

八元切触流形上的Bochner公式以及Bianchi恒等式

陈浩杰, 施云*

(浙江科技大学 理学院, 浙江杭州 310023)

摘要: 该文给出了八元切触流形上的Ricci恒等式, 并由此给出了八元切触流形上的Bochner公式. 文中给出了八元切触流形上的第一和第二Bianchi恒等式, 并由此得到了一个曲率恒等式.

关键词: 八元数; 八元切触流形; Bochner公式; Bianchi恒等式

中图分类号: O184

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0187-08

§1 引言

文献[1]给出了CR流形上的Bochner-型公式. 文献[2-6]给出了四元切触流形上的Bochner-型公式以及Bianchi恒等式. 文献[7]把上述公式推广到了切触Riemannian流形上.

本文研究八元切触流形上的几何与分析, 给出八元切触流形上的一系列Ricci恒等式, 进而把上述Bochner-型公式以及Bianchi恒等式发展到了八元切触流形上.

Biquard为了研究物理学上著名的AdS/CFT 对偶问题的四元与八元版本, 首先对四元切触几何和八元切触几何进行了研究, 给出了四元切触流形与八元切触流形的定义^[8]. 如今, 四元切触流形发展成了微分几何领域的一个热门研究对象(参见文献[2-10]及其参考文献). 八元数是复数和四元数向非结合代数的推广, 八元切触流形是CR流形和四元切触流形的八元推广. 八元数在理论物理的多个分支上有着广泛的应用, 如黑洞、弦理论和相对论等, 很多物理问题的背景流形就是四元切触流形和八元切触流形, 参见[11-12]等.

八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 是由一个15维的流形 M 以及余维数为7的分布 H 构成的. 局部的, H 可以表示成一个 $\mathbb{R}^7$ -值的1-形式 $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_7)$ 的核, 称 H 为水平空间. g 是一个Carnot-Carathéodory度量. $\mathbb{I}$ 是一个秩为7的丛

$$\mathbb{I} = \{a_1 I_1 + \dots + a_7 I_7 | a_1^2 + \dots + a_7^2 = 1\},$$

收稿日期: 2024-07-07 修回日期: 2026-04-20

*通讯作者, E-mail: shiyun@zust.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY22A010013); 国家自然科学基金(11801508; 11971425)

其中殆复结构 $I_1, \dots, I_7$ 是 H 上的自同构. 它们与度量 g 是Hermitian相容的, 即

$$g(I_\beta \cdot, I_\beta \cdot) = g(\cdot, \cdot),$$

$\beta = 1, \dots, 7$. 对任意的 $X, Y \in H$, 度量满足相容性条件

$$g(I_\beta X, Y) = d\theta_\beta(X, Y).$$

§2介绍了八元数和八元切触流形的一些基本概念和性质, 给出了八元切触流形上的Ricci恒等式. §3证明八元切触流形的Bochner-型公式. §4给出了八元切触流形上的第一和第二Bianchi恒等式, 并由此得到了一个曲率恒等式.

§2 八元数和八元切触流形

八元数集记为 $\mathbb{O}$. 记 $\mathbb{Z}_8 := \{0, \dots, 7\}$, $\mathbb{Z}_{8+} := \{1, \dots, 7\}$. 八元数上有一组基 $\{e_a\}$, 满足 $e_a e_0 = e_0 e_a, a \in \mathbb{Z}_8$, 以及

$$e_\alpha e_\beta = -\delta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma, \quad (1)$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{8+}$. (1)中的常数 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 关于 α, β, γ 是完全反对称的, 且当 $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega$ 时, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = +1$ (参见[13-15]及其参考文献), 其中

$$\Omega := \{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (4, 3, 5), (3, 6, 7), (6, 5, 1), (5, 7, 2), (7, 1, 4)\}.$$

$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 非零当且仅当 α, β, γ 是 Ω 中的一个轮换. 八元数的乘法表还可以由Fano记忆图展示(参见[13, 15]). 八元数 $\mathbb{O}$ 既不交换也不结合. 虽然八元数是非结合的, 但满足一些弱结合性, 称为Moufang恒等式(参见[14, (2.5)])

$$(uvu)x = u(v(ux)), \quad x(uvu) = ((xu)v)u, \quad u(xy)u = (ux)(yu),$$

其中 $u, v, x, y \in \mathbb{O}$. 易得

$$uvu = (uv)u = u(vu).$$

更多关于八元数和八元流形的研究参见[16-21]及其参考文献. 研究八元切触流形与研究四元切触流形相比主要的困难和不同点在于殆复结构 $I_1, \dots, I_7$ 不满足八元数的运算关系(1). 这是因为八元数 $\mathbb{O}$ 不满足结合律, 而 $I_1, \dots, I_7$ 是结合的. 尽管如此, 八元切触流形的殆复结构有如下性质.

命题2.1 [20, Proposition 2.4] 当 $\alpha \neq \beta \in \mathbb{Z}_{8+}$ 时, $\{I_\alpha, \alpha = 1, \dots, 7\}$ 满足

1. $(I_\alpha)^2 = -\text{id}$; 2. $I_\alpha I_\beta = -I_\beta I_\alpha$. 其中 id 表示恒等变换.

Biquard^[8]引入了八元切触流形上的正则联络, 如今称为Biquard联络.

定理2.1 [8, Theorem B] 令 g 为 H 上的Carnot-Carathéodory度量, 如果八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 满足八元切触结构. 则 H 上存在唯一的联络 ∇ , 且在 TM 上存在 H 唯一的补空间 V , 满足以下1)-5).

- 1) ∇ 保持 $H \oplus V$ 分解并保持度量;
- 2) 对于 $X, Y \in H$, 有 $T_{X,Y} = -[X, Y]_V$;
- 3) ∇ 保持 H 上的 $\text{Spin}(7)$ -结构, 即 $\nabla g = 0$;
- 4) 对于任意的 $R \in V$, H 上的自同态 $\cdot \rightarrow (T_R \cdot)_H$ 属于 $\mathfrak{so}_7^\perp$;
- 5) 补空间 V 上的联络由 V 与 $\mathbb{R}^7$ 等同以及 H 的自同态的自然同构诱导而成.

由于Biquard联络保持Carnot-Carathéodory度量, 故有

$$\nabla(d\theta_\alpha) \in \Lambda^1 H \otimes \mathfrak{so}(8) = \Lambda^1 H \otimes (\mathfrak{so}(7) \oplus \mathbb{R}^7),$$

且如果 $\Lambda^1 H \otimes \mathbb{R}^7$ 部分为零, 则联络保持 $\text{Spin}(7)$ 结构(参见[8, p84]). Biquard^[8]给出了补空间的精

确表达, 局部的, V 由向量场 $R_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_{8+}$ 生成, 满足

$$i_{R_\alpha} d\theta_\alpha|_H = 0, \quad i_{R_\alpha} d\theta_\beta|_H = -i_{R_\beta} d\theta_\alpha|_H, \quad \alpha \neq \beta, \quad (2)$$

以及 $\theta_\beta(R_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ ([8, Proposition II.1.7, II.1.9]), 其中 i 为内部积, 即对于任意的 $X \in H$, $i_{R_\alpha} d\theta_\beta(X) = d\theta_\beta(R_\alpha, X)$. $R_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_{8+}$ 称为Reeb向量场. 基本2-形式定义为

$$\omega_s|_H = d\theta_s|_H, \quad R \lrcorner \omega_s = 0, \quad R \in V. \quad (3)$$

命题2.2 (参见[20, Proposition 3.1]) 1) Biquard联络满足

$$\nabla d\theta_\alpha = -(i_{R_\beta} d\theta_\alpha)|_H \otimes d\theta_\beta.$$

由同构 $d\theta_\alpha \rightarrow R_\alpha$, 有

$$\nabla R_\alpha = -(i_{R_\beta} d\theta_\alpha)|_H \otimes R_\beta. \quad (4)$$

2) Biquard联络是 V 上的度量联络且满足

$$\nabla_X R = [X, R]_V, \quad X \in H, R \in V.$$

对于任意 $X, Y \in H$, 八元切触流形的挠率定义为

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (5)$$

曲率为 $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$, $R(A, B, C, D) := g(R(A, B)C, D)$;

八元切触Ricci曲率定义为 $\text{Ric}(X, Y) = \sum_{a=1}^8 g(R(X_a, X)Y, X_a)$;

数量曲率定义为 $S = \sum_{a=1}^8 \text{Ric}(X_a, X_a)$, 其中 X_a 是水平切子空间 H 上的局部标准正交基. 令

$$T(A, B, C) = g(T(A, B), C).$$

令 f 为八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 上的光滑函数, 对于任意 $A, B, C \in TM$, 定义

$$\nabla^2 f(A, B) = \nabla_A \nabla_B f - \nabla_{\nabla_A B} f,$$

$$\nabla^3 f(A, B, C) = (\nabla_A (\nabla^2 f))(B, C) = \nabla_A (\nabla^2 f(B, C)) - \nabla^2 f(\nabla_A B, C) - \nabla^2 f(B, \nabla_A C). \quad (6)$$

令 X_a 为水平切子空间 H 上的局部标准正交基, 八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 上的光滑函数 f 的水平梯

度 ∇f 定义为 $g(\nabla f, X) = df(X)$, 即 $\nabla f = \sum_{a=1}^8 df(X_a)X_a$, 它的范数为

$$|\nabla f|^2 = \sum_{a=1}^8 df(X_a)df(X_a).$$

八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 上的光滑函数 f 的水平SubLaplacian算子定义为

$$\Delta f = - \sum_{a=1}^8 \nabla^2 f(X_a, X_a).$$

有如下八元切触流形上的Ricci恒等式.

命题2.3 令 f 为八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 上的光滑函数, $R_s, s = 1, \dots, 7$ 为Reeb向量场, 有

$$\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X, Y) df(R_s),$$

$$\nabla^2 f(X, R_s) - \nabla^2 f(R_s, X) = T(R_s, X, \nabla f), \quad (7)$$

$$\nabla^3 f(X, Y, Z) - \nabla^3 f(Y, X, Z) = -R(X, Y, Z, \nabla f) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X, Y) \nabla^2 f(R_s, Z).$$

证 由挠率的定义(5)和基本2-形式的定义(3)有

$$T(X, Y) = -[X, Y]_V = -\sum_{s=1}^7 \theta_s([X, Y])R_s = \sum_{s=1}^7 d\theta_s(X, Y)R_s. \quad (8)$$

因此由命题2.1有

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) &= XYf - \nabla_X Yf - (YXf - \nabla_Y Xf) = \\ &= -T(X, Y)f = -\sum_{s=1}^7 d\theta_s(X, Y)R_s f = -\sum_{s=1}^7 \omega_s(X, Y)df(R_s). \end{aligned}$$

类似有

$$\nabla^2 f(X, R_s) - \nabla^2 f(R_s, X) = -T(X, R_s)f = T(R_s, X, \nabla f),$$

由梯度的定义, 最后一个等式成立. 更进一步有

$$\begin{aligned} \nabla^3 f(X, Y, Z) - \nabla^3 f(Y, X, Z) &= \nabla_X (\nabla^2 f(Y, Z)) - \nabla^2 f(\nabla_X Y, Z) - \nabla^2 f(Y, \nabla_X Z) - \\ &= (\nabla_Y (\nabla^2 f(X, Z)) - \nabla^2 f(\nabla_Y X, Z) - \nabla^2 f(X, \nabla_Y Z)) = \\ &= (XYZ - X\nabla_Y Z - \nabla_X YZ + \nabla_{\nabla_X Y} Z - Y\nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_X Z)f - \\ &= (YXZ - Y\nabla_X Z - \nabla_Y XZ + \nabla_{\nabla_Y X} Z - X\nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_Y Z)f = \\ &= -(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])Zf + \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]} Zf - \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z)f = \\ &= -T(X, Y)Zf + \nabla_{T(X, Y)} Zf - R(X, Y)Zf = -R(X, Y, Z, \nabla f) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X, Y)\nabla^2 f(R_s, Z). \end{aligned}$$

§3 SubLaplacian算子的Bochner-型公式

命题3.1 对于一个15维的八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 以及任意的 $X, Y, Z \in H$, 有

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = 0. \quad (9)$$

证 注意到

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(Y, Z) &= \nabla_X (T(Y, Z)) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z) = \\ &= \nabla_X \left(\sum_{s=1}^7 \omega_s(Y, Z)R_s \right) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(\nabla_X Y, Z)R_s - \sum_{s=1}^7 \omega_s(Y, \nabla_X Z)R_s = \\ &= \nabla_X \left(\sum_{s=1}^7 g(I_s Y, Z)R_s \right) - \sum_{s=1}^7 g(I_s \nabla_X Y, Z)R_s - \sum_{s=1}^7 g(I_s Y, \nabla_X Z)R_s = \\ &= \sum_{s=1}^7 g((\nabla_X I_s)Y, Z)R_s + \sum_{s=1}^7 g(I_s Y, Z)\nabla_X R_s = \\ &= \sum_{s,t=1}^7 g(\omega_s(R_t, X)I_t Y, Z)R_s + \sum_{s,t=1}^7 g(I_s Y, Z)\omega_s(R_t, X)R_t = \\ &= \sum_{s,t=1}^7 [\omega_t(R_s, X) + \omega_s(R_t, X)]g(I_s Y, Z)R_t = 0, \end{aligned}$$

其中由(8)可得第二个等式成立, 由(4)可得倒数第二个等式成立, 由(2)可得最后一个等式成立.

由此可得如下八元切触版本的Bochner-型公式.

定理3.1 对于一个15维的八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$, f 为八元切触流形 $(M, g, \mathbb{I})$ 上的光滑函数, 有

$$-\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - g(\nabla\Delta f, \nabla f) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \sum_{s=1}^7 T(R_s, I_s \nabla f, \nabla f) + 2 \sum_{s=1}^7 \nabla^2 f(R_s, I_s \nabla f). \quad (10)$$

证 由定义可知

$$-\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum_{a,b=1}^8 \nabla^3 f(X_a, X_a, X_b) df(X_b) + \sum_{a,b=1}^8 \nabla^2 f(X_a, X_b) \nabla^2 f(X_a, X_b) = \sum_{a,b=1}^8 \nabla^3 f(X_a, X_a, X_b) df(X_b) + |\nabla^2 f|^2, \quad (11)$$

其中 X_a 是水平切子空间 H 上的局部标准正交基. 方便起见, 从下文开始, 同一个式子中如果指标重复出现则表示关于这个指标求和, 例如 $\nabla^2 f(e_a, e_b) \nabla^2 f(X_a, X_b)$ 表示

$$\sum_{a,b=1}^8 \nabla^2 f(X_a, X_b) \nabla^2 f(X_a, X_b).$$

多次应用Ricci恒等式(6), 有

$$\begin{aligned} \nabla^3 f(X_a, X_a, X_b) &= \nabla_{X_a}(\nabla^2 f(X_a, X_b)) - \nabla^2 f(\nabla_{X_a} X_a, X_b) - \nabla^2 f(X_a, \nabla_{X_a} X_b) = \\ &\nabla_{X_a} \left(\nabla^2 f(X_b, X_a) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) df(R_s) \right) - \\ &\nabla^2 f(X_b, \nabla_{X_a} X_a) + \sum_{s=1}^7 \omega_s(\nabla_{X_a} X_a, X_b) df(R_s) - \\ &\nabla^2 f(\nabla_{X_a} X_b, X_a) + \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, \nabla_{X_a} X_b) df(R_s) = \\ &\nabla^3 f(X_a, X_b, X_a) - \nabla_{X_a}(df(T(X_a, X_b))) + T(\nabla_{X_a} X_a, X_b) f + T(X_a, \nabla_{X_a} X_b) f = \\ &\nabla^3 f(X_a, X_b, X_a) - (\nabla_{X_a} df)(T(X_a, X_b)) - (\nabla_{X_a}(T(X_a, X_b))) f + \\ &T(\nabla_{X_a} X_a, X_b) f + T(X_a, \nabla_{X_a} X_b) f = \\ &\nabla^3 f(X_a, X_b, X_a) - \nabla^2 f(X_a, T(X_a, X_b)) - (\nabla_{X_a} T)(X_a, X_b) f = \\ &\nabla^3 f(X_a, X_b, X_a) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) \nabla^2 f(X_a, R_s) = \\ &\nabla^3 f(X_b, X_a, X_a) - R(X_a, X_b, X_a, \nabla f) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) (\nabla^2 f(R_s, X_a) + \nabla^2 f(X_a, R_s)), \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式成立是由于(9). (11)右边第一部分等于

$$\begin{aligned} \nabla^3 f(X_a, X_a, X_b) df(X_b) &= \nabla^3 f(X_b, X_a, X_a) df(X_b) - R(X_a, X_b, X_a, \nabla f) df(X_b) - \\ &\sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) (\nabla^2 f(R_s, X_a) + \nabla^2 f(X_a, R_s)) df(X_b) = \\ &\nabla_{X_b}(\nabla^2 f(X_a, X_a)) df(X_b) - (\nabla^2 f(\nabla_{X_b} X_a, X_a)) df(X_b) - (\nabla^2 f(X_a, \nabla_{X_b} X_a)) df(X_b) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) (\nabla^2 f(R_s, X_a) + \nabla^2 f(X_a, R_s)) \text{d}f(X_b) = \\
& -\text{d}(\Delta f)(X_b) \text{d}f(X_b) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \sum_{s=1}^7 \omega_s(X_a, X_b) (2\nabla^2 f(R_s, X_a) + \\
& T(R_s, X_a, \nabla f)) \text{d}f(X_b) = \\
& -\text{d}(\Delta f)(X_b) \text{d}f(X_b) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \sum_{s=1}^7 T(R_s, I_s \nabla f, \nabla f) + 2 \sum_{s=1}^7 \nabla^2 f(R_s, I_s \nabla f).
\end{aligned}$$

因此可以得到(10).

§4 八元切触流形上的Bianchi型公式

Bianchi恒等式是微分几何研究中一个重要的工具, Riemannian流形, CR流形, 四元切触流形上的Bianchi都对研究相应的流形起到了重要的作用. Bianchi恒等式在Ricci流的研究中也扮演着重要的角色^[22], 特别在曲率演化方程^[23]和Harnack估计中起到了重要的作用^[24]. 这里研究八元切触流形上的Bianchi恒等式, 这是Bianchi恒等式的八元推广. 定义 $b(A, B, C) := \sum_{(A,B,C)} \{(\nabla_A T)(B, C) + T(T(A, B), C)\}$, 其中 $\sum_{(A,B,C)}$ 表示三个切向量的循环和. 因此有如下

八元切触版本的第一Bianchi恒等式.

定理4.1 八元切触流形上的曲率 R 满足

$$\sum_{(A,B,C)} \{R(A, B, C, D)\} = g(b(A, B, C), D) = b(A, B, C, D), \quad (12)$$

其中 $A, B, C, D \in TM$.

证 由 $R(A, B)C$ 的定义以及Jacobi恒等式, 有

$$\begin{aligned}
& b(A, B, C) = \nabla_A(T(B, C)) - T(\nabla_A B, C) - T(B, \nabla_A C) + \\
& \nabla_B(T(C, A)) - T(\nabla_B C, A) - T(C, \nabla_B A) + \nabla_C(T(A, B)) - T(\nabla_C A, B) - T(A, \nabla_C B) + \\
& \nabla_{T(A,B)} C - \nabla_C(T(A, B)) - [T(A, B), C] + \nabla_{T(B,C)} A - \nabla_A(T(B, C)) - [T(B, C), A] + \\
& \nabla_{T(C,A)} B - \nabla_B(T(C, A)) - [T(C, A), B] = \\
& -\nabla_{\nabla_A B} C + \nabla_C \nabla_A B + [\nabla_A B, C] - \nabla_B \nabla_A C + \nabla_{\nabla_A C} B + [B, \nabla_A C] - \\
& \nabla_{\nabla_B C} A + \nabla_A \nabla_B C + [\nabla_B C, A] - \nabla_C \nabla_B A + \nabla_{\nabla_B A} C + [C, \nabla_B A] - \\
& \nabla_{\nabla_C A} B + \nabla_B \nabla_C A + [\nabla_C A, B] - \nabla_A \nabla_C B + \nabla_{\nabla_C B} A + [A, \nabla_C B] + \\
& \nabla_{\nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]} C - [T(A, B), C] + \nabla_{\nabla_B C - \nabla_C B - [B, C]} A - [T(B, C), A] + \\
& \nabla_{\nabla_C A - \nabla_A C - [C, A]} B - [T(C, A), B] = \sum_{(A,B,C)} R(A, B)C.
\end{aligned} \quad (13)$$

由上述第一Bianchi恒等式, 可以得到如下曲率公式.

定理4.2 八元切触流形上的曲率 R 满足

$$\begin{aligned}
& R(A, B, C, D) - R(C, D, A, B) = \\
& \frac{1}{2}b(A, B, C, D) + \frac{1}{2}b(B, C, D, A) - \frac{1}{2}b(A, C, D, B) - \frac{1}{2}b(A, B, D, C),
\end{aligned} \quad (14)$$

其中 $A, B, C, D \in TM$.

证 由曲率张量 R 的定义, 有 $R(A, B, C, D) = -R(B, A, C, D)$, 由于保持度量的线性联络是反对称的, 有 $R(A, B, C, D) = -R(A, B, D, C)$. 由(12), 可以得到(14)成立.

更进一步, 可以得到八元切触流形上的第二Bianchi恒等式.

定理4.3 八元切触流形上的曲率 R 满足

$$(\nabla_A R)(B, C, D, E) + (\nabla_B R)(C, A, D, E) + (\nabla_C R)(A, B, D, E) = -\langle b(A, B, C)D, E \rangle,$$

其中 $A, B, C, D \in TM$.

证 由Biquard联络的定义有

$$\begin{aligned} (\nabla_A R)(B, C, D, E) &= A\langle R(B, C)D, E \rangle - R(\nabla_A B, C, D, E) - R(B, \nabla_A C, D, E) - \\ &R(B, C, \nabla_A D, E) - R(B, C, D, \nabla_A E) = \\ &\langle \nabla_A (R(B, C)D), E \rangle - \langle R(\nabla_A B, C)D, E \rangle - \langle R(B, \nabla_A C)D, E \rangle - \langle R(B, C)\nabla_A D, E \rangle. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &(\nabla_A R)(B, C, D, E) + (\nabla_B R)(C, A, D, E) + (\nabla_C R)(A, B, D, E) = \\ &\langle \nabla_A (R(B, C)D) + \nabla_B (R(C, A)D) + \nabla_C (R(A, B)D), E \rangle - \\ &\langle R(\nabla_A B, C)D + R(C, \nabla_B A)D, E \rangle - \\ &\langle R(\nabla_C A, B)D + R(B, \nabla_A C)D, E \rangle - \langle R(\nabla_B C, A)D + R(A, \nabla_C B)D, E \rangle - \\ &\langle R(B, C)\nabla_A D, E \rangle - \langle R(C, A)\nabla_B D, E \rangle - \langle R(A, B)\nabla_C D, E \rangle, \end{aligned}$$

由 $R(A, B)C$ 的定义以及Jacobi恒等式有

$$\begin{aligned} \nabla_A (R(B, C)D) + \nabla_B (R(C, A)D) + \nabla_C (R(A, B)D) &= R(A, B)\nabla_C D + R(B, C)\nabla_A D + \\ &R(C, A)\nabla_B D + R([A, B], C)D + R([B, C], A)D + R([C, A], B)D. \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} &(\nabla_A R)(B, C, D, E) + (\nabla_B R)(C, A, D, E) + (\nabla_C R)(A, B, D, E) = \\ &-\left\langle \sum_{(A, B, C)} (R(A, B)C)D, E \right\rangle = -\langle b(A, B, C)D, E \rangle. \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] Greenleaf A. The first eigenvalue of a sublaplacian on a pseudohermitian manifold[J]. Comm PDE, 1985, 10(2): 191-217.
- [2] Ivanov S, Minchev I, Vassilev D. Extremals for the Sobolev inequality on the seven-dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem[J]. J Eur Math Soc, 2010, 12(4): 1041-1067.
- [3] Ivanov S, Vassilev D. Extremals for the Sobolev Inequality and the quaternionic contact Yamabe Problem[M]. London: World Scientific, 2011.
- [4] Ivanov S, Petkov A, Vassilev D. The sharp lower bound of the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a quaternionic contact manifold[J]. J Geom Anal, 2014, 24(2): 756-778.
- [5] Ivanov S, Petkov A, Vassilev D. The sharp lower bound of the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a quaternionic contact manifold in dimension seven[J]. Nonlinear Anal, 2013, 93: 51-61.
- [6] Ivanov S, Vassilev D. The Lichnerowicz and Obata first eigenvalue theorems and the Obata uniqueness result in the Yamabe problem on CR and quaternionic contact manifolds[J]. Nonlinear Anal, 2015, 126: 262-323.

- [7] Wu Feifan, Wang Wei. The Bochner-type formula and the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a contact Riemannian manifold[J]. Differential Geom Appl, 2014, 37: 66-88.
- [8] Biquard O. Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques[J]. Astérisque, 2000, 265.
- [9] Wan Dongrui. The continuity and range of the quaternionic Monge-Ampère operator on quaternionic space[J]. Math Z, 2017, 285(1-2): 461-478.
- [10] Chang Der-Chen, Duong Xuan Thinh, Li Ji, et al. An explicit formula of Cauchy-Szegő kernel for quaternionic Siegel upper half space and applications[J]. Indiana Univ Math J, 2021, 70(6): 2451-2477.
- [11] Baez J C, Huerta J. The strangest numbers in string theory[J]. Scient Amer, 2011, 304: 60-65.
- [12] Lüst D, Malek E, Szabo R J. Non-geometric Kaluza-Klein monopoles and magnetic duals of M-theory R-flux backgrounds[J]. J High Energy Phys, 2017, 10: 1-22.
- [13] Baez J. The octonions[J]. Bull Amer Math Soc, 2002, 39(2): 145-205.
- [14] Wang Haimeng, Wang Wei. On octonionic regular functions and the Szegő projection on the octonionic Heisenberg group[J]. Complex Anal Oper Theory, 2014, 8(6): 1285-1324.
- [15] 夏微, 王海燕. 八元数空间中的Möbius加法与旋转算子[J]. 中国科学: 数学, 2024, 54: 1-14.
- [16] Allcock D. Reflection groups on the octave hyperbolic plane[J]. J Algebra, 1999, 213: 467-498.
- [17] Li Xingmin, Peng Lizhong, Qian Tao. Cauchy integrals on Lipschitz surfaces in octonionic space[J]. J Math Anal Appl, 2008, 343: 763-777.
- [18] Wang Haiyan, Ren Guangbin. Octonion analysis of several variables[J]. Commun Math Stat, 2014, 2(2): 163-185.
- [19] Xia Wei, Wang Haiyan. The Möbius addition and generalized Laplace-Beltrami operator in octonionic space[J]. Adv Appl Clifford Algebr, 2024, 34(3): No. 27.
- [20] Shi Yun, Wang Wei. The Yamabe operator and invariants on octonionic contact manifolds and convex cocompact subgroups of $F_{4(-20)}$ [J]. Ann Mat Pura Appl, 2021, 200(6): 2597-2630.
- [21] Xu Zhenghua. Bohr theorems for slice regular functions over octonions[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2021, 151(5): 1595-1610.
- [22] Hamilton Richard S. Four-manifolds with positive curvature operator[J]. J Differ Geom, 1986, 24: 153-179.
- [23] 赵春莉, 卢卫君. 扩展的Bianchi恒等式及其在几何流演化方程中的应用[J]. 高校应用数学学报, 2014, 29(3): 319-332.
- [24] Hamilton Richard S. The Harnack estimate for the Ricci flow[J]. J Differ Geom, 1993, 37(1): 225-243.

The Bochner-type formula and Bianchi identities on octonionic contact manifolds

CHEN Hao-jie, SHI Yun

(Department of Mathematics, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Give the Ricci identities on octonionic contact manifolds and prove the octonionic contact version of the Bochner-type formula. Give the first and second Bianchi identity on octonionic contact manifolds, and using them to given a curvature identity.

Keywords: Octonion; Octonionic contact manifolds; Bochner-type formula; Bianchi identities

MR Subject Classification: 53D10; 30G35; 53C17