_2^*)(y, t)$$

以及

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (w_1^*, w_2^*)(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0. \quad (34)$$

(ii) 如果 $R_0 \leq 1$, 那么对于任意 $(w_{1,0}, w_{2,0})$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (0, 0) \quad (35)$$

在 $y \in \bar{\Omega}(0)$ 上一致成立.

证 首先考虑(32)中 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, 0) \leq (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \leq (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, 0)$ 的情况, 让 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t)$ 作为问题(8)的下解, 根据引理3.1可得

$$(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t) \leq (W_1, W_2)(y, t; w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0.$$

特别地, 对于任意的 k 有

$$(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t + kT) \leq (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0,$$

由引理3.3可知

$$(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t) \leq (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\bar{w}_1^{(k)}, \bar{w}_2^{(k)})(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0.$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 结合(30)可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t).$$

另外一种情况 $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)(y, 0) \leq (w_{1,0}(y), w_{2,0}(y)) \leq (\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, 0)$ 类似可得, (33)可由关系(31)和引理3.3得到. 若 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2) = (\underline{w}_1, \underline{w}_2) (\equiv (w_1^*, w_2^*))$, 可由(33)可直接得出(34), 因此结论(i)得证.

进一步证明结论(ii). 对于任意常数对 $(C_1, C_2) \geq (K_1, K_2)$, 结合定理3.1的证明知道函数对 $((\bar{w}_1, \bar{w}_2), (\hat{w}_1, \hat{w}_2))(y, t) \equiv ((C_1, C_2), (0, 0))$ 是问题(19)的一对有序上下解. 此外, 定理3.3表明问题(19)具有最大正 T -周期解 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t)$ 和最小正 T -周期解 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t)$, 并且满足关系 $(0, 0) \leq (\underline{w}_1, \underline{w}_2) \leq (\bar{w}_1, \bar{w}_2) \leq (C_1, C_2)$. 另一方面, 定理3.2表明问题(19)在 $R_0 \leq 1$ 的条件下仅存在零解 $(0, 0)$, 故当 $R_0 \leq 1$ 时, $(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2) \equiv (0, 0)$ 成立. 利用结论(i)的证明方法和常数对 (C_1, C_2) 的任意性, 对于任意非负初始函数对 $(w_{1,0}(y), w_{2,0}(y))$, 则问题(8)的解 $(W_1, W_2)(y, t; w_{1,0}, w_{2,0})$ 具有如下的收敛性

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_1, W_2)(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (0, 0), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0,$$

从而得到(35), 故完成了定理3.4的证明.

最后, 定理3.4中的(i)意味着

$$S_T = \{(w_1, w_2) \in C(\bar{\Omega}(0) \times [0, \infty)) :$$

$$(\underline{w}_1, \underline{w}_2)(y, t) \leq (w_1, w_2) \leq (\bar{w}_1, \bar{w}_2)(y, t), \quad y \in \bar{\Omega}(0), \quad t \geq 0\}$$

是问题(8)的一个吸引域, 并且 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ 和 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ 均是单边渐近稳定的. 若满足 $(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = (\bar{w}_1, \bar{w}_2) \equiv (w_1^*, w_2^*)$, 则 (w_1^*, w_2^*) 是问题(8)的一个全局吸引子.

§4 固定区域上的动力学

若 $\rho(t) \equiv 1$, 即变化区域 $\Omega(t)$ 将退化为固定区域 $\Omega(0)$, 则问题(8)和(19)也相应地退化为

$$\begin{cases} \frac{\partial w_{11}}{\partial t} - d_1 \Delta w_{11} = h(w_{22}) - \alpha(t)w_{11}, & y \in \Omega(0), \quad t > 0, \\ \frac{\partial w_{22}}{\partial t} - d_2 \Delta w_{22} = g(w_{11}) - \beta(t)w_{22}, & y \in \Omega(0), \quad t > 0, \\ \frac{\partial w_{11}}{\partial \eta} = \frac{\partial w_{22}}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), \quad t > 0, \end{cases} \quad (36)$$

伴随着初始条件

$$w_{11}(y, 0) = w_{1,0}(y, 0), \quad w_{22}(y, 0) = w_{2,0}(y, 0), \quad y \in \Omega(0), \quad (37)$$

以及周期条件

$$w_{11}(y, 0) = w_{11}(y, T), \quad w_{22}(y, 0) = w_{22}(y, T), \quad y \in \Omega(0). \quad (38)$$

类似问题(8)中基本再生数 R_0 的定义和性质, 也可以利用下一代感染算子方法定义问题(36)-(37)的基本再生数 $\widehat{R}_0$, 并给出以下性质.

引理4.1 (i) $\widehat{R}_0 = \mu_0$, 其中 μ_0 是如下周期抛物问题的主特征值.

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\phi}_1}{\partial t} - d_1 \Delta \widehat{\phi}_1 = \frac{h'(0)}{\mu} \widehat{\phi}_2 - \alpha(t) \widehat{\phi}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\phi}_2}{\partial t} - d_2 \Delta \widehat{\phi}_2 = \frac{g'(0)}{\mu} \widehat{\phi}_1 - \beta(t) \widehat{\phi}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\phi}_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \widehat{\phi}_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \widehat{\phi}_1(y, 0) = \widehat{\phi}_1(y, T), \widehat{\phi}_2(y, 0) = \widehat{\phi}_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases} \quad (39)$$

其中 $(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2) \in C_T \times C_T$ 是相应特征函数对, 在 $\Omega(0) \times (0, \infty)$ 上满足 $\widehat{\phi}_1 > 0, \widehat{\phi}_2 > 0$.

(ii) $\text{sign}(1 - \widehat{R}_0) = \text{sign}(\widehat{\lambda}_0)$, 其中 $\widehat{\lambda}_0$ 是下面周期抛物问题的主特征值.

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\psi}_1}{\partial t} - d_1 \Delta \widehat{\psi}_1 = h'(0) \widehat{\psi}_2 - \alpha(t) \widehat{\psi}_1 + \widehat{\lambda} \widehat{\psi}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\psi}_2}{\partial t} - d_2 \Delta \widehat{\psi}_2 = g'(0) \widehat{\psi}_1 - \beta(t) \widehat{\psi}_2 + \widehat{\lambda} \widehat{\psi}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\psi}_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \widehat{\psi}_2}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega(0), t > 0, \\ \widehat{\psi}_1(y, 0) = \widehat{\psi}_1(y, T), \widehat{\psi}_2(y, 0) = \widehat{\psi}_2(y, T), & y \in \Omega(0), \end{cases}$$

其中 $(\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2) \in C_T \times C_T$ 是相应特征函数对, 在 $\Omega(0) \times (0, \infty)$ 上满足 $\widehat{\psi}_1 > 0, \widehat{\psi}_2 > 0$.

定理4.1 设 $\alpha(t) \equiv \alpha^*$ 和 $\beta(t) \equiv \beta^*$ 为常数, 则问题(36)-(37)的基本再生数 $\widehat{R}_0$ 的表达式为

$$\widehat{R}_0 = \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\alpha^*\beta^*}}. \quad (40)$$

证 将 $\alpha(t) \equiv \alpha^*$ 和 $\beta(t) \equiv \beta^*$ 带入到问题(39)前两个方程可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\phi}_1}{\partial t} - d_1 \Delta \widehat{\phi}_1 = \frac{h'(0)}{\widehat{R}_0} \widehat{\phi}_2 - \alpha(t) \widehat{\phi}_1, & y \in \Omega(0), t > 0, \\ \frac{\partial \widehat{\phi}_2}{\partial t} - d_2 \Delta \widehat{\phi}_2 = \frac{g'(0)}{\widehat{R}_0} \widehat{\phi}_1 - \beta(t) \widehat{\phi}_2, & y \in \Omega(0), t > 0, \end{cases} \quad (41)$$

其中边界条件与(39)相同. 取 $(\phi_1, \phi_2) = (C^*, 1)$ (其中 C^* 为待定常数)代入(41)直接计算可以得到

$$C^* = \sqrt{\frac{\alpha^*g'(0)}{\beta^*h'(0)}}, \quad \widehat{R}_0 = \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\alpha^*\beta^*}},$$

根据主特征值的唯一性可立得(40)成立.

注4.1 根据定理2.1和定理4.1, 可以推断出当 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 均为常值时变化区域上的基本再生数 R_0 和固定区域上的基本再生数 $\widehat{R}_0$ 的关系满足: $R_0 \geq \widehat{R}_0$.

类似定理3.1-定理3.4, 得到如下主要结果.

定理4.2 如果 $\widehat{R}_0 > 1$, 那么问题(36), (38)至少存在一个正T-周期解 $(w_{11}(y, t), w_{22}(y, t))$.

定理4.3 如果 $\widehat{R}_0 \leq 1$, 则问题(36), (38)无正T-周期解.

定理4.4 如果 $\widehat{R}_0 > 1$, 则问题(36), (38)存在最大T-周期解 $(\overline{w}_{11}, \overline{w}_{22})$ 和最小正T-周期解 $(\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})$. 若 $(\overline{w}_{11}, \overline{w}_{22})(y, 0) = (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})(y, 0)$, 则问题(36), (38)仅存在唯一正T-周期解 (w_{11}^*, w_{22}^*) , 且满足 $(\overline{w}_{11}, \overline{w}_{22}) = (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22}) := (w_{11}^*, w_{22}^*)$.

定理4.5 设 $(W_{11}, W_{22})(y, t; w_{1,0}, w_{2,0})$ 是问题(36)-(37)的任意解, 则如下结论成立.

(i) 如果 $\widehat{R}_0 > 1$, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_{11}, W_{22})(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = \begin{cases} (\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22})(y, t), & \text{若 } (\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22}) \leq (w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\tilde{w}_{11}, \tilde{w}_{22}), \quad y \in \Omega(0), \\ (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})(y, t), & \text{若 } (\hat{w}_{11}, \hat{w}_{22}) \leq (w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22}), \quad y \in \Omega(0), \end{cases}$$

其中 $(\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22})$ 和 $(\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})$ 分别是问题(36), (38)的最大和最小正T-周期解.

此外, 对于任意 $(w_{1,0}, w_{2,0}) \in S_0$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$(\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})(y, t) \leq (W_{11}, W_{22})(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) \leq (\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22})(y, t), \quad y \in \overline{\Omega}(0), \quad t \geq 0.$$

进一步, 若 $(\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22})(y, 0) = (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})(y, 0) := (w_{11}^*, w_{22}^*)(y, 0)$, 则有

$$(\bar{w}_{11}, \bar{w}_{22})(y, t) = (\underline{w}_{11}, \underline{w}_{22})(y, t) := (w_{11}^*, w_{22}^*)(y, t)$$

以及

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_{11}, W_{22})(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (w_{11}^*, w_{22}^*)(y, t), \quad y \in \overline{\Omega}(0), \quad t \geq 0.$$

(ii) 若 $\widehat{R}_0 \leq 1$, 对于任意 $(w_{1,0}, w_{2,0})$, 都有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (W_{11}, W_{22})(y, t + kT; w_{1,0}, w_{2,0}) = (0, 0)$$

在 $y \in \overline{\Omega}(0)$ 上一致成立.

§5 数值模拟和讨论

在本节中, 通过数值模拟观察区域演化率 $\rho(t)$ 对粪-口传染病传播的影响, 并结合前文中的理论分析给出生物学解释.

首先, 假设区域

$$\Omega(t) = (0, x(t)), \quad x(t) = \rho(t)y, \quad y \in (0, 1),$$

以及非线性函数

$$g(w_1) = (w_1 + 1)^{2/3} - 1, \quad h(w_2) = (w_2 + 1)^{1/3} - 1,$$

显然函数 $g(w_1)$ 和 $h(w_2)$ 均满足假设条件(J1), (J2). 此外, 令

$$\alpha(t) = \alpha^*, \quad \beta(t) = \beta^*, \quad d_1 = 0.1, \quad d_2 = 0.3,$$

$$w_{1,0}(y) = 5 + 0.1 \sin(\pi y), \quad w_{2,0}(y) = 3 + 0.1 \sin(\pi y) + 0.05 \sin(3\pi y),$$

其中 α^* 和 β^* 均为正常数.

例5.1 选取 $\alpha^* = 0.95$, $\beta^* = 0.1$ 和区域演化率 $\rho_1(t) \equiv 1$, 由定理4.1可得

$$\widehat{R}_0 = \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\alpha^*\beta^*}} = \sqrt{\frac{2/3 \cdot 1/3}{0.95 \cdot 0.1}} \approx 1.5294 > 1.$$

根据定理4.5中的(i)知道, 当基本再生数 $\widehat{R}_0 > 1$ 时, 传染病将会扩散最终形成地方病. 通过图1中的左图可以很清晰的看到问题(37)-(38)的解一致收敛于正稳定态, 中图和右图分别是对应的截面图和等高线图.

例5.2 选取 $\alpha^* = 0.95$, $\beta^* = 0.1$ 和区域演化率 $\rho_2(t) = e^{0.04(1-\cos 2t)+0.01}$, 此时 $\rho_2(t) > 1$, 根据注4.1和例5.1的计算可得 $R_0 \geq \widehat{R}_0 > 1$.

根据定理3.4中的(i)可知, 当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 疾病将会传播最终形成地方病. 通过图2中的左图和中图可以很清晰的看到感染人群的密度稳定在某个正常数.

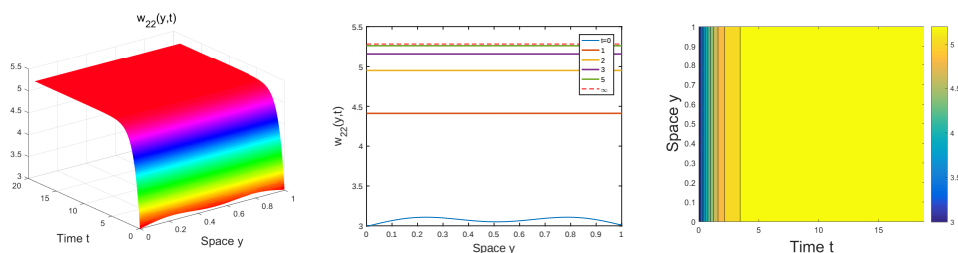


图 1 对于演化率 $\rho(t) \equiv 1$ 且基本再生数 $\widehat{R}_0 > 1$ 时, 传染病最终会扩散形成地方病, 左图和中图显示感染人群趋向于稳态, 右图表明区域为固定区域

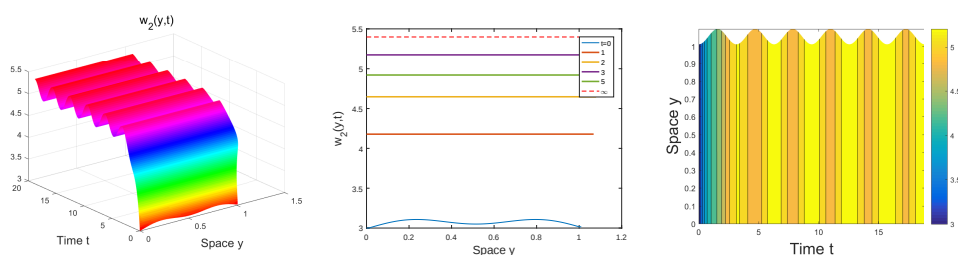


图 2 当演化率 $\rho(t) > 1$ 且基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 传染病仍会扩散形成地方病, 从左图和中图可以看出感染人群数量收敛于一个稳态, 右图呈现出区域的周期变化

例5.3 选取 $\alpha^* = 0.95$, $\beta^* = 0.1$ 和区域演化率 $\rho_3(t) = e^{-0.04(1-\cos 2t)-0.01}$, 此时 $\rho_3(t) < 1$, 根据注4.1和例5.1的计算可得 $R_0 \geq \widehat{R}_0 > 1$.

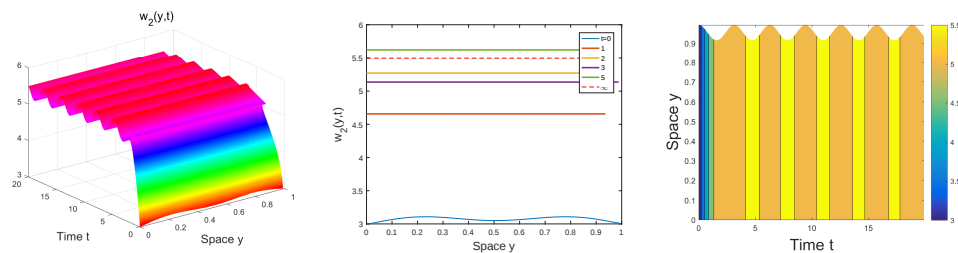


图 3 对于演化率 $\rho_3(t) < 1$ 且基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 传染病仍会扩散, 从右图仍可以很明显的看到区域的周期性变化

类似于例5.2, 疾病仍会传播, 从图3中的左图和中图可以很明显的看到感染人群密度不断趋于正稳态.

例5.1-例5.3均为基本再生数 $\widehat{R}_0 > 1$ 的情况, 数值模拟与本文的理论分析相符合, 此时病毒会随时间不断传播最终趋于一个正稳态. 例5.2和例5.3中的区域发生了改变, 并且 $R_0 \geq \widehat{R}_0$ 也意味着区域的变化增加了疾病传播的风险, 但基于 $\widehat{R}_0 > 1$ 这一事实, 无论区域 $\rho(t) > 1$ 时(例5.2)或者 $\rho(t) < 1$ 时(例5.3)病毒都会扩散开来, 图2和图3也展示出了这一现象.

进一步, 在基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 的情况下, 模拟不同的演化率 $\rho(t)$ 对模型动力学的影响.

例5.4 选取 $\alpha^* = 0.1$, $\beta^* = 2.8$ 和区域演化率 $\rho_4(t) = \rho_1(t) \equiv 1$, 由定理4.1可得

$$\widehat{R}_0 = \sqrt{\frac{g'(0)h'(0)}{\alpha^*\beta^*}} = \sqrt{\frac{2/3 \cdot 1/3}{0.1 \cdot 2.8}} \approx 0.8909 < 1.$$

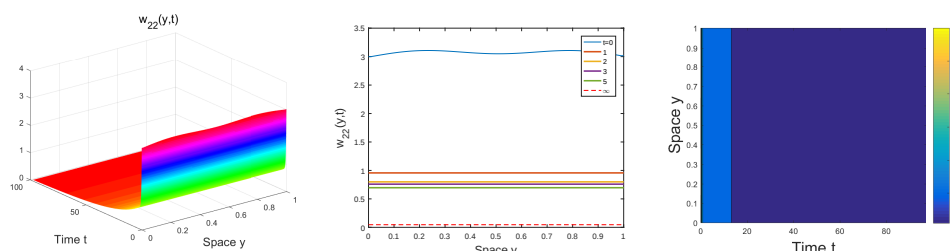


图 4 对于演化率 $\rho_4(t) \equiv 1$ 且基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 疾病最终会消失, 从左图和中图可以看出变量 w_{22} 最终收敛于零解, 从右图可以观察到区域为固定区域

根据定理4.5中的(ii)可知, 当基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 固定区域上的传染病将会逐渐消失. 通过图4中的左图和中图可以很清晰的看到问题(37), (38)的解一致收敛于零解.

例5.5 选取 $\alpha^* = 0.1$, $\beta^* = 2.8$ 和区域演化率 $\rho_5(t) = e^{0.04(1-\cos 2t)+0.01}$, 此时 $\rho_5(t) > 1$, 通过例5.4的计算已知 $\widehat{R}_0 < 1$.

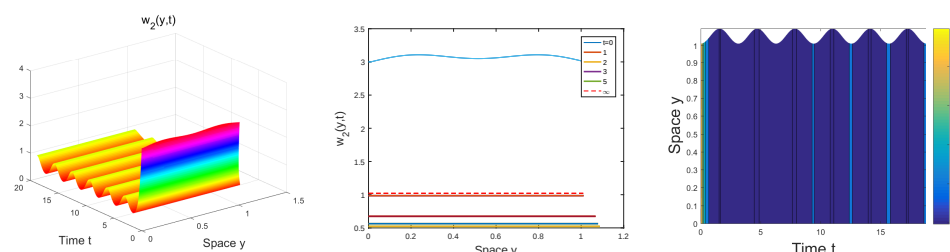


图 5 对于演化率 $\rho_5(t) > 1$ 且基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 变化区域上的传染病形成了地方病, 从左图和中图可以看出感染人群密度最终趋于正稳态, 右图中可以很明显的看出区域的周期性变化

当基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 根据注4.1可知 R_0 可能会大于1, 通过模拟很容易看出变化区域上的传染病出现了扩散的情况, 这意味着较大的区域演化率可能会增加疾病传播的风险.

例5.6 选取 $\alpha^* = 0.1$, $\beta^* = 2.8$, 区域演化率 $\rho_6(t) = e^{-0.04(1-\cos 2t)-0.01}$, 此时 $\rho_6(t) < 1$, 通过例5.4的计算同样已知 $\widehat{R}_0 < 1$.

通过模拟可以从图6观察到感染人群密度随时间变化最终趋于零, 这意味着疾病在逐渐消失, 从而说明较小的区域演化率有利于传染病的控制.

近些年来, 生物种群栖息地的变化对种群生存的影响受到一些学者的广泛关注, 特别是有很多生物种群的栖息地受气候, 海拔和地理环境等影响会呈现出周期性的变化规律, 细菌和病毒作为生物体, 其所属的空间环境也自然会呈现出周期性变化. 本文特别关注了区域的周期性变化对粪-口途径传染病传播的影响, 文献[6, 10, 12]中的模型采用的是感染人群对细菌的线性发生率, 而在本文中采用了感染人群对细菌的非线性发生率, 更符合现实中的传播机制. 进一步, 根据文献[20-22]中反应-扩散方程在变化区域上的建模思想, 构建了周期变化区域 $\Omega(t)$ 上的

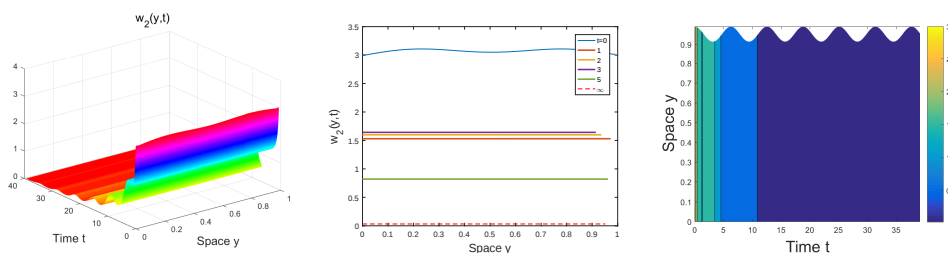


图 6 对于演化率 $\rho(t) < 1$ 且基本再生数 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 变化区域上的传染病最终会消失, 从左图和中图可以看出感染人群密度最终趋于零, 右图中可以看出区域周期性变化

模型(3)-(5), 通过对等价模型(8)的动力学研究, 探讨区域的演化率 $\rho(t)$ 对病毒模型动力学的影响. 给出了变化区域下的阈值 R_0 和固定区域条件下阈值 $\widehat{R}_0$ 的抽象表达式以及一定条件下两者之间的关系 $R_0 \geq \widehat{R}_0$, 通过定理3.5的讨论可知当 $R_0 > 1$ 时, 在一定条件下问题(8)的解将趋于一个正稳态周期解, 这意味着该疾病将会扩散最终形成地方病. 如果当 $R_0 \leq 1$ 时, 则问题(8)的解将趋于零解, 这意味着该疾病将会消失.

此外, 文献[18, 22]是在Dirichlet边界条件下研究周期变化区域分别对疾病传播和单个物种生存的影响, 他们得到的结论是疾病的传播以及种群的生存依赖于积分平均值 $\overline{\rho^{-2}} := \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\rho^2(t)} dt$. 当 $\overline{\rho^{-2}} < 1$ 时, 周期演化率 $\rho(t)$ 对疾病传播和物种生存产生了促进作用, 当 $\overline{\rho^{-2}} > 1$ 时, 周期演化率 $\rho(t)$ 对疾病传播和物种生存产生了抑制作用. 而所研究的模型(3)-(5)是建立在Neumann边界条件上的, 通过注4.1获悉区域的周期性变化会增大疾病传播的风险, 特别是当固定区域上的基本再生数 $\widehat{R}_0 > 1$ 时, 无论区域演化率 $\rho(t) > 1$ 还是 $\rho(t) < 1$ 疾病都会扩散. 当 $\widehat{R}_0 < 1$ 时, 通过定理4.5和例5.1明确得出此时固定区域中的病毒一定会随时间变化逐渐消失, 但变化区域上的疾病传播情况更加复杂, 根据例5.5和例5.6以及文献[18, 22]的相关结论笔者猜想较大的演化率会增加疾病传播的风险, 不利于疾病的防控. 通过本文的研究分析, 清晰地认识到在病毒生存环境呈现季节性周期变化这一基本事实下, 只有改善人类的生活环境和提高细菌的死亡率, 并同时降低细菌与人群之间的相互传播率才能有效地防控粪-口传染病的传播.

参考文献:

- [1] Sun Qianqian, Tan Dejun, Zhang Shuwen. Epidemic threshold of a COVID-19 model with gaussian white noise and semi-Markov switching[J]. J Franklin Inst, 2023, 360(10): 6846-6861.
- [2] Global health estimates: life expectancy and leading causes of death and disability[DB]. Available from: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/the-top-10-causes-of-death>.
- [3] Wang Wei, Zhou Mengchen, Zhang Tonghua, et al. Dynamics of a Zika virus transmission model with seasonality and periodic delays[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2023, 116: 106830.
- [4] Zhong Haonan, Wang Wendi. Mathematical modelling for scarlet fever with direct and indirect infections[J]. J Biol Dyn, 2020, 14(1): 767-787.

- [5] Ahmad S, Ullah A, Arfan M, Shah K. On analysis of the fractional mathematical model of rotavirus epidemic with the effects of breastfeeding and vaccination under Atangana-Baleanu (AB) derivative[J]. *Chaos Solit Fract*, 2020, 140: 110233.
- [6] Capasso V, Maddalena L. Convergence to equilibrium states for a reaction-diffusion system modelling the spatial spread of a class of bacterial and viral diseases[J]. *J Math Biol*, 1981, 13(2): 173-184.
- [7] Jiang Wen, Wang Mengyue. Geographical difference of the virulence of *Toxoplasma gondii*[J]. *Appl Math Model*, 2023, 119: 433-446.
- [8] 斯蒂芬妮内贝海, 韩仁如, 胡付品. 世界卫生组织报道也门发生近50万例霍乱, 其中近2000例死亡[J]. *中国感染与化疗杂志*, 2018, 18(3): 285.
- [9] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] Ahn I, Baek S, Lin Zhigui. The spreading fronts of an infective environment in a man-environment-man epidemic model[J]. *Appl Math Model*, 2016, 40(15-16): 7082-7101.
- [11] Wu Shiliang, Chen Guangsheng, Hsu Chengshiung. Entire solutions originating from multiple fronts of an epidemic model with nonlocal dispersal and bistable nonlinearity[J]. *J Differ Equation*, 2018, 265(11): 5520-5574.
- [12] Huang Chuangxia, Tan Yanxiang. Global behavior of a reaction-diffusion model with time delay and Dirichlet condition[J]. *J Differ Equation*, 2021, 271: 186-215.
- [13] Hu Ruyue, Li Wantong, Xu Wenbing. Propagation phenomena for man-environment epidemic model with nonlocal dispersals[J]. *J Nonlinear Sci*, 2022, 32(5): 67.
- [14] Lou Yuan, Xiao Dongmei, Zhou Peng. Qualitative analysis for a Lotka-Volterra competition system in advective homogeneous environment[J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36(2): 953-969.
- [15] Zhang Ran, Liu Shengqiang. Traveling waves for SVIR epidemic model with nonlocal dispersal[J]. *Math Biosci Eng*, 2019, 16(3): 1654-1682.
- [16] Wang Jinliang, Wu Wenjing, Li Chunyang. Dynamical analysis of a reaction-diffusion mosquito-borne model in a spatially heterogeneous environment[J]. *Adv Nonlinear Anal*, 2023, 12(1): 20220295.
- [17] 黄翀, 王淑璇, 李贺. 2010-2019年不同海湾迁徙水鸟栖息地适宜性变化对比研究[J]. *生态学报*, 2023, 43(13): 5453-5465.
- [18] Zhu Min, Lin Zhigui, Zhang Lai. The asymptotic profile of a dengue model on a growing domain driven by climate change[J]. *Appl Math Model*, 2020, 83: 470-486.
- [19] Madzvamuse A, Ndakwo H S, Barreira R. Stability analysis of reaction-diffusion models on evolving domains: the effects of cross-diffusion[J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36(4): 2133-2170.
- [20] Tang Qiulin, Lin Zhigui. The asymptotic analysis of an insect dispersal model on a growing domain[J]. *J Math Anal Appl*, 2011, 378(2): 649-656.
- [21] Tang Qiulin, Zhang Lai, Lin Zhigui. Asymptotic profile of species migrating on a growing habitat[J]. *Acta Appl Math*, 2011, 116(2): 227-235.
- [22] Jiang Danhua, Wang Zhicheng. The diffusive logistic equation on periodically evolving domains[J]. *J Math Anal Appl*, 2018, 458(1): 93-111.
- [23] Acheson D. *Elementary Fluid Dynamics*[M]. New York: Oxford University Press, 1990.
- [24] 林支桂. *数学生态学导引*[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

- [25] van den Driessche P, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Math Biosci, 2002, 180: 29-48.
- [26] Zhao Xiaoqiang. Dynamical Systems in Population Biology, Second Edition[M]. New York: Springer, 2017.
- [27] Rautian N A. Studying Volterra integro-differential equations by methods of the theory of operator semigroups[J]. Differ Equ, 2021, 57(12): 1665-1684.
- [28] Peng Rui, Zhao Xiaoqiang. A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment[J]. Nonlinearity, 2012, 25(5): 1451-1471.
- [29] Liang Xing, Zhang Lei, Zhao Xiaoqiang. Basic reproduction ratios for periodic abstract functional differential equations (with application to a spatial model for Lyme disease)[J]. J Dynam Differ Equation, 2019, 31(3): 1247-1278.
- [30] Pao C V. Stability and attractivity of periodic solutions of parabolic systems with time delays[J]. J Math Anal Appl, 2005, 340(2): 423-450.
- [31] Kolyada V I. Embedding theorems for Sobolev and Hardy-Sobolev spaces and estimates of Fourier transforms[J]. Ann Mat Pura Appl, 2019, 198(4): 615-637.

The dynamics of a fecal-oral route epidemic model on a periodically evolving domain

ZHANG Han, ZHU Min

(School of Math. Stat., Anhui Normal Univ., Wuhu 241000, China)

Abstract: Different from the normal fecal-oral route epidemic model on the fixed domain, this model is established on the periodically evolving domain, aiming to explore the impact of periodic changes in spatial regions on this epidemic. In view of the next infection operator and eigenvalue method, the correlation properties of the basic reproduction number R_0 of the model are analyzed, and compare the relationship with the number $\widehat{R}_0$ of the fixed domain. The dynamics of the model with evolving domain shows that if $R_0 > 1$, then the model admits a unique positive periodic solution which is globally asymptotically stable, while $R_0 \leq 1$, then it only admits a globally asymptotically stable zero solution. Final simulation further indicates the larger evolution rate of domain could increase the risk of this virus spread.

Keywords: fecal-oral route epidemic model; evolving domain; basic reproduction number; periodic solution

MR Subject Classification: 35K20; 35B40; 92D30