

Hilbert空间中近似对偶(对偶)连续广义框架的 刻画及稳定性

付艳玲¹, 张伟^{2*}, 李拴保³

- (1. 河南财政金融学院 统计与数学学院, 河南郑州 450046;
2. 河南财经政法大学 数学与信息科学学院, 河南郑州 450046;
3. 河南财政金融学院 人工智能学院, 河南郑州 450046)

摘要: 此文应用算子性质讨论连续广义框架的近似对偶框架及对偶框架. 首先, 介绍近似对偶连续广义框架的定义, 对于给定连续广义框架, 获得其近似对偶框架的新刻画. 其次, 得到近似对偶连续广义框架的扰动结果. 最后, 利用连续广义框架的预框架算子刻画对偶连续广义框架.

关键词: 连续广义框架; 近似对偶连续广义框架; 对偶连续广义框架; 算子

中图分类号: O174.2

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0169-11

§1 引言

Hilbert空间中的框架概念最初是Duffin和Schaeffer^[1]研究非调和Fourier级数时提出的. 序列 $\{f_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的框架, 如果存在常数 $0 < A_1 \leq B_1 < \infty$, 使得

$$A_1 \|f\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbf{N}} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B_1 \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad (1)$$

成立. 但当时并没有引起重视, 直到1986年Daubechies, Grossmann和Meyer^[2]的突破性的研究引起学者对框架的极大的关注和兴趣. 框架是标准正交基的推广, 能以稳定的方式表示空间中的任意元素, 但具有冗余性, 这样使得框架理论在众多领域被广泛应用, 如图像处理^[3]、神经网络^[4]、量化测度^[5]等, 有关框架的研究成果已经十分丰富^[6-11].

随着对框架研究的不断深入, 出现许多推广形式. 1993年Ali, Antoine和Gazeau^[12]推广到带有Radon测度的局部紧空间, 并由此引入连续框架的概念. 序列 $\{\psi_\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 关于测度 (Ω, μ) 的连续框架, 如果满足下面两个条件.

- (i) $\{\psi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是弱可测的, 即对任意 $f \in \mathcal{H}$, $\omega \rightarrow \langle f, \psi(\omega) \rangle$ 是 Ω 上的可测函数;

收稿日期: 2024-11-01 修回日期: 2025-09-25

*通信作者, Email: zwfylhappy@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(12461016); 河南省自然科学基金(252300421973; 262300421892)

(ii) 存在常数 $0 < A_2 \leq B_2 < \infty$, 使得

$$A_2 \|f\|^2 \leq \int_{\Omega} |\langle f, \psi(\omega) \rangle|^2 d\mu(\omega) \leq B_2 \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

这里 $\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间, Ω 是一个带有正测度 μ 的测度空间. 2006 年孙文昌^[13]将所有推广框架做了统一处理, 提出广义框架的概念. 算子列 $\{A_j \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}_j)\}_{j \in J}$ 称为 $\mathcal{U}$ 关于 $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ 的广义框架, 如果存在常数 $0 < A_3 \leq B_3 < \infty$, 使得

$$A_3 \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \|A_j f\|^2 \leq B_3 \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (3)$$

这里 $\mathcal{U}, \mathcal{V}_j$ 是 Hilbert 空间, $L(\mathcal{U}, \mathcal{V}_j)$ 为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}_j$ 的所有有界线性算子的集合.

本文将进一步研究一种更一般的框架-连续广义框架, 它是一种比连续框架和广义框架都更一般的一种框架, 是 Abdollahpour 和 Faroughi^[14] 在 2008 年首先提出的. §2 回顾连续广义框架的一些基本概念、记号与性质. §3 给出其近似对偶连续广义框架概念, 讨论近似对偶连续广义框架的性质, 对于给定框架, 获得其近似对偶框架的新刻画. 得到近似对偶连续广义框架的扰动结果. §4 利用连续广义框架的预框架算子刻画对偶连续广义框架, 讨论连续广义框架在算子作用下的保持作用. 通过对上述问题的研究, 可以更好理解框架作为一种冗余表示系统的内在稳健机制, 为框架理论的应用提供了更为严格的理论保障, 通过发展刻画技巧和稳定分析方法, 也可为其他数学领域的研究提供思路.

§2 预备知识

本部分主要说明本文所用到的一些记号、定义和基本性质(详见文献[6, 8, 14-15]).

本文中 $\mathcal{H}, \mathcal{V}$ 表示复 Hilbert 空间, (Ω, μ) 表示赋予正测度 μ 的测度空间, $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 表示 $\mathcal{V}$ 的一列闭子空间, $L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)$ 表示由 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{V}_\omega$ 的所有有界线性算子的集合, 特别地, 如果 $\forall \omega \in \Omega$, 有 $\mathcal{V}_\omega = \mathcal{H}$, 则记 $L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)$ 为 $L(\mathcal{H})$, $I_{\mathcal{H}}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的恒等算子.

定义 2.1^[14] 序列 $\{A_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 称为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架, 如果满足下面两个条件.

(i) 对任意固定的 $f \in \mathcal{H}$, $\omega \rightarrow A_\omega f$ 是强可测的;

(ii) 存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得

$$A \|f\|^2 \leq \int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad (4)$$

A 和 B 分别称为连续广义框架的下界和上界.

如果(4)仅对右半不等式成立, 则称 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义 Bessel 序列; 如果 $A = B$, 则称 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的紧连续广义框架; 如果 $A = B = 1$, 则称 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的 Parseval 连续广义框架.

线性空间 $(\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}$ 定义为

$$(\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2} = \left\{ F = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega} : f_\omega \in \mathcal{V}_\omega, \int_{\Omega} \|f_\omega\|^2 d\mu(\omega) < \infty \right\},$$

在其上定义内积

$$\langle F, G \rangle = \langle \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}, \{g_\omega\}_{\omega \in \Omega} \rangle = \int_{\Omega} \langle f_\omega, g_\omega \rangle d\mu(\omega),$$

则 $(\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}$ 是复 Hilbert 空间.

对于连续广义 Bessel 序列 $\{A_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$, 称有界算子

$$T_A : (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2} \rightarrow \mathcal{H}, T_A(\{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}) = \int_{\Omega} A_\omega^* f_\omega d\mu(\omega)$$

为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的合成算子. 易证 T_A 是线性有界算子, 它的共轭算子

$$T_A^*: \mathcal{H} \rightarrow (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}, T_A^* f = \{A_\omega f\}_{\omega \in \Omega}$$

称为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的分析算子. 对于连续广义框架 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 称有界算子

$$S_A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, S_A f = \int_{\Omega} A_\omega^* A_\omega f d\mu(\omega)$$

为框架算子, S_A 是一个线性有界、自伴、正的可逆算子^[6].

定义2.2^[15] 序列 $\{A_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 称为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义标准正交基, 如果满足下面三个条件.

(i) 对任意固定的 $f \in \mathcal{H}$, $\omega \rightarrow A_\omega f$ 是强可测的;

(ii) 对所有 $\nu \in \Omega$, $\{f_\nu\}_{\omega \in \Omega} \in (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}$,

$$\int_{\Omega} \langle A_\omega^* f_\omega, A_\omega^* g_\omega \rangle d\mu(\omega) = \langle f_\nu, g_\nu \rangle, \{A_\omega\}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{V}_\nu;$$

(iii) 对所有 $f \in \mathcal{H}$, $\int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) = \|f\|^2$.

定义2.3^[14] 设 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架, 如果存在 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, 使得对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$f = \int_{\Omega} \Gamma_\omega^* A_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} A_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega),$$

则称 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的对偶连续广义框架.

易知 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 也为 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的对偶连续广义框架. 它们相互对偶. $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 称为对偶连续广义框架对. 如果 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的框架下、上界分别为 A 和 B , 框架算子为 S_A , 并令 $\tilde{A}_\omega = A_\omega S_A^{-1}$, 则 $\{\tilde{A}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 也是 $\mathcal{H}$ 关于 (Ω, μ) 的连续广义框架, 其下、上界分别为 $\frac{1}{B}$ 、 $\frac{1}{A}$, 框架算子为 S_A^{-1} . $\{\tilde{A}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 称为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的典则对偶连续广义框架.

引理2.1^[6] 设 $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}$ 是一个有界满射算子, 存在一个有界算子 $T^\dagger: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ 使得

$$TT^\dagger: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, TT^\dagger f = f, \forall f \in \mathcal{H}.$$

则称 $T^\dagger$ 为 T 的伪逆算子.

引理2.2^[6] 设 X 为一Banach空间, $Q \in L(X)$. 若 $\|Q\| < 1$, 则 $I_X - Q$ 在 X 上可逆, 且 $\|(I_X - Q)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|Q\|}$, 其中 I_X 为 X 上的恒等算子.

§3 近似对偶连续广义框架

众所周知, 一个给定的框架, 至少存在一个对偶框架, 令人遗憾的是, 一个给定框架的对偶框架难以得到, 即使是对每个框架都存在的典范对偶框架也是如此, 因为在无限维空间求 S^{-1} 是非常困难的问题, 为此学者提出近似对偶框架^[16]的概念, 随后出现许多优秀成果^[17-20]. 受此启发, 本节研究近似对偶连续广义框架. 首先给出近似对偶连续广义框架的概念.

定义3.1 设 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 均是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列, 如果满足

$$\|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\| < 1 \text{ 或 } \|I_{\mathcal{H}} - T_A T_\Gamma^*\| < 1,$$

则称 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为近似对偶连续广义框架.

注 1. 定义中的两个不等式等价. 事实上

$$\|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\| = \|(I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*)^*\| = \|I_{\mathcal{H}} - T_A T_\Gamma^*\|.$$

且 $T_\Gamma T_A^*$, $T_A T_\Gamma^*$ 均是可逆算子.

2. 易知一个连续广义框架的对偶框架均是其近似对偶连续广义框架.

定理3.1 如果 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架. 则 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 均是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架.

证 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架, 由定义3.1知 $\|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\| < 1$. 再由引理2.2知, $T_\Gamma T_A^*$ 是一个可逆算子并且满足

$$\|(T_\Gamma T_A^*)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|}.$$

记 B_A 和 B_Γ 分别为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的上界, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \|(T_\Gamma T_A^*)^{-1}\| \|T_\Gamma T_A^* f\| \leq \frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \sup_{\|g\|=1} |\langle T_\Gamma T_A^* f, g \rangle| \leq \\ &\frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \sup_{\|g\|=1} \int_{\Omega} \langle \Gamma_\omega^* A_\omega f, g \rangle d\mu(\omega) = \frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \sup_{\|g\|=1} \int_{\Omega} \langle A_\omega f, \Gamma_\omega g \rangle d\mu(\omega) \leq \\ &\frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \sup_{\|g\|=1} \left(\int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \|\Gamma_\omega g\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \sup_{\|g\|=1} \left(\int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{B_\Gamma} \|g\| = \\ &\frac{\sqrt{B_\Gamma}}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|} \left(\int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是下界为 $B_\Gamma^{-1}(1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|)^2$ 的连续广义框架. 类似可证, $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是下界为 $B_A^{-1}(1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\|)^2$ 的连续广义框架.

一般情况下, 两个连续广义框架的和不一定是连续广义框架, 但下述定理显示两个近似对偶连续广义框架的和仍然是连续广义框架.

定理3.2 如果 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架. 则 $\{A_\omega + \Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架.

证 设 A_A, A_Γ 分别为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}, \{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的框架下界, 易知 $\{A_\omega + \Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列. 只需要证明 $\{A_\omega + \Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 有下框架界即可. 注意到 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架. 则 $\|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\| < 1$ 或 $\|I_{\mathcal{H}} - T_A T_\Gamma^*\| < 1$. 因此

$$\|2I_{\mathcal{H}} - (T_\Gamma T_A^* + T_A T_\Gamma^*)\| \leq \|I_{\mathcal{H}} - T_\Gamma T_A^*\| + \|I_{\mathcal{H}} - T_A T_\Gamma^*\| < 2.$$

又因为 $T_\Gamma T_A^* + T_A T_\Gamma^*$ 是自伴算子, 由文[17]的引理3.2知 $T_\Gamma T_A^* + T_A T_\Gamma^*$ 是正算子. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|(A_\omega + \Gamma_\omega)f\|^2 d\mu(\omega) &= \\ \int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \langle A_\omega^* \Gamma_\omega f, f \rangle d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \langle \Gamma_\omega^* A_\omega f, f \rangle d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Gamma_\omega f\|^2 d\mu(\omega) &= \\ \int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) + \langle (T_\Gamma T_A^* + T_A T_\Gamma^*)f, f \rangle + \int_{\Omega} \|\Gamma_\omega f\|^2 d\mu(\omega) &\geq \\ \int_{\Omega} \|A_\omega f\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Gamma_\omega f\|^2 d\mu(\omega) &\geq (A_A + A_\Gamma)\|f\|^2, \end{aligned}$$

即 $\{A_\omega + \Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 有下框架界.

对于一个给定的连续广义框架, 下述定理给出其近似对偶连续广义框架的特征刻画.

定理3.3 设 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为 A_A 和 B_A . 则 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和连续广义Bessel序列 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架当且仅当

$$\Gamma_\omega = A_\omega S_A^{-\frac{1}{2}} D + \Delta_\omega, \omega \in \Omega,$$

其中 $D \in L(\mathcal{H})$ 且满足 $\|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D\| < 1$, $\{\Delta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列, 且满足 $T_{\Lambda}T_{\Delta}^* = 0$.

证 (充分性) 令 $\Gamma_{\omega} = \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D + \Delta_{\omega}$, $\omega \in \Omega$, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\int_{\Omega} \|\Gamma_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) \leq \left(\frac{B_{\Lambda}}{A_{\Lambda}}\|D\|^2 + B_{\Delta}\right)\|f\|^2,$$

其中 B_{Δ} 是 $\{\Delta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的上界. 故 $\{\Gamma_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是界为 $B_{\Gamma} = \frac{B_{\Lambda}}{A_{\Lambda}}\|D\|^2 + B_{\Delta}$ 的连续广义Bessel序列. 事实上, 注意到 $T_{\Lambda}T_{\Delta}^* = 0$, 由此可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\Gamma_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) &= \int_{\Omega} \|(\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D + \Delta_{\omega})f\|^2 d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \\ &+ \int_{\Omega} \langle \Delta_{\omega}^* \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df, f \rangle d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \langle \Lambda_{\omega}^* \Delta_{\omega}f, S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df \rangle d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \langle T_{\Delta}T_{\Lambda}^*S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df, f \rangle + \langle T_{\Lambda}T_{\Delta}^*f, S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \langle S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df, T_{\Lambda}T_{\Delta}^*f \rangle + \langle T_{\Lambda}T_{\Delta}^*f, S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega). \end{aligned}$$

因此对任意 $f \in \mathcal{H}$ 和 $\omega \in \Omega$ 有

$$T_{\Gamma}^*(f)(\omega) = \Gamma_{\omega}f = (\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D + \Delta_{\omega})f = \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df + \Delta_{\omega}f = T_{\Lambda}^*(S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df)(\omega) + T_{\Delta}^*(f)(\omega).$$

可以得到

$$T_{\Lambda}T_{\Gamma}^*(f) = T_{\Lambda}(T_{\Lambda}^*(S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df) + T_{\Delta}^*(f)) = T_{\Lambda}T_{\Lambda}^*(S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df) + T_{\Lambda}T_{\Delta}^*(f) = S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D(f),$$

也即是 $T_{\Lambda}T_{\Gamma}^* = S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D$. 由定义3.1可知, $\{\Lambda_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架.

(必要性) 设 $\{\Lambda_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 和连续广义Bessel序列 $\{\Gamma_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架. 依据定义3.1可知 $\|I_{\mathcal{H}} - T_{\Lambda}T_{\Gamma}^*\| < 1$ 或 $\|I_{\mathcal{H}} - T_{\Gamma}T_{\Lambda}^*\| < 1$. 令 $T_{\Lambda}T_{\Gamma}^* = S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D$, 则有 $\|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D\| < 1$ 且 $D \in L(\mathcal{H})$. 设 B_{Γ} 是 $\{\Gamma_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的上界. 令 $\Delta_{\omega} = \Gamma_{\omega} - \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D$, $\omega \in \Omega$, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\Delta_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) &= \int_{\Omega} \|(\Gamma_{\omega} - \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D)f\|^2 d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \|\Gamma_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) - \langle S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df, T_{\Lambda}T_{\Gamma}^*f \rangle - \langle T_{\Lambda}T_{\Gamma}^*f, S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \|\Gamma_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) - \langle S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df, S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}Df \rangle - \langle S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}Df, S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \|\Gamma_{\omega}f\|^2 d\mu(\omega) + \int_{\Omega} \|\Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df\|^2 d\mu(\omega) - 2\|Df\|^2 \leq \left(B_{\Gamma} + \frac{B_{\Lambda}\|D\|^2}{A_{\Lambda}}\right)\|f\|^2. \end{aligned}$$

故 $\{\Delta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是连续广义Bessel序列. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 和 $\omega \in \Omega$, 有

$$(T_{\Gamma}^* - T_{\Lambda}^*S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D)(f)(\omega) = \Gamma_{\omega}f - \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}Df = \Delta_{\omega}f = T_{\Delta}^*(f)(\omega),$$

可以得到 $T_{\Lambda}T_{\Delta}^* = T_{\Lambda}(T_{\Gamma}^* - T_{\Lambda}^*S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D) = T_{\Lambda}T_{\Gamma}^* - T_{\Lambda}^*S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D = 0$.

定理3.4 设 $\{\Lambda_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为 A_{Λ} 和 B_{Λ} . 则 $\{\Lambda_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 和连续广义Bessel序列 $\{\Gamma_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是近似对偶连续广义框架当且仅当

$$\Gamma_{\omega} = \Lambda_{\omega}S_{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}D - \Lambda_{\omega} + S_{\Lambda}\Delta_{\omega}, \omega \in \Omega,$$

其中 $D \in L(\mathcal{H})$ 且满足 $\|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}}D\| < 1$, $\{\Delta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列满

足 $T_\Lambda T_\Delta^* = I_{\mathcal{H}}$.

证 定理3.4的证明过程类似于定理3.3, 证略.

为讨论近似对偶框架的稳定性, 下面给出两个引理.

引理3.1^[14] $\{\Lambda_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列当且仅当算子 $T_\Lambda : (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2} \rightarrow \mathcal{H}, T_\Lambda(\{f_\omega\}_{\omega \in \Omega}) = \int_{\Omega} \Lambda_\omega^* f_\omega d\mu(\omega)$ 有界, 即 $\|T_\Lambda\| \leq \sqrt{B_\Lambda}$ (Bessel界).

引理3.2^[21] 设 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为 A_Λ 和 B_Λ . 序列 $\{\Gamma_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$. 如果存在常数 $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1), \gamma \geq 0, \max\{\lambda_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{A_\Lambda}}, \lambda_2\} < 1$ 及 $g = \{g_\omega\}_{\omega \in \Omega} \in (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}$ 满足

$$\left\| \int_{\Omega} (\Lambda_\omega^* - \Gamma_\omega^*) g_\omega d\mu(\omega) \right\| \leq \lambda_1 \left\| \int_{\Omega} \Lambda_\omega^* g_\omega d\mu(\omega) \right\| + \lambda_2 \left\| \int_{\Omega} \Gamma_\omega^* g_\omega d\mu(\omega) \right\| + \gamma \|g\|_2,$$

其中 Λ_ω^* 是 Λ_ω 的共轭算子, 则 $\{\Gamma_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为 $\left[\frac{\sqrt{A_\Lambda}(1 - \lambda_1) - \gamma}{1 + \lambda_2} \right]^2$ 和 $\left[\frac{\sqrt{B_\Lambda}(1 + \lambda_1) + \gamma}{1 - \lambda_2} \right]^2$.

定理3.5 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为 A_Λ, B_Λ , 且 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的近似对偶框架. 若序列 $\{\Theta_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 满足 $\{\Lambda_\omega - \Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 界为 $B_{\Lambda-\Theta}$ 的连续广义Bessel序列, 界 $B_{\Lambda-\Theta}$ 满足 $B_{\Lambda-\Theta} < (1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_\Lambda T_\Gamma^*\|)^2$ 和 $B_{\Lambda-\Theta} < A_\Lambda$. 则存在 $\{\Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的近似对偶框架 $\{\Psi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 满足 $T_\Lambda T_\Gamma^* = T_\Theta T_\Psi^*$ 及 $\{\Gamma_\omega - \Psi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 也是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列且界为 $B_{\Lambda-\Theta}$ 的倍数.

证 注意到 $\{\Lambda_\omega - \Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 界为 $B_{\Lambda-\Theta}$ 的连续广义Bessel序列, 根据引理3.1, 对任意 $g = \{g_\omega\}_{\omega \in \Omega} \in (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_\omega)_{\mathcal{L}^2}$, 有

$$\left\| \int_{\Omega} (\Lambda_\omega^* - \Gamma_\omega^*) g_\omega d\mu(\omega) \right\| \leq \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|g\|_{\mathcal{L}^2}.$$

又由 $B_{\Lambda-\Theta} < A_\Lambda$, 故 $\frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{\sqrt{A_\Lambda}} < 1$. 在引理3.2中, 令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 可知序列 $\{\Theta_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架且框架界分别为

$$A_\Theta := (\sqrt{A_\Lambda} - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}})^2 \text{ 和 } B_\Theta := (\sqrt{B_\Lambda} + \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}})^2.$$

记 $S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D = T_\Lambda T_\Gamma^*, D \in L(\mathcal{H})$, 由定理3.3知, 存在 $\{\Delta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列, 且满足 $T_\Lambda T_\Delta^* = 0$, 使得

$$\Gamma_\omega = \Lambda_\omega S_\Lambda^{-\frac{1}{2}} D + \Delta_\omega = \tilde{\Lambda}_\omega S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D + \Delta_\omega, \omega \in \Omega.$$

令序列 $\{\Phi_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 满足 $\Phi_\omega = \tilde{\Theta}_\omega S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D + \alpha \Delta_\omega, \omega \in \Omega$, 其中 α 是满足 $\alpha \|T_\Delta^*\| \leq 1$ 的正实数. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\Phi_\omega f\|^2 d\mu(\omega) &= \int_{\Omega} \|(\tilde{\Theta}_\omega S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D + \alpha \Delta_\omega) f\|^2 d\mu(\omega) \leq \int_{\Omega} \|\tilde{\Theta}_\omega S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D f\|^2 d\mu(\omega) + \\ &\alpha^2 \int_{\Omega} \|\Delta_\omega f\|^2 d\mu(\omega) + 2\alpha \left(\int_{\Omega} \|\tilde{\Theta}_\omega S_\Lambda^{\frac{1}{2}} D f\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \|\Delta_\omega f\|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\left(\frac{B_\Lambda}{A_\Theta} \|D\|^2 + \alpha^2 B_\Delta + 2\alpha \sqrt{\frac{B_\Lambda B_\Delta}{A_\Theta}} \|D\| \right) \|f\|^2, \end{aligned}$$

其中 B_Δ 是 $\{\Delta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的上界. 故 $\{\Phi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 界为 $B_{\Lambda\Theta}$ 的连续广义Bessel序列. 更

进一步, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} T_{\Theta} T_{\Phi}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f &= \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \Phi_{\omega} (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* (\tilde{\Theta}_{\omega} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D + \alpha \Delta_{\omega}) (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \tilde{\Theta}_{\omega} f d\mu(\omega) + \alpha \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \Delta_{\omega} (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f d\mu(\omega) = f + \alpha T_{\Theta} T_{\Delta}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f. \end{aligned}$$

再次利用引理3.1及引理2.2可知 $\|T_{\Lambda} - T_{\Theta}\| \leq \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}$, $\|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\|}$. 故有

$$\begin{aligned} \|f - T_{\Theta} T_{\Phi}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f\| &= \|\alpha T_{\Theta} T_{\Delta}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f\| = \|\alpha T_{\Theta} T_{\Delta}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f - \alpha T_{\Lambda} T_{\Delta}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f\| \leq \\ &\leq \|T_{\Lambda} - T_{\Theta}\| \alpha \|T_{\Delta}^*\| \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|f\| \leq \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|f\| \leq \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\|} \|f\|. \end{aligned}$$

又因为 $B_{\Lambda-\Theta} < (1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_{\Lambda} T_{\Gamma}^*\|)^2$, 则

$$\|I_{\mathcal{H}} - T_{\Theta} T_{\Phi}^* (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\|} = \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - T_{\Lambda} T_{\Gamma}^*\|} < 1.$$

记 $\mathcal{C} = (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} T_{\Theta} T_{\Phi}^*$, 则 $\mathcal{C}$ 是可逆算子, 因此算子 $T_{\Theta} T_{\Phi}^*$ 也是可逆的. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$f = (T_{\Theta} T_{\Phi}^*) (T_{\Theta} T_{\Phi}^*)^{-1} f = \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \Phi_{\omega} (T_{\Theta} T_{\Phi}^*)^{-1} f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \Phi_{\omega} \mathcal{C}^{-1} (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} f d\mu(\omega).$$

令 $\Psi_{\omega} = \Phi_{\omega} \mathcal{C}^{-1}$, $\omega \in \Omega$, 易知 $\{\Psi_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列且

$$S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D f = \int_{\Omega} \Theta_{\omega}^* \Psi_{\omega} f d\mu(\omega).$$

即 $T_{\Theta} T_{\Psi}^* = S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D = T_{\Lambda} T_{\Gamma}^*$. 故 $\{\Psi_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\{\Theta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的近似对偶框架. 为完成定理的证明, 下面说明 $\{\Gamma_{\omega} - \Psi_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 也是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列. 为此计算

$$\|T_{\Gamma} - T_{\Psi}\| = \|T_{\Gamma} - T_{\Psi} - T_{\Gamma} \mathcal{C}^{-1} + T_{\Gamma} \mathcal{C}^{-1}\| =$$

$$\|T_{\Gamma} - T_{\Phi} \mathcal{C}^{-1} - T_{\Gamma} \mathcal{C}^{-1} + T_{\Gamma} \mathcal{C}^{-1}\| \leq \|T_{\Gamma}\| \|I_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}^{-1}\| + \|T_{\Gamma} - T_{\Phi}\| \|\mathcal{C}^{-1}\|.$$

一方面注意到

$$\|I_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}\| = \|I_{\mathcal{H}} - (S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1} T_{\Theta} T_{\Phi}^*\| \leq \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D - T_{\Theta} T_{\Phi}^*\| =$$

$$\|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Lambda} T_{\Gamma}^* - T_{\Theta} T_{\Phi}^*\| = \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|(T_{\Lambda} - T_{\Theta}) T_{\Delta}^*\| \leq \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|.$$

再由引理2.2可得

$$\|\mathcal{C}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}\|} \leq \frac{1}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|},$$

$$\|I_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}^{-1}\| \leq \|\mathcal{C}^{-1}\| \|I_{\mathcal{H}} - \mathcal{C}\| \leq \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|}.$$

另一方面

$$\begin{aligned} \|S_{\Lambda} - S_{\Theta}\| &= \|T_{\Lambda} T_{\Lambda}^* - T_{\Lambda} T_{\Theta}^* + T_{\Lambda} T_{\Theta}^* - T_{\Theta} T_{\Theta}^*\| \leq \|T_{\Lambda} - T_{\Theta}\| (\|T_{\Lambda}\| + \|T_{\Theta}\|) \leq \\ &\leq \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} (\sqrt{B_{\Lambda}} + \sqrt{B_{\Theta}}). \end{aligned}$$

又注意到 $\Gamma_{\omega} = \tilde{\Lambda}_{\omega} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D + \Delta_{\omega}$ 及 $\Phi_{\omega} = \tilde{\Theta}_{\omega} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D + \alpha \Delta_{\omega}$, 故 $\forall f \in \mathcal{H}$, $g = \{g_{\omega}\}_{\omega \in \Omega} \in (\Omega, \oplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{V}_{\omega})_{\mathcal{L}^2}$ 有

$$\begin{aligned} \langle (T_{\Gamma} - T_{\Phi})g, f \rangle &= \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, \Gamma_{\omega} f \rangle d\mu(\omega) - \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, \Phi_{\omega} f \rangle d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, (\tilde{\Lambda}_{\omega} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D + \Delta_{\omega}) f \rangle d\mu(\omega) - \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, (\tilde{\Theta}_{\omega} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D + \alpha \Delta_{\omega}) f \rangle d\mu(\omega) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, (\Lambda_{\omega} S_{\Lambda}^{-1} - \Theta_{\omega} S_{\Theta}^{-1}) S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} Df \rangle d\mu(\omega) - \int_{\Omega} \langle g_{\omega}, (1 - \alpha) \Delta_{\omega} f \rangle d\mu(\omega) = \\ & \langle T_{\Lambda} g, S_{\Lambda}^{-1} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} Df \rangle - \langle T_{\Theta} g, S_{\Theta}^{-1} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} Df \rangle + (1 - \alpha) \langle T_{\Delta} g, f \rangle = \\ & \langle T_{\Lambda} g, (S_{\Lambda}^{-1} - S_{\Theta}^{-1}) S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} Df \rangle - \langle (T_{\Lambda} - T_{\Theta}) g, S_{\Theta}^{-1} S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} Df \rangle + (1 - \alpha) \langle T_{\Delta} g, f \rangle, \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} \|T_{\Gamma} g - T_{\Phi} g\| & \leq \|T_{\Lambda} g\| \|S_{\Lambda}^{-1} - S_{\Theta}^{-1}\| \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \|(T_{\Lambda} - T_{\Theta}) g\| \|S_{\Theta}^{-1}\| \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + (1 + \alpha) \|T_{\Delta} g\| \leq \\ & \|T_{\Lambda}\| \|g\|_2 \|S_{\Lambda}^{-1}\| \|S_{\Lambda} - S_{\Theta}\| \|S_{\Theta}^{-1}\| \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{1}{A_{\Theta}} \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|g\|_2 \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + (1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}} \|g\|_2 \leq \\ & \frac{1}{A_{\Lambda}} \frac{1}{A_{\Theta}} \sqrt{B_{\Lambda}} \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} (\sqrt{B_{\Lambda}} + \sqrt{B_{\Theta}}) \|g\|_2 \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \\ & \frac{1}{A_{\Theta}} \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|g\|_2 \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + (1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}} \|g\|_2 = \\ & \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \left(\frac{A_{\Lambda} + B_{\Lambda} + \sqrt{B_{\Lambda} B_{\Theta}}}{A_{\Lambda} A_{\Theta}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{(1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}}}{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}} \right) \|g\|_2. \end{aligned}$$

综上所述可知

$$\begin{aligned} \|T_{\Gamma} - T_{\Psi}\| & \leq \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|} \|T_{\Gamma}\| + \frac{\|T_{\Gamma} - T_{\Phi}\|}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \|T_{\Delta}^*\|} \leq \\ & \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\| \sqrt{B_{\Delta} B_{\Gamma}}}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \sqrt{B_{\Delta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\|} + \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \sqrt{B_{\Delta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\|} \times \\ & \left(\frac{A_{\Lambda} + B_{\Lambda} + \sqrt{B_{\Lambda} B_{\Theta}}}{A_{\Lambda} A_{\Theta}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{(1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}}}{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}} \right). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \|T_{\Gamma} - T_{\Psi}\| & \leq \frac{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \sqrt{B_{\Delta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\|} \times \\ & \left(\sqrt{B_{\Delta} B_{\Gamma}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{A_{\Lambda} + B_{\Lambda} + \sqrt{B_{\Lambda} B_{\Theta}}}{A_{\Lambda} A_{\Theta}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{(1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}}}{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}} \right). \end{aligned}$$

由引理3.1知 $\{\Gamma_{\omega} - \Psi_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列且界为

$$\begin{aligned} B_{\Lambda-\Theta} & \left(\frac{1}{1 - \sqrt{B_{\Lambda-\Theta}} \sqrt{B_{\Delta}} \|(S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D)^{-1}\|} \right)^2 \times \\ & \left(\sqrt{B_{\Delta} B_{\Gamma}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{A_{\Lambda} + B_{\Lambda} + \sqrt{B_{\Lambda} B_{\Theta}}}{A_{\Lambda} A_{\Theta}} \|S_{\Lambda}^{\frac{1}{2}} D\| + \frac{(1 + \alpha) \sqrt{B_{\Delta}}}{\sqrt{B_{\Lambda-\Theta}}} \right)^2. \end{aligned}$$

§4 对偶连续广义框架

本节利用连续广义框架预框架算子刻画对偶连续广义框架, 讨论对偶连续广义框架在算子的作用下具有保持作用. 首先给出一个引理.

引理4.1^[15] 设 $\{\Theta_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义标准正交基, $\{\Lambda_{\omega} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_{\omega})\}_{\omega \in \Omega}$ 满足对任意 $f \in \mathcal{H}$, $\{\Lambda_{\omega} f\}_{\omega \in \Omega}$ 是强可测的. 则 $\{\Lambda_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列当且仅当存在唯一的算子 $T \in L(\mathcal{H})$ 满足 $\Lambda_{\omega} = \Theta_{\omega} T^*$, $\omega \in \Omega$.

定义4.1 引理4.1中所定义的算子 T 称为 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义预框架算子, 不出现混淆的情况下简称预框架算子.

定理4.1 设 $\{\Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义标准正交基, $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列, T, S 分别是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的预框架算子和框架算子, 则 $S = TT^*$.

证 由引理4.1知, $\Lambda_\omega = \Theta_\omega T^*$, $\omega \in \Omega$. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$S(f) = \int_{\Omega} \Lambda_\omega^* \Lambda_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} T \Theta_\omega^* \Theta_\omega T^* f d\mu(\omega) = T \int_{\Omega} \Theta_\omega^* \Theta_\omega T^* f d\mu(\omega) = TT^* f.$$

定理4.2 设 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架, $\{\Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义标准正交基. 若算子 T 为 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的预框架算子. 则 $\{\Gamma_\omega \in L(\mathcal{H}, \mathcal{V}_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的对偶连续广义框架当且仅当对任意 $\omega \in \Omega$, $\Gamma_\omega = \Theta_\omega V^*$, 其中 V 是 T^* 的有界左逆算子.

证 ($\Rightarrow$) 假设 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的对偶连续广义框架. 如果 V 为 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的预框架算子. 则对任意 $\omega \in \Omega$, 有 $\Gamma_\omega = \Theta_\omega V^*$ 并且 V 是有界算子. 又因为对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 $f = \int_{\Omega} \Lambda_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega)$. 注意到算子 T 为 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的预框架算子. 则 $\Lambda_\omega = \Theta_\omega T^*$. 所以

$$f = \int_{\Omega} T \Theta_\omega^* \Theta_\omega V^* f d\mu(\omega) = T \int_{\Omega} \Theta_\omega^* \Theta_\omega V^* f d\mu(\omega) = TV^* f.$$

有上式可得 $TV^* = I_{\mathcal{H}}$. 因此可得 $VT^* = I_{\mathcal{H}}$. 也即是 V 是 T^* 的有界左逆算子.

($\Leftarrow$) 假设对任意 $\omega \in \Omega$, $\Gamma_\omega = \Theta_\omega V^*$, 且 $VT^* = I_{\mathcal{H}}$. $V \in L(\mathcal{H})$ 是有界满射算子. 由引理4.1可知, $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义Bessel序列. 再由引理2.1, $VV^\dagger = I_{\mathcal{H}}$, 因此 $(V^\dagger)^* V^* = I_{\mathcal{H}}$, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 $\|(V^\dagger)^* V^* f\|^2 \leq \|V^\dagger\|^2 \|V^* f\|^2$. 可以得到

$$\int_{\Omega} \|\Gamma_\omega f\|^2 d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \|\Theta_\omega V^* f\|^2 d\mu(\omega) = \|V^* f\|^2 \geq \frac{1}{\|V^\dagger\|^2} \|f\|^2.$$

也即 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架. 注意到, 对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$\int_{\Omega} \Lambda_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} T \Theta_\omega^* \Theta_\omega V^* f d\mu(\omega) = T \int_{\Omega} \Theta_\omega^* \Theta_\omega V^* f d\mu(\omega) = TV^* f = f.$$

所以 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的对偶连续广义框架.

下述定理利用连续广义框架的预框架算子, 给出对偶连续广义框架对的一种特征刻画.

定理4.3 设 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 均是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架, T_1 和 T_2 分别是它们的预框架算子. 则 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对当且仅当 $T_1 T_2^* = I_{\mathcal{H}}$ 或者 $T_2 T_1^* = I_{\mathcal{H}}$.

证 由于 T_1 和 T_2 分别是 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的预框架算子, 设 $\{\Theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义标准正交基. 则对任意 $\omega \in \Omega$, 有 $\Theta_\omega T_1^* = \Lambda_\omega$ 和 $\Theta_\omega T_2^* = \Gamma_\omega$. 因此对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有

$$\int_{\Omega} \Lambda_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (\Theta_\omega T_1^*)^* \Theta_\omega T_2^* f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} T_1 \Theta_\omega^* \Theta_\omega T_2^* f d\mu(\omega) =$$

$$T_1 \int_{\Omega} \Theta_\omega^* \Theta_\omega T_2^* f d\mu(\omega) = T_1 T_2^* f.$$

类似可证 $\int_{\Omega} \Gamma_\omega^* \Lambda_\omega f d\mu(\omega) = T_2 T_1^* f$. 即 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对当且仅当 $T_1 T_2^* = I_{\mathcal{H}}$ 或者 $T_2 T_1^* = I_{\mathcal{H}}$.

下述定理说明对偶连续广义框架对在算子作用下的保持性质.

定理4.4 设连续广义框架 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对. $W \in L(\mathcal{H})$ 是余同构算子. 则 $\{\Lambda_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对.

证 注意到 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对并且 $W \in L(\mathcal{H})$ 是余同构算子.

则 $\{A_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 均是连续广义框架. 事实上, $W \in L(\mathcal{H})$ 是余同构算子, 即 $\langle W^* f, W^* g \rangle = \langle f, g \rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$. 因此 $WW^* = I_{\mathcal{H}}$, 易知

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|A_\omega W^* f\|^2 d\mu(\omega) &\geq A_1 \|W^* f\|^2 \geq \frac{A_1}{\|W\|^2} \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}, \\ \int_{\Omega} \|\Gamma_\omega W^* f\|^2 d\mu(\omega) &\geq A_2 \|W^* f\|^2 \geq \frac{A_2}{\|W\|^2} \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

其中 A_1, A_2 分别为 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的框架下界. 由于 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 $f = \int_{\Omega} A_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega)$. 因此

$$Wf = \int_{\Omega} W A_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (A_\omega W^*)^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega).$$

用 $W^* f$ 代替上式中的 f , 有 $f = WW^* f = \int_{\Omega} (A_\omega W^*)^* \Gamma_\omega W^* f d\mu(\omega)$.

即 $\{A_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega W^*\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对.

还有下面更一般的结果.

定理4.5 设连续广义框架 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对. $T \in L(\mathcal{H})$ 是满射算子. 则 $\{A_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对. 相似地, $\{A_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对.

证 注意到 $T \in L(\mathcal{H})$ 是满射算子, 由引理2.1知, $TT^\dagger = I_{\mathcal{H}}$, 因此 $(T^\dagger)^* T^* = I_{\mathcal{H}}$. 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 $\|(T^\dagger)^* T^* f\|^2 \leq \|T^\dagger\|^2 \|T^* f\|^2$. 因此 $\int_{\Omega} \|A_\omega T^* f\|^2 d\mu(\omega) \geq A \|T^* f\|^2 \geq \frac{A}{\|T^\dagger\|^2} \|f\|^2$, 其中 A 是 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的下框架界. $\{A_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架. 类似可以证明 $\{\Gamma_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$, $\{A_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 均是 $\mathcal{H}$ 关于 $\{\mathcal{V}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 的连续广义框架. 又由 $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对, 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 $f = \int_{\Omega} A_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega)$. 因此

$$Tf = \int_{\Omega} T A_\omega^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (A_\omega T^*)^* \Gamma_\omega f d\mu(\omega).$$

上式中用 $T^\dagger f$ 替代 f , 有 $TT^\dagger f = \int_{\Omega} (A_\omega T^*)^* \Gamma_\omega T^\dagger f d\mu(\omega)$. 又注意到 $TT^\dagger = I_{\mathcal{H}}$, 故

$$f = TT^\dagger f = \int_{\Omega} (A_\omega T^*)^* \Gamma_\omega T^\dagger f d\mu(\omega),$$

即 $\{A_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对. 类似可证 $\{A_\omega T^\dagger\}_{\omega \in \Omega}$ 和 $\{\Gamma_\omega T^*\}_{\omega \in \Omega}$ 是对偶连续广义框架对.

参考文献:

- [1] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series[J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341-366.
- [2] Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions[J]. J Math Phy, 1986, 27: 1271-1283.
- [3] Chan R H, Riemenschneider S D, Shen Lixin, et al. Tight frame: An efficient way for high-resolution image reconstruction[J]. Appl Compute Harmon Anal, 2004, 17: 91-115.
- [4] Strohmer T. Approximation of dual Gabor frames, window decay, and wireless communication[J]. Appl Compute Harmon Anal, 2001, 11: 243-262.
- [5] Candès E J. Harmonic analysis of neural networks[J]. Appl Compute Harmon Anal, 1999, 6: 197-218.
- [6] Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

- [7] Khosravi A, Azandaryani M M. Approximate duality of g -frames in Hilbert spaces[J]. Acta Math Sci, 2014, 34(3): 639-652.
- [8] 肖祥春, 曾晓明. 连续 g -框架的刻画[J]. 数学学报, 2012, 55(6): 1131-1144.
- [9] Gabardo J P, Han D. Frames associated with measurable space[J]. Adv Comput Math, 2003, 18(3): 127-147.
- [10] Casazza P G. The art of frame theory[J]. Taiwanese J Math, 2000, 4(2): 129-201.
- [11] Javanshiri H. Some properties of approximately dual frames in Hilbert spaces[J]. Result Math, 2016, 70: 475-485.
- [12] Ali S T, Antoine J P, Gazeau J P. Continuous frames in Hilbert spaces[J]. Ann Phys, 1993, 222: 1-37.
- [13] Sun Wenchang. G -frames and g -Riesz bases[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 437-452.
- [14] Abdollahpour M R, Faroughi M H. Continuous g -frames in Hilbert spaces[J]. Southeast Asian Bull Math, 2008, 32: 1-19.
- [15] Rahmani M. Characterization of continuous g -frames via operators[J]. Proc Institute Math Mech, 2020, 46(1): 79-93.
- [16] Christensen O, Laugesen R S. Approximately dual frame pairs in Hilbert spaces and applications to Gabor frames[J]. Sampl Theory in Sign Image Proc, 2011, 9: 77-90.
- [17] Zhang Wei. Dual and approximately dual Hilbert-Schmidt frames in Hilbert spaces[J]. Result Math, 2018, 73(1): 4.
- [18] Mirzaee A M, Amir K. Duals and approximate duals of g -frames in Hilbert spaces[J]. J Linear Topol Algebra, 2015, 4: 259-265.
- [19] Akbar A A, Fahimeh A N. Some properties of alternate duals and approximate alternate duals of fusion frames[J]. Turkish J Math, 2017, 41: 1191-1203.
- [20] Guo Qianping, Leng Jingsong, Li Houbiao. Construct approximate dual g -frames in Hilbert spaces[J]. Linear Multilinear Algebra, 2021, 69(2): 245-258.
- [21] Xiao Xiangchun, Zeng Xiaoming. Some equalities and inequalities of g -continuous frames[J]. Sci China Math, 2010, 53: 2621-2632.

Characterization and stability of approximately dual (dual) continuous generalized frames in Hilbert spaces

FU Yan-ling¹, ZHANG Wei², LI Shuan-bao³

(1. School of Statistics and Mathematics, Henan Finance University, Zhengzhou 450046, China;

2. School of Mathematics and Information Sciences, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046, China;

3. School of artificial Intelligence, Henan Finance University, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: In this paper, approximately dual continuous generalized frames and dual continuous generalized frames are discussed by using operator properties. First, the concept of approximately dual for continuous generalized frames is introduced, a new characterization is obtained for approximately dual continuous generalized frames of a given frames. Secondly, some perturbation results for approximately dual continuous generalized frames are obtained. Finally, dual continuous generalized frames are characterized in terms of the generalized preframe operators.

Keywords: continuous generalized frame; approximate dual continuous generalized frame; dual continuous generalized frame; operator

MR Subject Classification: 42C15; 42C40