

Orlicz空间内的三角逼近

陈琳^{1,2,3}, 吴嘎日迪^{1,2,3,*}

(1. 内蒙古师范大学 数学科学学院, 内蒙古呼和浩特 010022;

2. 无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室, 内蒙古呼和浩特 010022;

3. 内蒙古自治区应用数学中心, 内蒙古呼和浩特 010022)

摘要: 该文利用Abel变换、Hölder不等式以及Fourier分析的相关技巧, 研究了满足Lipschitz条件的函数在Orlicz空间内借助三角多项式逼近的相关问题. 通过对序列 $(a_{n,k})$ 和 $(a_{n,n-k})$ 赋予不同的条件, 得到不同的三角多项式, 并给出了不同三角多项式逼近方式下的逼近阶.

关键词: 三角逼近; Orlicz空间; 逼近阶

中图分类号: O174.41

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0180-07

§1 引言

定义在 $\mathbf{R}$ 上且满足如下条件的实值函数 $M(u)$ 称为 N 函数.

1) $M(u)$ 为偶的连续凸函数且 $M(0) = 0$;

2) 当 $u > 0$ 时, $M(u) > 0$;

3) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$.

关于 N 函数的性质详情见文献[1]的论述. 本文以 $L_M^*[0, 2\pi]$ (简记为 L_M^*)表示由 N 函数 $M(u)$ 生成的以 2π 为周期的周期函数构成的Orlicz空间. 对于 $f \in L_M^*$, 其Orlicz范数为

$$\|f\|_M = \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} f(x)v(x)dx \right|,$$

其中 $\rho(v; N) = \int_0^{2\pi} N(v(x))dx$ 表示 $v(x)$ 关于 $N(v)$ 的模.

由文献[1], Orlicz范数还有另外一种计算方法

$$\|f\|_M = \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} \left(1 + \int_0^{2\pi} M(\alpha f(x))dx \right).$$

收稿日期: 2024-03-22 修回日期: 2025-02-09

*通讯作者, E-mail: wgrd@imnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(11761055); 内蒙古师范大学自主科研项目(KJJYZX2026099); 内蒙古自治区一流学科科研专项项目(YLXKZX-NSD-001); 内蒙古自治区高校创新科研团队计划(NMGIRT2414)

对 $f \in L_M^*$, 记函数 f 在 x 点处 Fourier 级数的前 $n+1$ 项部分和为

$$S_n(f; x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^n U_k(f; x).$$

称 $S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n U_k(f; x)$ 为 n 阶三角多项式, 由文献[2]知, $S_n(f; x)$ 还可以表示为

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

其中 $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ 为 n 阶 Dirichlet 核.

记 $f \in L_M^*$ 的连续模为 $\omega(f, \delta)_M = \sup_{0 < |h| \leq \delta} \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_M$. 对 $\alpha > 0$, 若 $\omega(f, \delta)_M = O(\delta^\alpha)$,

则 $f \in \text{Lip}\alpha$.

定义 $\tau_n(f; x) := \sum_{k=0}^n a_{n,k} S_k(f; x)$, 任意 $n \geq 0$, 其中 $T = (a_{n,k})$ 表示一个下三角实矩阵, 使得

当 $k \leq n$ 时, $a_{n,k} \geq 0$; 当 $k > n$ 时, $a_{n,k} \equiv 0$ ($k, n = 0, 1, 2, \dots$), 且 $\sum_{k=0}^n a_{n,k} = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

定义 $T_n(f; x) := \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} S_k(f; x)$.

若当 $k \leq n$ 时, 取 $a_{n,k} = \frac{1}{n+1}$; 当 $k > n$ 时, 取 $a_{n,k} = 0$, 则此时将 $\tau_n(f; x)$ 记为 $\sigma_n(f; x)$, 其

中 $\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) 为 f 的 $n+1$ 阶 Cesàro 平均.

令 $f \in L_M^*$, $g_n(x)$ 表示任意 n 阶三角多项式, $E_n(f)_M = \min_{g_n(x)} \|f(x) - g_n(x)\|_M$ 为 n 阶三角多项式逼近函数 f 的最佳逼近, 并将这种近似方法称为三角逼近.

由文献[2]知, 三角逼近理论起源于1885年Weierstrass创立的逼近定理, 历经一百多年, 该领域研究经久不衰, 并且这种近似被广泛应用于信号分析领域, 比如参考[3-11]. 文献[3]中指出, 若 S_k 和 τ_n 表示信息的输入和输出序列, 则 $T \equiv (a_{n,k})$ 表示为数字滤波器. 通过给 $(a_{n,k})$ 赋予不同的形式或满足不同的条件, 可以得到各种各样的滤波器. 比如当 $a_{n,k} = \frac{1}{n+1}$ 时, 可得到一个非常流行的数字滤波器, 叫做 Cesàro 滤波器, 它对 $f(x)$ 的滤波结果为上述 f 的 $n+1$ 阶 Cesàro 平均 $\sigma_n(f; x)$.

滤波可以去除信息中的噪声等, 经过滤波后的函数更能呈现关键的特征, 利用这样的函数再去逼近其他函数, 更能捕捉目标函数的主要特征, 提高逼近的效果与准确性^[12]. 因此, 三角逼近在函数逼近问题的研究中充当着很重要的角色, 但大部分文献均是在 L_p 空间内进行的研究, 而 Orlicz 空间是 L_p 空间实质性的推广与衍生, 其拓扑结构远比 L_p 空间要复杂的多, 所以在 Orlicz 空间内研究三角逼近问题更具有一定的难度和理论意义^[13].

在本文中, C 在不同处表示不同的常数.

§2 相关记号与引理

记 $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$; $\Delta_k a_{n,k} = a_{n,k} - a_{n,k+1}$.

设一非负序列 $a := (a_n)$, 若存在一常数 $C = C(a)$ (仅取决于序列 a), 当 $n \geq m$ 时, 有 $a_n \leq Ca_m$, 则称序列 a 几乎单调递减, 记 $a \in \text{AMDS}$; 当 $n \geq m$ 时, 有 $Ca_n \geq a_m$, 则称序列 a 几乎单调递增, 记 $a \in \text{AMIS}$.

序列 $(a_{n,k}) \in \text{AMDS}$, 这意味着对于所有的 n, k 从 $0, 1, 2, \dots, n$ 均满足 $k \geq m$ 时, 有 $a_{n,k} \leq Ca_{n,m}$; 若 $(a_{n,k}) \in \text{AMIS}$, 对任意 n, k 从 $0, 1, 2, \dots, n$ 均满足 $k \geq m$ 时, 有 $Ca_{n,k} \geq a_{n,m}$.

设一非负序列 $a := (a_n)$, 若 $\sum_{k=0}^{m-1} |\Delta a_k| \leq C(a)a_m$ 对任意自然数 m 均成立; 或当 $m \leq N$ 时, 序列 a 只有有限个非零项且最后一个非零项是 a_N , 则称序列 a 为前段有界变差序列, 即 $a \in \text{HBVS}$.

对所有的 n , 且 $0 \leq m \leq n$, 有 $\sum_{k=0}^{m-1} |\Delta_k a_{n,k}| \leq C a_{n,m}$, 则称序列 $a_n := (a_{n,k})_{k=0}^\infty \in \text{HBVS}$.

设一非负序列 $a := (a_n)$, 若 $\sum_{k=m}^\infty |\Delta a_k| \leq C(a)a_m$ 对任意自然数 m 均成立, 则称序列 a 为剩余有界变差序列, 即 $a \in \text{RBVS}$.

对所有的 n , 且 $0 \leq m \leq n$, 有 $\sum_{k=m}^\infty |\Delta_k a_{n,k}| \leq C a_{n,m}$, 则称序列 $a_n := (a_{n,k})_{k=0}^\infty \in \text{RBVS}$.

由文献[14-15]知, $\text{RBVS} \subset \text{AMDS}$; $\text{HBVS} \subset \text{AMIS}$.

引理2.1 若 $f \in \text{Lip}\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 则存在 n 阶三角多项式 t_n , 使得 $\|f - t_n\|_M = O(n^{-\alpha})$.

证 首先证明一个简单事实, 对于满足 $\rho(v; N) = \int_a^b N(v(x))dx \leq 1$ 的 $\{v(x)\}$, 存在常数 $C > 0$, 使得 $|v(x)| \leq C$ a.e. 于 $[a, b]$. 否则, 对于任意常数 $M > 0$, 总存在满足 $\rho(v; N) = \int_a^b N(v(x))dx \leq 1$ 的 $v(x)$, 以及 $[a, b]$ 的正测度子集 $E \subset [a, b]$ ($mE > 0$), 使得 $|v(x)| > M$ ($x \in E$). 由 N 函数的性质 $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{N(v)}{v} = \infty$ 和 N 函数的偶性 (N 函数是偶函数也是凸函数), 有

$$\rho(v; N) = \int_a^b N(v(x))dx \geq \int_E N(v(x))dx \geq \int_E |v(x)|dx > M \cdot mE.$$

这与 $\rho(v; N) = \int_a^b N(v(x))dx \leq 1$ 不符.

由文献[15]的引理1知, 存在 n 阶三角多项式 $t_n(x)$, 使得 $\|f(x) - t_n(x)\|_{L_1} = O(n^{-\alpha})$. 故

$$\begin{aligned} \|f - t_n\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))v(x)dx \right| \leq \\ &C \left| \int_0^{2\pi} |f(x) - t_n(x)|dx \right| \leq C \|f(x) - t_n(x)\|_{L_1} = O(n^{-\alpha}). \end{aligned}$$

引理2.2 若 $f \in \text{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, 则 $\|\sigma_n(f) - f\|_M = O(n^{-\alpha})$.

证 因为

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f) - f\|_M &= \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} (\sigma_n(f; x) - f(x))v(x)dx \right| \leq \\ &C \left| \int_0^{2\pi} |\sigma_n(f; x) - f(x)|dx \right| \leq C \|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{L_1}, \end{aligned}$$

由文献[15]的引理2知, $\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{L_1} = O(n^{-\alpha})$. 故 $\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-\alpha})$.

§3 主要定理

定理3.1 设 $f \in \text{Lip}\alpha$, 若 $0 < \alpha < 1$ 且 $\sum_{k=-1}^{n-1} |\Delta_k a_{n,k}| = O(n^{-1})$, 其中 $a_{n,-1} = 0$, 则

$$\|T_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-\alpha}).$$

证 根据Abel变换, 且 $\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f; x)$, 则

$$\begin{aligned} T_n(f; x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} (S_k(f; x) - f(x)) = \\ &\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1}) \sum_{i=0}^k (S_i(f; x) - f(x)) + a_{n,0} \sum_{k=0}^n (S_k(f; x) - f(x)) = \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1})(k+1)(\sigma_k(f; x) - f(x)) + a_{n,0}(n+1)(\sigma_n(f; x) - f(x)).$$

再根据引理2.2, 由 $\|\sigma_n(f) - f\|_M = O(n^{-\alpha})$, 知 $\|\sigma_n(f) - f\|_M = O((n+1)^{-\alpha})$, 故

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - f(x)\|_M &\leq \\ \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1}|(k+1)\|\sigma_k(f; x) - f(x)\|_M + a_{n,0}(n+1)\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_M &\leq \\ C \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1}|(k+1)^{1-\alpha} + Ca_{n,0}(n+1)^{1-\alpha} &\leq \\ C(n+1)^{1-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1}| + a_{n,0} \right). \end{aligned}$$

由假设条件 $\sum_{k=-1}^{n-1} |\Delta_k a_{n,k}| = O(n^{-1})$, 其中 $a_{n,-1} = 0$, 有

$$|a_{n,-1} - a_{n,0}| + |a_{n,0} - a_{n,1}| + \cdots + |a_{n,n-1} - a_{n,n}| = O(n^{-1}).$$

故

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,n-k} - a_{n,n-k-1}| + a_{n,0} =$$

$$|a_{n,n} - a_{n,n-1}| + |a_{n,n-1} - a_{n,n-2}| + \cdots + |a_{n,1} - a_{n,0}| + |a_{n,0} - a_{n,-1}| = O(n^{-1}).$$

所以 $\|T_n(f; x) - f(x)\|_M \leq C(n+1)^{1-\alpha} n^{-1} \leq Cn^{-\alpha} = O(n^{-\alpha})$, 从而定理3.1得证.

定理3.2 设 $f \in \text{Lip}1$, $\beta > 0$, 若 $(k+1)^{-\beta} a_{n,n-k} \in \text{HBVS}$ 且 $(n+1)a_{n,0} = O(1)$, 则

$$\|T_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-1}).$$

证 令 t_n 和 t_m 是引理2.1中的 n 阶和 m 阶三角多项式, 对 $m \leq n$, 由文献[15]中定理5的证明过程知 $S_m(t_n; x) = t_m$, $S_m(f; x) - t_m = S_m(f - t_n; x)$. 因此

$$T_n(f; x) - \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} t_k(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} S_k(f - t_n; x),$$

其中

$$S_k(f - t_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x+u) - t_n(x+u)\} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du.$$

再根据Orlicz空间内的Hölder不等式, 有

$$\begin{aligned} \|T_n(f; x) - \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} t_k\|_M &= \\ \left\| \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x+u) - t_n(x+u)\} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du \right\|_M &= \\ \sup_{\rho(v; N) \leq 1} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x+u) - t_n(x+u)\} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}} du v(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (1)$$

设 $K_n(u) = \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$, 则(1)可放大为

$$C \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x+u) - t_n(x+u)\} K_n(u) du dx \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& C \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+u) - t_n(x+u)| dx |K_n(u)| du = \\
& C \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - t_n(x)| dx |K_n(u)| du \leq C \int_0^{2\pi} |K_n(u)| du \|f - t_n\|_M \|1\|_N. \quad (2)
\end{aligned}$$

其中 $\|1\|_N = \sup_{\rho(u;M) \leq 1} |\int_0^{2\pi} u(x) dx| \leq C$, 从而(2)小于等于

$$2C \|f - t_n\|_M (\int_0^{\frac{\pi}{n}} |K_n(u)| du + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |K_n(u)| du) \leq C \|f - t_n\|_M (I_1 + I_2).$$

对于 I_1 而言

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}| du \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} |\sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{(k+1)u}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{u}{2}}| du = \\
& \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^n (k+1) a_{n,n-k} du = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} a_{n,n} + 2a_{n,n-1} + 3a_{n,n-2} + \cdots + (n+1)a_{n,0} du \leq \\
& \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{n}} (n+1) \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} du = (n+1) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = O(1).
\end{aligned}$$

再对 I_2 而言, 根据已知条件, 若 $(k+1)^{-\beta} a_{n,n-k} \in \text{HBVS}$, 则 $(k+1)^{-\beta} a_{n,n-k} \in \text{AMIS}$. 因此当 $0 \leq l \leq m \leq n$ 有 $C(m+1)^{-\beta} a_{n,n-m} \geq (l+1)^{-\beta} a_{n,n-l}$, 从而

$$C a_{n,n-m} \geq a_{n,n-l} \left(\frac{m+1}{l+1} \right)^{\beta} \geq a_{n,n-l},$$

所以 $(a_{n,n-k}) \in \text{AMIS}$. 根据条件 $(n+1)a_{n,0} = O(1)$, 结合 $(a_{n,n-k}) \in \text{AMIS}$ 和文献[15]的(4.8)有

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} |K_n(u)| du \leq a_{n,0} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} u^{-2} du = O(1).$$

从而 $\|T_n(f; x) - \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} t_k\|_M \leq C \|f - t_n\|_M$.

由引理2.1中 $\alpha = 1$ 的情形, 有

$$\begin{aligned}
& \|T_n(f; x) - f(x)\|_M \leq \|T_n(f; x) - \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} t_k\|_M + \|\sum_{k=0}^n a_{n,n-k} t_k - f(x)\|_M \leq \\
& C \|f - t_n\|_M + \|\sum_{k=0}^n a_{n,n-k} (t_k - f)\|_M \leq C \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \|t_k - f\|_M \leq C \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^n a_{n,n-k} \frac{1}{k+1} \right).
\end{aligned}$$

因为 $(k+1)^{-\beta} a_{n,n-k} \in \text{HBVS}$, 则

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{n,n-k}}{(k+1)^{\beta}} - \frac{a_{n,n-k-1}}{(k+2)^{\beta}} \right| \leq C \frac{a_{n,n}}{(n+1)^{\beta}}.$$

根据Abel变换, $(k+1)^{-\beta} a_{n,n-k} \in \text{HBVS}$, $(a_{n,n-k}) \in \text{AMIS}$, $(n+1)a_{n,0} = O(1)$, 有

$$\begin{aligned}
& \|T_n(f; x) - f(x)\|_M \\
& \leq C \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{n,n-k}}{(k+1)^{\beta}} - \frac{a_{n,n-k-1}}{(k+2)^{\beta}} \right| \sum_{i=0}^k (i+1)^{\beta-1} + \frac{a_{n,0}}{(n+1)^{\beta}} \sum_{k=0}^n (k+1)^{\beta-1} \right) \\
& \leq C \left(\frac{1}{n} + (n+1)^{\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{n,n-k}}{(k+1)^{\beta}} - \frac{a_{n,n-k-1}}{(k+2)^{\beta}} \right| + \frac{a_{n,0}}{(n+1)^{\beta}} (n+1)^{\beta} \right) \\
& \leq C \left(\frac{1}{n} + C a_{n,n} + a_{n,0} \right) \leq C \left(\frac{1}{n} + \frac{C}{n+1} \right) = O(n^{-1}).
\end{aligned}$$

定理3.2得证.

定理3.3 设 $f \in \text{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, 若 $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k a_{n,k}| = O(n^{-1})$ 且 $(n+1)a_{n,n} = O(1)$; 或者若 $(a_{n,k}) \in \text{RBVS}$ 且 $(n+1)a_{n,0} = O(1)$, 则

$$\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-\alpha}).$$

证 类似定理3.1的证明, 根据Abel变换并结合引理2.2, 有

$$\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M \leq C(n+1)^{1-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| + a_{n,n} \right).$$

1) 根据假设 $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k a_{n,k}| = O(n^{-1})$, $(n+1)a_{n,n} = O(1)$, 得 $\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-\alpha})$.

2) 若 $(a_{n,k}) \in \text{RBVS}$, 则 $(a_{n,k}) \in \text{AMDS}$. 因此

$$\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M \leq C(n+1)^{1-\alpha} (a_{n,0} + a_{n,n}) \leq C(n+1)^{1-\alpha} a_{n,0}.$$

根据已知条件 $(n+1)a_{n,0} = O(1)$, 故有 $\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-\alpha})$.

定理3.4 设 $f \in \text{Lip}1$, $\beta > 0$, 若 $(k+1)^{-\beta} a_{n,k} \in \text{HBVS}$ 且 $(n+1)a_{n,n} = O(1)$, 则

$$\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M = O(n^{-1}).$$

证 仿照定理3.2的证明, 结合Abel变换以及引理2.1, 有

$$\|\tau_n(f; x) - f(x)\|_M \leq C \left(\frac{1}{n} + (n+1)^\beta \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{n,k}}{(k+1)^\beta} - \frac{a_{n,k+1}}{(k+2)^\beta} \right| + a_{n,n} \right).$$

因为 $(k+1)^{-\beta} a_{n,k} \in \text{HBVS}$, $(n+1)a_{n,n} = O(1)$. 从而定理3.4得证.

参考文献:

- [1] 吴从炘, 王延辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.
- [2] Mishra V N, Khatri K, Mishra L N. Using linear operators to approximate signals of $\text{Lip}(a, p)$, $(p \geq 1)$ -class[J]. Filomat, 2013, 27(2): 353-363.
- [3] Mittal M L, Singh M V. Applications of Cesàro submethod to trigonometric approximation of signals (functions) belonging to class in L_p -Norm[J]. Journal of Mathematics, 2016, 2016: 9048671.
- [4] Leindler L. Trigonometric approximation in L_p -norm[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 302(1): 129-136.
- [5] Runovski K, Schmeisser H J. Methods of trigonometric approximation and generalized smoothness. I[J]. Eurasian Mathematical Journal, 2011, 2(3): 98-124.
- [6] Leindler L. On the degree of approximation of continuous functions[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2004, 104(1-2): 105-113.
- [7] Deer U. On the approximation by Cesàro submethod[J]. Palestine Journal of Mathematics, 2015, 4(1): 44-56.
- [8] Avsar A H, Yildirim Y E. On the trigonometric approximation of functions in weighted Lorentz spaces using Cesàro submethod[J]. Novi Sad Journal of Mathematics, 2018, 48(2): 41-54.
- [9] Mohapatra R N, Szal B. On trigonometric approximation of functions in the L_q norm[J]. Demonstratio Mathematica, 2018, 51(1): 17-26.
- [10] Sonker S, Munjal A. Approximation of the function $f \in \text{Lip}(a, p)$ using infinite matrices of Cesàro submethod[J]. Nonlinear Studies, 2017, 24: 113-125.

- [11] Guven A. Approximation by Nörlund means of hexagonal Fourier series[J]. *Analysis in Theory and Applications*, 2017, 33: 384-400.
- [12] 陈琳. Orlicz空间内若干逼近问题的研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古师范大学, 2025.
- [13] 姜胜楠, 吴嘎日迪. Orlicz空间中带指数权的多项式逼近[J]. *高校应用数学学报*, 2024, 39(2): 218-230.
- [14] Mishra V N, Mishra L N. Trigonometric approximation of signals (functions) in L_p ($p \geq 1$)-norm[J]. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2012, 7(19): 909-918.
- [15] Szal B. Trigonometric approximation by Nörlund type means in L_p -norm[J]. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2009, 50(4): 575-589.

Trigonometric approximation problems in Orlicz spaces

CHEN Lin^{1,2,3}, WU Garidi^{1,2,3}

- (1. College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China;
- 2. Laboratory of Infinite-dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application, Inner Mongolia, Hohhot 010022, China;
- 3. Center for Applied Mathematical Science, Inner Mongolia, Hohhot 010022, China)

Abstract: This article used Abel transform, Hölder inequality, and related techniques of Fourier analysis to study the problems of using trigonometric polynomials to approximate functions that satisfied the Lipschitz condition in Orlicz spaces. By imposing distinct conditions on the sequences $(a_{n,k})$ and $(a_{n,n-k})$, the corresponding trigonometric polynomials are obtained and the degree of approximation under different trigonometric polynomial approximations is established.

Keywords: trigonometric approximation; Orlicz spaces; degree of approximation

MR Subject Classification: 42A10; 41A25