

# 基于幂等亲和矩阵的子空间聚类

唐科威\*, 李丹阳

(辽宁师范大学 数学学院, 辽宁大连 116082)

**摘要:** 基于谱聚类的方法在许多子空间聚类的应用中有很好的表现, 进而成为研究热点. 幂等表示方法通过构造重构系数矩阵满足幂等性质取得了很好的效果. 但是幂等性质的满足需要重构系数矩阵满足对称和非负的条件, 这会限制重构系数矩阵的表示能力. 为了解决这个问题, 直接构造自然具有对称和非负性质的亲和矩阵满足幂等性质, 提出了基于幂等亲和矩阵的子空间聚类方法. 数值算法是克服模型求解方面的困难而得到的. 在四个基准数据集上的对比实验证实了文中所提方法的有效性.

**关键词:** 子空间聚类; 幂等表示; 亲和矩阵; 基于谱聚类的方法

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0195-14

## §1 引言

在计算机视觉和机器学习领域中, 子空间聚类问题一直都是一个备受关注的话题, 在图形图像处理<sup>[1]</sup>、运动分割<sup>[2]</sup>和人脸聚类<sup>[3]</sup>等方面有丰富的运用. 子空间聚类的目标就是将高维数据样本按照其对应的子空间进行聚类, 每个聚类都对应一个子空间.

在过去的几十年里, 各种类型的子空间聚类方法层出不穷<sup>[4-10]</sup>. 根据综述<sup>[11]</sup>, 现有的子空间聚类方法可以被大致分为四类: 代数法、迭代法、统计法和基于谱聚类的方法. 大部分早期的子空间聚类研究都是聚焦于代数法、迭代法或是统计法. 形状交互矩阵<sup>[12]</sup>和广义主成分分析<sup>[13]</sup>是代数法中的两个著名方法. 尽管拥有完善的公式, 但在通常情况下, 这些算法的性能仍可能会在噪声的情况下迅速下降. 迭代法的提出则主要是提高了代数法在噪声环境中的性能. 统计法将子空间聚类视为一种混合数据的推理问题, 因此统计学领域的一些流行方法也得到了应用, 如随机抽样一致算法<sup>[14]</sup>. 在近期的研究中, 基于谱聚类的方法在许多实际问题中有极好的表现, 因而成为研究热点.

基于谱聚类的方法通常包括三步: 首先, 计算数据集的重构系数矩阵  $Z \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ; 接着, 使用获得的重构系数矩阵构建亲和矩阵  $W = \frac{|Z| + |Z^T|}{2}$ , 其中  $Z^T$  表示  $Z$  的转置,  $|Z|$  表示  $Z$  中各元

收稿日期: 2024-07-03 修回日期: 2025-05-08

\*通讯作者, Email: kwtang@lnnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(12571563; 62076115)

索取绝对值后形成的矩阵;最后,通过使用基于谱聚类的方法如归一化切割(Normalized cuts, N-cuts)<sup>[15]</sup>获得分割结果<sup>[4]</sup>.不同方法的主要区别是使用了不同的正则项去产生有独特之处的重构系数矩阵<sup>[4]</sup>.低秩表示(Low-Rank Representation, LRR)和稀疏子空间聚类(Sparse Subspace Clustering, SSC)是两种众所周知的基于谱聚类的子空间聚类算法. LRR通过最小化核范数来寻求低秩的重构系数矩阵<sup>[8]</sup>. SSC通过引入稀疏约束追求稀疏的重构系数矩阵<sup>[9]</sup>,但SSC获得的重构系数矩阵通常太过稀疏致使子空间内缺乏连接性.最小二乘回归(Least Square Regression, LSR)定义了F范数正则项去寻找稠密的重构系数矩阵并提出了强制分组效应<sup>[6]</sup>.光滑表示(Smooth Representation, SMR)规范定义了强制分组效应<sup>[7]</sup>,并相应给出了特殊的亲和矩阵构造方法.但这个方法忽略了数据矩阵包含零向量情况下的实际意义.

从基于谱聚类方法的流程上看,如果最终得到的亲和矩阵具有块对角的形式并且对角块的个数等于子空间的个数,那么将得到正确的聚类结果.由此,块对角性质得到了研究,块对角表示(Block Diagonal Representation, BDR)通过最小化重构系数矩阵的拉普拉斯算子的最小 $k$ 个特征值的和来追求这一性质<sup>[10]</sup>,但是该方法要求重构系数矩阵非负,文中表明此举会限制重构系数矩阵的表示能力.文献[4]从理想的亲和矩阵应该具有的形式出发,提出了幂等表示(Idempotent Representation, IDR)方法.自适应图卷积子空间聚类(Adaptive Graph Convolutional Subspace Clustering, AGCSC)将图卷积技术运用到子空间聚类中<sup>[5]</sup>,其目标函数中重构系数矩阵的正则项类似幂等表示,这也在一定程度上说明了幂等表示的合理性.但AGCSC和IDR都要求重构系数矩阵具有对称和非负的性质,因此都存在文献[10]所述的限制重构系数矩阵的表示能力的问题.本文对IDR开展详细研究.如后文的图1所示,从三维空间中两条相交直线上分别选取了一些采样点,由于分布在原点两侧的数据点在互相进行线性表示时表示系数为负,当限定重构系数矩阵非负后,这部分数据间的关系将无法被挖掘.如后文的图2b所示,这会使得IDR获得的重构系数矩阵包含四个对角块而不是两个.

为了克服上述问题,本文提出了幂等亲和矩阵(Idempotent Affinity Matrix, IDAM)方法用于子空间聚类.由于追求重构系数矩阵的一些特性最终是为了保证亲和矩阵的性质,而且亲和矩阵自然是对称和非负的,因此直接对亲和矩阵追求幂等性质将会避免对重构系数矩阵表示能力的限制问题.但是这会带来模型求解上的困难,作者克服了这个困难给出了有效的数值算法.如后文的图2a所示,在IDR失效的数据集上得到了正确的两个对角块,最后,在真实数据集进行了大量的实验展示了IDAM的有效性.值得注意的是,目前已经提出了诸多用于子空间聚类问题的深度学习方法<sup>[3, 11, 16]</sup>,这些方法更主要的是使用深度网络学习了深度特征,然后还是利用自表示学习重构系数矩阵来处理子空间聚类问题,当需要重构系数矩阵满足一定的性质时,其处理策略仍然是使用相关的正则项或者相应的限制条件,而不是使用深度网络来代替正则项和限制条件.因此深度学习方法无法替代本文算法,而本文给出的处理问题的策略却能够扩展深度学习方法的建模思路.本文的贡献如下.

1) 本文利用亲和矩阵自然具有对称和非负的特点来追求幂等性质,无需对重构系数矩阵施加额外限制条件,不仅避免了IDR对其表示能力的限制问题,还减少了参数的个数.

2) 本文以亲和矩阵为变量构建模型带来了求解上的困难,但是作者克服了这个困难,并给出了有效的数值算法,可以对构建类似模型提供一定的参考.

## §2 幂等表示回顾

本文提出的方法IDAM是在IDR的基础上开展的, 故在开始介绍本文的算法前, 先对IDR进行简单回顾.

首先介绍本文使用的主要符号, 本文中的矩阵统一使用大写英文字母表示,  $i, j$  分别表示矩阵对应的行和列. 例如  $Z_{ij}$  表示矩阵  $Z$  的第  $i$  行第  $j$  列对应位置元素. 其余在本文使用到的主要符号列在表1.

表1 本文使用的主要符号

| 符号                                         | 含义                                                        |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $n$                                        | 样本的数量                                                     |
| $k$                                        | 子空间的个数                                                    |
| $d$                                        | 样本的维数                                                     |
| $\lambda$                                  | 非负的参数                                                     |
| $Z \in \mathbf{R}^{n \times n}$            | 重构系数矩阵                                                    |
| $W \in \mathbf{R}^{n \times n}$            | 亲和矩阵                                                      |
| $E \in \mathbf{R}^{d \times n}$            | 误差矩阵                                                      |
| $\mathbf{1}_n \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ | 每个分量都为1的 $n$ 维列向量                                         |
| $\text{diag}(W)$                           | 矩阵 $W$ 的对角元构成的列向量                                         |
| $\text{Tr}(W)$                             | 矩阵 $W$ 的迹                                                 |
| $W^{-1}$                                   | 矩阵 $W$ 的逆                                                 |
| $\ W\ _F$                                  | $\ W\ _F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}^2}$                |
| $\ W\ _\infty$                             | $\ W\ _\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n}  W_{ij} $        |
| $\ E\ _{2,1}$                              | $\ E\ _{2,1} = \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^d E_{ij}^2}$ |

假设数据集  $X = [X_1, X_2, \dots, X_k] \in \mathbf{R}^{d \times n}$ , 其中  $X_i$  包含来自第  $i$  个子空间的  $n_i$  个数据点. 由于基于谱聚类的方法最终将构造的亲和矩阵输入给N-cuts, 因此一种理想的亲和矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} \mathbf{1}_{n_1} \mathbf{1}_{n_1}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} \mathbf{1}_{n_2} \mathbf{1}_{n_2}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_k} \mathbf{1}_{n_k} \mathbf{1}_{n_k}^T \end{pmatrix}.$$

如果一个方法可以获得这种形式的重构系数矩阵, 那么一定可以得到这样的亲和矩阵, 从而得到正确的聚类结果. 受自表示思路的启发, 作者发现这个矩阵满足幂等性质, 文献[17-19]表明, 添加了约束条件  $\mathbf{1}_n^T Z = \mathbf{1}_n^T, Z = Z^T, Z \geq 0$  可使幂等矩阵具备上述理想形式. 考虑到噪声情况, 幂等表示方法的模型为

$$\begin{aligned} \min_Z \quad & \|Z\|_{id} + \lambda \|E\|_{2,1} \\ \text{s.t.} \quad & X = XZ + E, \mathbf{1}_n^T Z = \mathbf{1}_n^T, Z = Z^T, Z \geq 0, \text{Tr}(Z) = k, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\|Z\|_{id} = \|Z - Z^2\|_F^2$  是  $Z$  的幂等正则项. 为了避免重构系数矩阵是单位阵, 添加限制条件  $\text{Tr}(Z) = k$ . 在真实的应用中, 大部分的数据是存在噪声的或者被破坏的, 故用  $l_{2,1}$  来测量误差项  $E$ . 由于所有强加在  $Z$  上的约束会限制其表示能力, 因此IDR采取了引入中间项来求解问题(1)的放宽问题, 这样需要额外再引入一个参数. IDR使用交替方向迭代法(Alternating Direction Method, ADM)<sup>[20]</sup>来获得数值算法, 其算法总复杂度为  $O(n^3)$ .

### §3 基于幂等亲和矩阵的子空间聚类

通过§2的回顾可以发现为了获得理想的亲和矩阵,需要在幂等表示的基础上施加对称和非负等限制条件,但是根据文献[10],对称和非负的限制条件会降低重构系数矩阵的表示能力.由于亲和矩阵自然具有对称和非负的性质,本文通过直接对亲和矩阵追求幂等性质来克服上述问题.

#### 3.1 本文的模型

根据前面的分析,直接将模型(1)中的重构系数矩阵替换为亲和矩阵,得到幂等亲和矩阵(IDAM)方法,模型为

$$\begin{aligned} \min_Z \|W\|_{id} + \lambda \|E\|_{2,1} \\ \text{s.t. } X = XZ + E, W1_n = 1_n, W = \frac{|Z| + |Z^T|}{2}, \text{Tr}(W) = k. \end{aligned} \quad (2)$$

相对于IDR,可以发现本文的方法直接寻求亲和矩阵的幂等性质,因此无需对重构系数矩阵施加额外限制,从而能够更好地挖掘数据间的关系.但是这也增加了模型求解上的难度,不过作者克服了这个难题.

#### 3.2 数值求解

类似于现有的处理子空间聚类问题的相关工作,使用ADM给出数值算法.首先将问题(2)转换为等价问题

$$\begin{aligned} \min_{Z,A,G,W,S,E} \|W - WS\|_F^2 + \lambda \|E\|_{2,1} \\ \text{s.t. } X = XZ + E, W = S, W1_n = 1_n, W = \frac{G + G^T}{2}, \text{Tr}(G) = k, G = |A|, A = Z, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $A, G, S$ 是辅助变量.问题(3)对应的增广拉格朗日函数构造为

$$\begin{aligned} \ell = \|W - WS\|_F^2 + \lambda \|E\|_{2,1} + \langle Y_1, X - XZ - E \rangle + \langle Y_2, W - S \rangle + \\ \langle Y_3, W1_n - 1_n \rangle + \left\langle Y_4, W - \frac{G + G^T}{2} \right\rangle + \langle Y_5, G - |A| \rangle + \\ \langle Y_6, A - Z \rangle + \frac{\mu}{2} \left( \|X - XZ - E\|_F^2 + \|W - S\|_F^2 + \|W1_n - 1_n\|_F^2 + \right. \\ \left. \left\| W - \frac{G + G^T}{2} \right\|_F^2 + \|G - |A|\|_F^2 + \|A - Z\|_F^2 \right), \end{aligned}$$

其中 $Y_1$ - $Y_6$ 为拉格朗日乘子.通过最小化 $\ell$ ,交替优化变量 $Z, A, G, W, S, E$ .

##### 1. 固定其他变量更新 $Z$

$$\min_Z \langle Y_1, X - XZ - E \rangle + \langle Y_6, A - Z \rangle + \frac{\mu}{2} \left( \|X - XZ - E\|_F^2 + \|A - Z\|_F^2 \right),$$

很容易验证

$$Z = \left( X^T X + I_n \right)^{-1} \left( X^T X - X^T E + A + \frac{1}{\mu} \left( X^T Y_1 + Y_6 \right) \right). \quad (4)$$

##### 2. 固定其他变量更新 $A$

$$\min_A \langle Y_5, G - |A| \rangle + \langle Y_6, A - Z \rangle + \frac{\mu}{2} \left( \|G - |A|\|_F^2 + \|A - Z\|_F^2 \right), \quad (5)$$

问题(5)可转化为对等价问题

$$\min_A \frac{\mu}{2} \left( \| |A| + B \|_F^2 + \|A - C\|_F^2 \right) \quad (6)$$

的讨论,其中 $B = -G - \frac{Y_5}{\mu}$ ,  $C = Z - \frac{Y_6}{\mu}$ .问题(6)的解表示如下.

1) 当  $B_{ij} \geq 0$  时

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij}-B_{ij}}{2}, & C_{ij} > B_{ij}, \\ 0, & -B_{ij} \leq C_{ij} \leq B_{ij}, \\ \frac{B_{ij}+C_{ij}}{2}, & C_{ij} < -B_{ij}. \end{cases} \quad (7)$$

2) 当  $B_{ij} < 0$  时

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij}-B_{ij}}{2}, & C_{ij} \geq 0, \\ \frac{B_{ij}+C_{ij}}{2}, & C_{ij} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. 固定其他变量更新  $G$

$$\min_G \left\langle Y_4, W - \frac{G+G^T}{2} \right\rangle + \langle Y_5, G - |A| \rangle + \frac{\mu}{2} \left( \left\| W - \frac{G+G^T}{2} + \frac{Y_4}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| G - |A| + \frac{Y_5}{\mu} \right\|_F^2 \right). \quad (9)$$

问题(9)可转化为等价问题

$$\begin{aligned} \min_G \frac{\mu}{2} \left( \|G - M\|_F^2 + \left\| \frac{G+G^T}{2} - N \right\|_F^2 \right) \\ \text{s.t. } \text{Tr}(G) = k, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $M = |A| - \frac{Y_4}{\mu}$ ,  $N = W + \frac{Y_5}{\mu}$ . 注意到此时的约束仅仅是限制了对角元素, 故可以将对角元与非对角元分开考虑.

(i) 考虑对角元, 问题(10)可化为等价问题

$$\min_G \|G - M\|_F^2 + \|G - N\|_F^2.$$

由文献[4]易得对角元的计算公式

$$g = t + 1_n \frac{(k - 1_n^T t)}{n}, \quad (11)$$

其中  $g$  为矩阵  $G$  的对角元素组成的向量,  $t = \text{diag}\left(\frac{M+N}{2}\right)$ ,  $k = 1_n^T g$ .

(ii) 在考虑此问题的非对角元处的最小值时, 可以将此问题看作一个二次规划问题. 用MATLAB中的quadprog进行求解, 由于此方法需要大量的迭代过程, 因此在实验计算中需要耗费大量的时间, 所以通过推导直接给出了关于  $G$  非对角元处的最优解公式以此有效的节约了计算时间. 公式的结论见命题1.

**命题1** 给定矩阵  $M, N$ , 如果问题  $\min_G \frac{\mu}{2} \left( \|G - M\|_F^2 + \left\| \frac{G+G^T}{2} - N \right\|_F^2 \right)$  的非对角元元素的最优解为  $G^*$ , 则其计算公式为

$$\begin{cases} G_{ij}^* = \frac{3}{4}M_{ij} - \frac{1}{4}M_{ji} + \frac{1}{4}N_{ij} + \frac{1}{4}N_{ji}, \\ G_{ji}^* = \frac{3}{4}M_{ji} - \frac{1}{4}M_{ij} + \frac{1}{4}N_{ij} + \frac{1}{4}N_{ji}, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $i > j$ .

**证** 问题(10)的非对角元素问题可转化为讨论二元二次函数的最小值问题

$$\min_G \frac{1}{2} \left[ (G_{ij} - M_{ij})^2 + (G_{ji} - M_{ji})^2 + \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} - N_{ij} \right)^2 + \left( \frac{G_{ji} + G_{ij}}{2} - N_{ji} \right)^2 \right],$$

其中  $i > j$ , 将上述问题分别关于  $G_{ij}, G_{ji}$  求偏导可得驻点

$$\left( \frac{3}{4}M_{ij} - \frac{1}{4}M_{ji} + \frac{1}{4}N_{ij} + \frac{1}{4}N_{ji}, \frac{3}{4}M_{ji} - \frac{1}{4}M_{ij} + \frac{1}{4}N_{ij} + \frac{1}{4}N_{ji} \right),$$

经验证在该点处为极小值, 得证.

4. 固定其他变量更新  $W$

$$\min_W \|W - WS\|_F^2 + \langle Y_2, W - S \rangle + \langle Y_3, W1_n - 1_n \rangle + \left\langle Y_4, W - \frac{G + G^T}{2} \right\rangle + \frac{\mu}{2} \left( \|W - S\|_F^2 + \|W1_n - 1_n\|_F^2 + \left\| W - \frac{G + G^T}{2} \right\|_F^2 \right).$$

容易得到

$$W = \left( \mu \left( S + 1_n 1_n^T + \frac{G + G^T}{2} \right) - Y_2 - Y_4 - Y_3 1_n^T \right) \left( 2(I_n - S)(I_n - S)^T + 2\mu I_n + \mu 1_n 1_n^T \right)^{-1}. \quad (13)$$

5. 固定其他变量更新  $S$

$$\min_S \|W - WS\|_F^2 + \langle Y_2, W - S \rangle + \frac{\mu}{2} (\|W - S\|_F^2).$$

可得

$$S = (2W^T W + \mu I_n)^{-1} (2W^T W + Y_2 + \mu W). \quad (14)$$

6. 固定其他变量更新  $E$

$$\min_E \lambda \|E\|_{2,1} + \langle Y_1, X - XZ - E \rangle + \frac{\mu}{2} (\|X - XZ - E\|_F^2). \quad (15)$$

问题(15)可转化为对等价问题

$$\min_E \lambda \|E\|_{2,1} + \frac{\mu}{2} (\|E - F\|_F^2) \quad (16)$$

的讨论, 其中  $F = X - XZ + \frac{Y_1}{\mu}$ , 设  $E = (e_1, e_2, \dots, e_j, \dots)$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots)$ , 问题(16)可以通过文献[4]中提出的引理1去解决.

$$e_j^* = \begin{cases} \frac{\|f_j\|_2 - \frac{\lambda}{\mu}}{\|f_j\|_2} f_j, & \frac{\lambda}{\mu} < \|f_j\|_2, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases} \quad (17)$$

### 3.3 数值算法

根据前面的讨论, 本文算法步骤如下.

---

算法: IDAM

---

输入 数据集  $X = [X_1, X_2, \dots, X_k] \in \mathbf{R}^{d \times n}$ ; 参数  $\lambda$ , 子空间的数量  $k$ .

输出 亲和矩阵  $W^*$ .

步骤1 初始化参数, 即  $\mu = 10^{-4}$ ,  $\mu_{\max} = 10^{30}$ ,  $\rho = 1.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0$ ,  $Z = A = G = W = S = E = 0$ .

步骤2 更新  $Z$ , 通过公式(4).

步骤3 更新  $A$ , 通过公式(7), (8).

步骤4 更新  $G$ , 通过公式(11), (12).

步骤5 更新  $W$ , 通过公式(13).

步骤6 更新  $S$ , 通过公式(14).

步骤7 更新  $E$ , 通过公式(17).

步骤8 更新参数:  $Y_1 = Y_1 + \mu(X - XZ - E)$ ,  $Y_2 = Y_2 + \mu(W - S)$ ,  $Y_3 = Y_3 + \mu(W1_n - 1_n)$ ,  $Y_4 = Y_4 + \mu\left(W - \frac{G+G^T}{2}\right)$ ,  $Y_5 = Y_5 + \mu(G - |A|)$ ,  $Y_6 = Y_6 + \mu(A - Z)$ ,  $\mu = \min(\mu_{\max}, \rho\mu)$ .

步骤9 验证收敛条件:  $\|X - XZ - E\|_{\infty} < \varepsilon$ ,  $\|W - S\|_{\infty} < \varepsilon$ ,  $\|W1_n - 1_n\|_{\infty} < \varepsilon$ ,  $\left\|W - \frac{G+G^T}{2}\right\| < \varepsilon$ ,  $\|G - |A|\|_{\infty} < \varepsilon$ ,  $\|A - Z\|_{\infty} < \varepsilon$ .

---

若不满足收敛条件, 重复步骤2-步骤9, 若满足收敛条件, 结束.

值得注意的是, 本文的算法将直接获得亲和矩阵  $W$  而不是重构系数矩阵  $Z$ , 与相关工作相比省去了构建  $W$  的步骤. 类似相关工作, 本文的方法也是将  $W$  输入给 N-cuts 获得聚类结果.

### 3.4 算法分析

首先讨论算法的收敛性. 之所以无法从理论上证明本文提出算法的收敛性, 潜在的原因是第二个子问题是一个非凸问题. 但是, ADM 是一个常用的求解算法, 很多文章在处理复杂的模型时都采用该方法求解<sup>[5, 11, 21-22]</sup>, 且在没有收敛性的理论保证时, 通常能在实际运用中取得较好的收敛效果. 在后文的 4.4.2 子节中, 作者展示了在数据集 AR 和 CMU PIE 上, 随着迭代的进行本文算法的收敛条件的具体情况. 可以看出随着迭代次数的增加, 需要判定的收敛条件很快下降到一个很小的值, 这说明在实际运用中算法的收敛性较好.

其次分析算法的计算复杂度, 可以看到本文中算法的计算复杂度主要源于在迭代中更新  $Z, A, G, W, S, E$  产生的, 且在每个问题中都有闭解. 对于更新  $Z, W, S$ , 需要计算一个  $n \times n$  矩阵的逆和两个  $n \times n$  矩阵的乘积, 因此每次迭代的复杂度是  $O(n^3)$ . 对于更新  $A, G, E$ , 其计算复杂度较低. 综上所述, 本文算法在每一次迭代过程中的总计算复杂度为  $O(n^3)$ .

## §4 实验

### 4.1 实验设置

在这一部分, 进行了大量的子空间聚类实验去评估 IDAM 在子空间聚类过程中的实际表现.

1) 数据集: 为了论证 IDAM 的有效性, 在人造数据集和真实数据集上进行了大量实验. 用于评估的四个基准数据集包括 AR 人脸数据集<sup>[23]</sup>, CMU PIE 人脸数据集<sup>①</sup>, MNIST 手写体数字数据集<sup>②</sup>, COIL20 一般物品图像数据集<sup>[24]</sup>.

2) 对比算法: 将 IDAM 与一些经典的相关方法进行对比, 包括 LRR<sup>[8]</sup>, SSC<sup>[9]</sup>, BDR<sup>[10]</sup>, LSR1<sup>[6]</sup>, LSR2<sup>[6]</sup>, SMR<sup>[7]</sup>, AGCSC<sup>[5]</sup>, IDR<sup>[4]</sup>, 进而去验证 IDAM 的有效性.

---

① <https://www.ri.cmu.edu/project/pie-database/>

② <https://yann.lecun.com/exdb/mnist>

3) 参数设置: 由于不同参数对于评估的算法实验结果影响较大, 因此对于每一种比较的算法, 都采取其对应文献中建议的参数设置并保留其在每个实验数据集上得到的最好结果. 而对于IDAM, 本文的参数设置在IDR的基础上进行了再次细化实验以追求更好的实验效果. IDAM中 $\lambda$ 的初次参数选择区间为 $[0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 5, 10, 50, 100, 200, 1000]$ .

4) 评价指标: 为了能更全面的评估所有算法的性能, 使用获得的重构系数矩阵去构建无任何后处理的亲和矩阵. 本文采用了准确率(Accuracy, ACC), 归一化互信息(Normalized Mutual Information, NMI), 调整兰德系数(Adjusted Rand Index, ARI), F值(F-score)共计四个评价指标进行量化评价, 对于上述四个评价指标而言, 数值越高表示聚类性能越好.

#### 4.2 在人造数据集上实验

在三维空间中过原点的两条相交直线上分别选取采样点. 如图1, 这些数据点的坐标范围都在 $[-20, 20]$ 之间. 因为这两条直线是两个不同的子空间, 所以该子空间聚类问题的正确结果是聚类成两类, 体现在重构系数矩阵上是两个对角块.

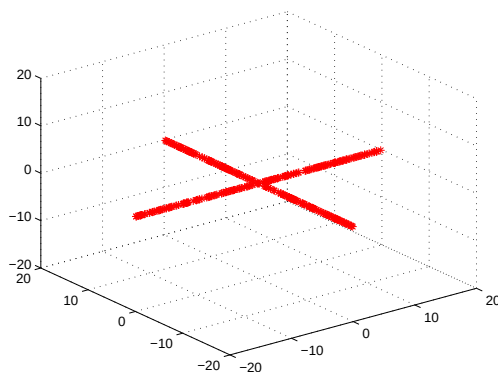


图1 人造数据集

在该数据集上, 主要和IDR进行了比较. 图2展示了本文提出的IDAM和IDR在人造数据集上获得的两个重构系数矩阵, 可以看到: IDAM的重构系数矩阵包含两个对角块, 而IDR的重构系数矩阵却包含了四个对角块. 通过对IDR相关工作的分析以及在具体实验的过程中可以发现IDR的对称和非负的限制会限制重构系数矩阵的表示能力, 主要体现在IDR计算出来的重构系数矩阵中的元素都是非负的, 但是一些数据点被某部分数据点线性表示的表示系数必然是负的, 这使得这样的表示系数不会被IDR挖掘, 因此出现了四个对角块, 但是为了保证幂等表示能够接近理想的重构系数矩阵, 对称和非负的限制是IDR不得不使用的限制条件. 直接对亲和矩阵追求幂等表示, 由于其自然是对称和非负的, 所以不用施加额外的限制条件, 从而避免了IDR的上述问题.



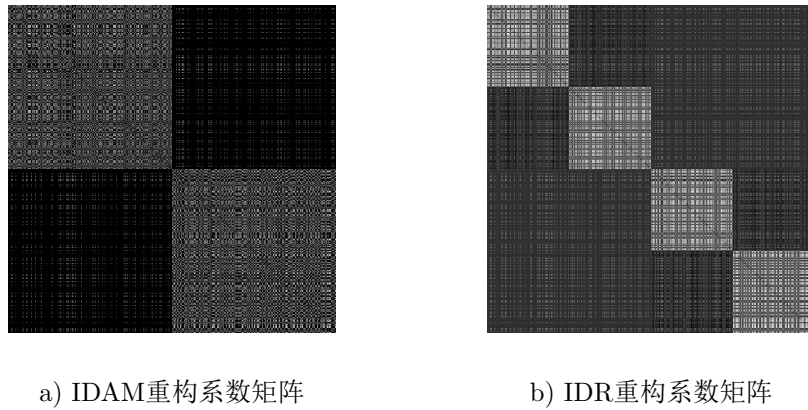


图2 IDAM, IDR的子空间聚类分块结果

从上述实验以及分析中不难发现IDAM是克服了IDR的缺陷的一个更加准确且普适的子空间聚类算法. 但人工合成的数据集是在未考虑噪声的情况下进行实验. 而真实数据集大部分都是存在噪声的, 故又在真实数据集中进行了大量实验.

#### 4.3 在真实数据集上实验

AR人脸数据集包含具备表情、光照和遮挡等变化的共4000多幅人脸图像, 是目前使用最为广泛的标准数据库之一. 在本文的实验中, 选取了8类, 每类选取了26张图像进行实验. CMU PIE数据集也经常被应用于各种子空间聚类实验. 它包括来自68个人的40000多张照片, 选取了8类图像, 每类选取60张人脸图像进行实验. MNIST手写数字数据集包含超过70000个手写体数字图像, 选取了5类, 每类120张图像进行实验. COIL20数据集是灰度图片集合, 包含了对20个物体从不同角度的拍摄, 每隔5度拍摄一张图像, 每个物体有72张图像, 共计1440张图像. 每张图像大小进行了统一处理为 $128 \times 128$ . 选取了15类物体, 每类70张作为实验对象进行数值实验.

然而, 上述数据集中每个图像的像素都位于 $[0, 255]$ 之间, 参照相关工作, 将每个像素值都除以255, 这一做法可以在不改变原始数据分布的情况下使得数据都位于 $[0, 1]$ 之间. 基于谱聚类的方法最后都需要将亲和矩阵输入给谱聚类获得最终结果, 谱聚类的过程中涉及 $K$ 均值聚类. 为了防止随机性, 统一固定了每组实验的 $K$ 均值初始中心以保证在不同次实验中同一算法、同一组数据在同一参数下得到的聚类结果是相同的. 详细实验结果见表2-表5.

表2 在AR数据集上的实验结果

| 方法    | ACC           | NMI           | ARI           | F-score       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| LRR   | 0.7981        | 0.8463        | 0.7614        | 0.7918        |
| SSC   | 0.7596        | 0.7771        | 0.6435        | 0.6882        |
| BDR   | 0.7067        | 0.6346        | 0.5093        | 0.5723        |
| SMR   | 0.7596        | 0.7771        | 0.6435        | 0.6882        |
| LSR1  | 0.7548        | 0.7717        | 0.6333        | 0.6794        |
| LSR2  | 0.7452        | 0.7613        | 0.6134        | 0.6623        |
| AGCSC | 0.7452        | 0.7623        | 0.6148        | 0.6635        |
| IDR   | 0.7837        | 0.8141        | 0.6988        | 0.7363        |
| IDAM  | <b>0.8365</b> | <b>0.8629</b> | <b>0.7902</b> | <b>0.8178</b> |

表3 在CMU PIE数据集上的实验结果

| 方法    | ACC           | NMI           | ARI           | F-score       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| LRR   | 0.9104        | 0.8960        | 0.8159        | 0.8397        |
| SSC   | 0.9083        | 0.8917        | 0.8100        | 0.8345        |
| BDR   | 0.7375        | 0.7174        | 0.5297        | 0.6029        |
| SMR   | 0.9396        | 0.9111        | 0.8738        | 0.8895        |
| LSR1  | 0.9000        | 0.8761        | 0.8170        | 0.8397        |
| LSR2  | 0.8896        | 0.8489        | 0.7731        | 0.8019        |
| AGCSC | 0.7479        | 0.7433        | 0.6328        | 0.6802        |
| IDR   | 0.9542        | 0.9484        | 0.9127        | 0.9236        |
| IDAM  | <b>0.9771</b> | <b>0.9644</b> | <b>0.9504</b> | <b>0.9565</b> |

表4 在MNIST数据集上的实验结果

| 方法    | ACC           | NMI           | ARI           | F-score       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| LRR   | 0.6533        | 0.4872        | 0.4305        | 0.5471        |
| SSC   | 0.6917        | 0.5611        | 0.4809        | 0.5874        |
| BDR   | 0.6417        | 0.4646        | 0.4287        | 0.5441        |
| SMR   | 0.7117        | 0.5606        | 0.5273        | 0.6247        |
| LSR1  | 0.6050        | 0.4863        | 0.4131        | 0.5325        |
| LSR2  | 0.5950        | 0.4809        | 0.4107        | 0.5316        |
| AGCSC | 0.7167        | 0.6200        | 0.5538        | 0.6463        |
| IDR   | 0.6533        | 0.6026        | 0.5542        | 0.6503        |
| IDAM  | <b>0.7300</b> | <b>0.6258</b> | <b>0.5609</b> | <b>0.6515</b> |

表5 在COIL20数据集上的实验结果

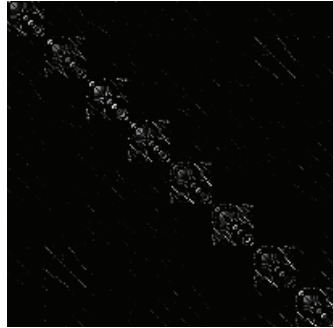
| 方法    | ACC           | NMI           | ARI           | F-score       |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| LRR   | 0.7629        | 0.8264        | 0.7101        | 0.7295        |
| SSC   | 0.8190        | 0.8262        | 0.6560        | 0.6812        |
| BDR   | 0.8295        | 0.8677        | 0.7719        | 0.7871        |
| SMR   | 0.7610        | 0.8233        | 0.6981        | 0.7188        |
| LSR1  | 0.7752        | 0.8145        | 0.6891        | 0.7103        |
| LSR2  | 0.7600        | 0.7605        | 0.6419        | 0.6664        |
| AGCSC | <b>0.9276</b> | <b>0.9553</b> | <b>0.9156</b> | <b>0.9213</b> |
| IDR   | 0.8152        | 0.8431        | 0.7486        | 0.7655        |
| IDAM  | 0.8514        | 0.8999        | 0.8249        | 0.8365        |

在表2-表5中, 对在不同指标下表现最好的算法进行了加粗标注. 综合各个指标的聚类结果, 可以直观的看到, 本文的算法在上述四个数据集中都获得了极为不错的表现. 在AR, MNIST和CMU PIE数据集上, IDAM各评价指标都取得了第一, 展现了最优的聚类表现.

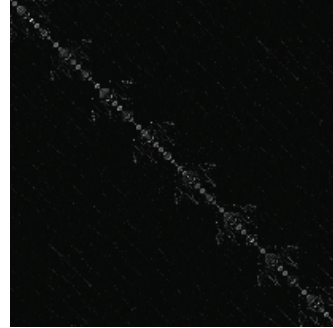
但是在COIL20数据集上, AGCSC拥有最好的表现. AGCSC是新近提出的引入了图卷积技术的子空间聚类方法, 该方法与本文其他所比较方法的一个主要区别是没有使用自表示的策略. 自表示策略对子空间聚类文章中常用的手写体数字和人脸数据集长期以来都取得了很好的效果. COIL20是图像数据集, 有些类别的数据无法使用自表示很好地进行特征提取, 而AGCSC采用的新策略可能更适用于COIL20数据集. 这可能是本文的方法在COIL20数据集上的效果仅次于AGCSC的原因. 不过, 本文的方法在所有采用自表示策略的方法中取得了最好的效果, 这也在一定程度上反映了该方法的有效性.

本文的算法IDAM是在算法IDR的基础上进行改进的子空间聚类算法. 从表中很显然的发现, 在每个数据集上IDAM都获得了胜过IDR的聚类结果, 这就足以说明作者的改进是成功的. 当然这主要归功于对称和非负限制的改进使IDAM算法能更好地挖掘数据间的关系进而得到更准确的聚类结果.

最后, 在图3中比较了AR数据集上IDAM和IDR计算出的重构系数矩阵来探究他们在真实数据集上效果差异的原因. 发现IDAM的重构系数矩阵相对于IDR的重构系数矩阵具有更加稠密的对角块. 这意味着IDAM在去掉对重构系数矩阵的非负以及对称约束后能挖掘到更多的同类数据间的关系, 这对聚类效果的提升起到了作用.



a) IDAM重构系数矩阵



b) IDR重构系数矩阵

图3 AR数据集上IDAM, IDR的子空间聚类分块结果

#### 4.4 综合分析

在本节对提出的IDAM方法进行全面分析, 其中包括对计算时间, 收敛性以及参数敏感性三部分的分析.

##### 4.4.1 时间分析

记录了IDAM与IDR在四个基准数据集上的耗费时间情况如表6所示.

表6 IDAM, IDR各数据集耗费时间情况(单位: 秒)

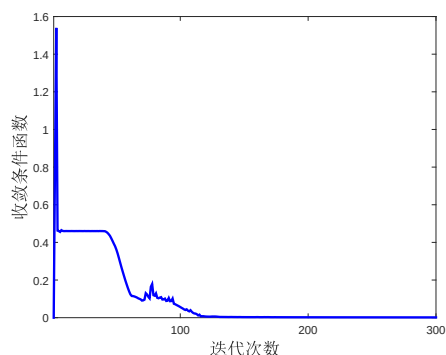
| 方法   | AR    | CMU PIE | MNIST  | COIL20 |
|------|-------|---------|--------|--------|
| IDAM | 26.14 | 68.7    | 125.01 | 81.31  |
| IDR  | 5.98  | 87.89   | 26.84  | 16.38  |

从表6中可以看出IDAM在多数情况下于时间方面相比与IDR并没有优势, 这是由于为了追求更普适更准确的子空间聚类效果去掉了关于重构系数矩阵对称和非负的限制, 很大程度上增加了模型求解的难度, 且牺牲掉了部分的计算时间. 但是相比于牺牲部分时间所带来的效果, 是值得的, 且IDAM的时间也在合理的范围之内, 也会把此问题作为今后研究的重点.

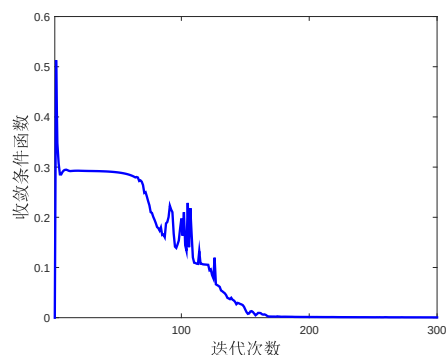
##### 4.4.2 收敛性分析

由于IDAM算法的收敛性无法直接证明, 在本节研究本文的算法在实际运用中的收敛情况. 根据算法的收敛准则, 将研究收敛条件函数的值随迭代次数的变化情况, 其中收敛条件函数为IDAM算法步骤9中所有收敛条件的最大值. 这里使用AR数据集和CMU PIE数据集为例. 在图4中, 绘制了IDAM的收敛条件函数随迭代次数变化情况示意图. 容易发现, IDAM的收敛条件

函数总体上下降较快,在不到200次的迭代中就能够下降到较低的值.当继续增大迭代次数时,收敛条件函数的值依然很低,展现出了较好的收敛效果.



a) AR数据集上关系示意图

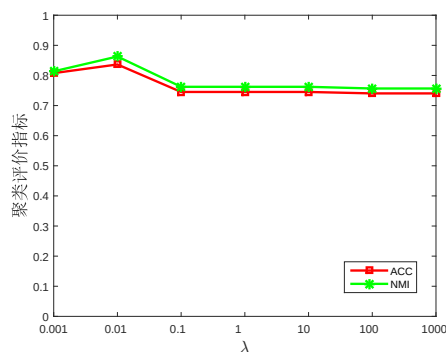


b) CMU PIE数据集上关系示意图

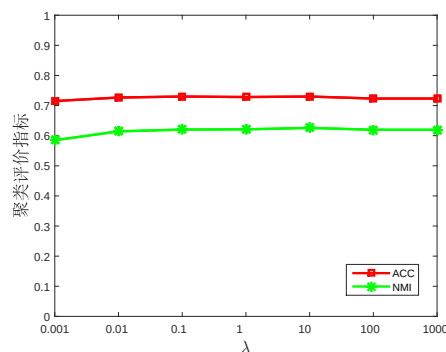
图4 IDAM的收敛条件函数随迭代次数变化情况

#### 4.4.3 参数敏感性分析

在实验过程中,相比于IDR包含两个参数,由于去掉了非负的限制,IDAM仅包含一个参数,参数更少对于这种无监督问题更加重要.而且在实验调参过程中发现IDAM受参数变化影响较小.IDAM的ACC, NMI聚类评价指标随参数变化情况见图5.



a) AR数据集上变化情况



b) MNIST数据集上变化情况

图5 IDAM的聚类评价指标随参数变化情况

从图5中可以直观的看出IDAM的有效性并不对参数的取值有极大的依赖性.因此可以充分说明IDAM是相比于IDR是有明显优势的,且是一个稳健有效的子空间聚类算法,因而本文的改进是有价值的.

## §5 结论

在本文中, 在IDR的基础上进行了改进, 提出了一种行之有效的子空间聚类算法IDAM. 在IDAM中, 克服了IDR会限制重构系数矩阵表示能力的缺陷, 并且解决了求解上的困难, 也使用IDAM在基准数据集上做了大量的子空间聚类实验以验证本文方法的有效性, 进一步提升子空间聚类算法的准确性及表示能力, 但仍存在算法速度不够快的局限性. 未来的工作, 作者将进一步研究快速求解算法, 以提升算法效率.

### 参考文献:

- [1] 郝雪, 彭国华. 基于SVD和稀疏子空间聚类的视频摘要[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(3): 485-492.
- [2] Wang Shiping, Chen Zhaoliang, Du Shide, et al. Learning deep sparse regularizers with applications to multi-view clustering and semi-supervised classification[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2022, 44(9): 5042-5055.
- [3] Peng Xi, Feng Jiashi, Xiao Shijie, et al. Structured autoencoders for subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Processing, 2018, 27(10): 5076-5086.
- [4] Wei Lai, Liu Shiteng, Zhou Rigui, et al. Learning idempotent representation for subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2024, 36(3): 1183-1197.
- [5] Wei Lai, Chen Zhengwei, Yin Jun, et al. Adaptive graph convolutional subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2023: 6262-6271.
- [6] Lu Canyi, Min Hai, Zhao Zhongqiu, et al. Robust and efficient subspace segmentation via least squares regression[C]//Proceedings of European Conference on Computer Vision. Heidelberg: Springer, 2012: 347-360.
- [7] Hu Han, Lin Zhouchen, Feng Jianjiang, et al. Smooth representation clustering[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2014: 3834-3841.
- [8] Liu Guangcan, Lin Zhouchen, Yan Shuicheng, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184.
- [9] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(11): 2765-2781.
- [10] Lu Canyi, Feng Jiashi, Lin Zhouchen, et al. Subspace clustering by block diagonal representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41(2): 487-501.
- [11] Zhang Changqing, Fu Huazhu, Hu Qinghua, et al. Generalized latent multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020, 42(1): 86-99.
- [12] Costeira J P, Kanade T. A multibody factorization method for independently moving objects[J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 29(3): 108-121.
- [13] Vidal R, Ma Y, Sastry S. Generalized principal component analysis (GPCA)[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(12): 1945-1959.
- [14] Fischler M A, Bolles R C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography[J]. Communications of the ACM, 1981, 24(6): 381-395.

- [15] Shi Jianbo, Malik J. Normalized cuts and image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905.
- [16] Tang Kewei, Xu Kaiqiang, Jiang Wei, et al. Selecting the best part from multiple Laplacian autoencoders for multi-view subspace clustering[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2023, 35(7): 7457-7469.
- [17] Lee M, Lee J, Lee H, et al. Membership representation for detecting block-diagonal structure in low-rank or sparse subspace clustering[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2015: 1648-1656 .
- [18] Zass R, Shashua A. A unifying approach to hard and probabilistic clustering[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2005: 294-301 .
- [19] Zass R, Shashua A. Doubly stochastic normalization for spectral clustering[C]//Proceedings of the 27th Advances in Neural Information Processing Systems. Montreal: Neural Information Processing Systems Press, 2006: 1569-1576 .
- [20] Lin Zhouchen, Chen Mingming, Ma Yi. The augmented Lagrange multiplier method for exact recovery of corrupted low-rank matrices[OL]. [2024-03-28].  
<https://arxiv.org/abs/1009.5055>.
- [21] Guo Jipeng, Sun Yanfeng, Gao Junbin, et al. Multi-attribute subspace clustering via auto-weighted tensor nuclear norm minimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2022, 31: 7191-7205.
- [22] 张莉, 韩靖敏, 钱妍, 等. 内外先验结合的多尺度低秩去噪方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2023, 35(4): 491-502.
- [23] Martinez A, Benavente R, The AR face database[OL]. [2024-03-28].  
<https://www.payititi.com/opendatasets/show-26508.html>.
- [24] Nene S A, Nayar S K, Murase H. Columbia university image library (COIL-20)[OL]. [2024-03-28]. <https://www.doc88.com/p-7788908259433.html>.

## Idempotent affinity matrix for subspace clustering

TANG Ke-wei, LI Dan-yang

(School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116082, China)

**Abstract:** The spectral clustering-based methods have become a hot topic due to its excellent performance in subspace clustering. The recently proposed idempotent representation has achieved superior results by pursuing the idempotent property of the reconstruction coefficient matrix. However, satisfying the idempotent property requires the reconstruction coefficient matrix to be non-negative and symmetric, which limits the representation capability of the reconstruction coefficient matrix. To overcome this limitation, this paper directly pursues the idempotent property of affinity matrix which is naturally non-negative and symmetric, and proposes idempotent affinity matrix for subspace clustering. The numerical algorithm is obtained by overcoming the difficulties in model solving. Comparative experiments on four benchmark datasets have confirmed the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** subspace clustering; idempotent representation; affinity matrix; spectral clustering-based methods

**MR Subject Classification:** 68T10; 65K10