

一类从对数型Bloch空间到加权Bergman空间的广义Hilbert算子

王立怡¹, 叶善力^{1*}, 高进寿²

(1. 浙江科技大学 理学院, 浙江杭州 310023;
2. 福建师范大学 数学与统计学院, 福建福州 350117)

摘要: μ 是区间 $[0, 1)$ 上的正Borel测度. 对 $\alpha > 0$, 定义矩阵 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha} = (\mu_{n, k, \alpha})_{n, k \geq 0}$, 其中

$$\mu_{n, k, \alpha} = \int_{[0, 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} t^{n+k} d\mu(t).$$

通过作用于单位圆盘 D 上解析函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的Taylor系数, 该矩阵可定义广义Hilbert算子 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$, 使得

$$\mathcal{H}_{\mu, \alpha}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_{n, k, \alpha} a_k \right) z^n.$$

文中得到算子 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 从对数型加权Bloch空间 $\mathcal{B}_{L^\beta}(\beta \geq 0)$ 到加权Bergman空间 $A_{\alpha-2}^p(\alpha > 1)$, 及到Bloch型空间 $\mathcal{B}_\alpha(\alpha \geq 2)$ 是有界(或紧)算子的充分必要条件.

关键词: 广义Hilbert算子; 加权Bergman空间; Bloch型空间; Carleson测度

中图分类号: O174.5

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0159-10

§1 引言

定义 D 是复平面 C 上的单位圆盘, $H(D)$ 表示 D 上解析函数的全体.

设 $f \in H(D)$, 定义

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup \left\{ (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| : z \in D \right\}, \quad 0 < \alpha < +\infty.$$

若 $\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} < +\infty$, 则称 f 属于 α -Bloch空间 $\mathcal{B}_\alpha$. 特别地, 当 $\alpha = 1$ 时, $\mathcal{B}_\alpha$ 即为经典Bloch空间 $\mathcal{B}$ (参见[1]). 容易验证, $\mathcal{B}_\alpha$ 在 $\|f\|_\alpha = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ 范数下是一个Banach空间. 关于 α -Bloch空间的相关理论可参见文献[2].

另一类加权的Bloch型空间, β -对数Bloch空间 $\mathcal{B}_{L^\beta}$, 由 $f \in H(D)$ 且满足

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} = \sup \left\{ (1 - |z|^2) \left(\log \frac{e}{1 - |z|} \right)^\beta |f'(z)| : z \in D \right\} < \infty$$

收稿日期: 2024-07-04 修回日期: 2024-10-01

*通讯作者, E-mail: slye@zust.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY23A010003)

的函数组成, 其中 $0 \leq \beta < \infty$. 易知 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 在范数

$$\|f\|_{L,\beta} = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}}$$

定义下是Banach空间. 当 β 取0时, $\mathcal{B}_{L^0}$ 即为经典Bloch空间 $\mathcal{B}$, 而 $\beta = 1$ 时, $\mathcal{B}_{L^1}$ 为经典的对数Bloch空间, 简记为 $\mathcal{B}_L$. 有关对数Bloch空间的内容可见文[3-4].

对 $0 < p < \infty, \alpha > -1$, 若 $f \in H(\mathbf{D})$ 且满足条件

$$\|f\|_{A_\alpha^p} \stackrel{\text{def}}{=} \left((\alpha+1) \int_{\mathbf{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

则称 f 属于加权Bergman空间 A_α^p , 这里 $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ 表示 $\mathbf{D}$ 上标准化Lebesgue面积测度. 当 $\alpha = 0$, 即是经典Bergman空间, 可简化表示为 A^p . 关于Bergman空间相关的符号和结果可见文献[5-6]. 上述提到的两类空间 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 与 A_α^p 满足如下关系: 当 $\alpha > -1$ 时, $\mathcal{B}_{L^\beta} \subset \bigcap_{0 < p < \infty} A_\alpha^p$, §2用到此性质.

下面介绍本文所讨论的算子. 设 μ 是 $\mathbf{D}$ 上的正Borel测度. 对于 $\alpha > 0$, 定义矩阵 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha} = (\mu_{n,k,\alpha})_{n,k \geq 0}$, 其中 $\mu_{n,k,\alpha} = \int_{[0,1)} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} t^{n+k} d\mu(t)$. 该矩阵 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 可通过作用于 $\mathbf{D}$ 上解析函数的Taylor系数

$$a_n \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{n,k,\alpha} a_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

定义一个算子. 更准确地说, 如果 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H(\mathbf{D})$, 对于矩阵 $\mu_{n,k,\alpha}$, 定义对应的矩阵算子, 仍记为 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$, 使得

$$\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_{n,k,\alpha} a_k \right) z^n, \quad z \in \mathbf{D}, \quad (1)$$

此时要求等式右边有意义故定义了 $\mathbf{D}$ 上的一个解析函数. 算子 $\mathcal{H}_{\mu,1}$ (即 $\mathcal{H}_\mu$) 已经被学者进行过广泛的研究, 可见文献[7-10]; $\alpha = 2$ 的情形可见文献[11-16], 其中算子 $\mathcal{H}_{\mu,2}$ 被记为 $\mathcal{DH}_\mu$, 称其为微分Hilbert算子; 推广后的算子 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ ($\alpha > 0$), 称之为广义Hilbert算子, 相关内容可见文献[17-18].

与 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 有着紧密联系的积分型广义Hilbert算子 $\mathcal{I}_{\mu,\alpha}$, 定义为

$$\mathcal{I}_{\mu,\alpha}(f)(z) = \int_{[0,1)} \frac{f(t)}{(1-tz)^\alpha} d\mu(t), \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

其中等式右侧有意义, 并在 $\mathbf{D}$ 上定义了一个解析函数. Galanopoulos和Peláez在[10]中描述了 $\mathcal{H}_{\mu,1}$ 在Hardy空间 H^1 中有界(或紧)时测度 μ 的特征, 并对 $\mathcal{H}_{\mu,1}$ 和 $\mathcal{I}_{\mu,1}$ 之间的等价条件进行描述. 叶善力和周智慧推广了这一算子, 给出了使得 $\mathcal{DH}_\mu$ 和 $\mathcal{I}_{\mu,2}$ 等价的条件, 及在Bloch空间^[15]和Bergman空间^[16]有界(或紧)时测度 μ 的特征. 随后他们给出了广义Hilbert矩阵 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 算子和积分型Hilbert矩阵 $\mathcal{I}_{\mu,\alpha}$ 算子在Bloch空间的等价条件^[17]. 此后, 叶善力和冯光豪又将这一工作扩展到了加权Bergman空间及Dirichlet空间上^[18]. 最近, 他们在文献[13]给出了微分Hilbert算子 $\mathcal{DH}_\mu$ 在经典Hardy空间上的特性.

叶善力和徐芸在[14]中对微分Hilbert算子 $\mathcal{DH}_\mu$ 从对数型Bloch空间到经典Bergman空间上的特性进行了描述, 本文对这一结果进行推广, 给出广义Hilbert算子 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从对数型Bloch空间用到加权Bergman空间及到 α -Bloch空间的描述.

$$\mathcal{H}_{\mu,\alpha} : \mathcal{B}_{L^\beta} \rightarrow A_{\alpha-2}^p, \quad \beta \geq 0, \alpha > 1 \text{ 且 } p \geq 1.$$

$$\mathcal{H}_{\mu,\alpha} : \mathcal{B}_{L^\beta} \rightarrow \mathcal{B}_{\alpha-1}, \quad \beta \geq 0, \alpha \geq 2.$$

$$\mathcal{H}_{\mu,\alpha} : \mathcal{B}_{L^\beta} \rightarrow \mathcal{B}, \quad \beta \geq 0.$$

下文中将研究 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 在这些情况下的有界性及紧性. 在上述提到的文献中, Carleson测度在描述测度条件中均起到重要作用. 本文将继续借助Carleson测度来讨论所研究的空间.

设 μ 是 $\mathbf{D}$ 上的正Borel测度, 令 $S(I) = \{z = re^{it} : e^{it} \in I; 1 - \frac{|I|}{2\pi} \leq r \leq 1\}$, 其中 I 是 $\partial\mathbf{D}$ 上的区间, $|I|$ 表示它的长度. 若对于 $0 \leq a, b < \infty$ 及 $0 < s < \infty$, 存在正常数 C 满足

$$\sup_I \frac{(\log \log \frac{2\pi}{|I|})^a (\log \frac{2\pi}{|I|})^b \mu(S(I))}{|I|^s} \leq C,$$

则称 μ 是 a -双对数 b -对数 s -Carleson测度. 当 $a = b = 0$ 时, μ 即为经典的 s -Carleson测度. 若 μ 满足当 $|I| \rightarrow 0$ 时, $(\log \log \frac{2\pi}{|I|})^a (\log \frac{2\pi}{|I|})^b \mu(S(I)) = o(|I|^s)$, 则称 μ 为消失的 a -双对数 b -对数 s -Carleson测度. 有关Carleson测度的相关理论可见文献[19-20].

区间 $[0, 1)$ 上的正Borel测度可以通过下述方法看作单位圆盘 $\mathbf{D}$ 上的正Borel测度: 对任意 $\mathbf{D}$ 上的Borel子集 A , 定义 $\tilde{\mu}(A) = \mu(A \cap [0, 1))$, 通过这种方式, 区间 $[0, 1)$ 上的正Borel测度 μ 为 a -双对数 b -对数 s -Carleson测度当且仅当存在常数 $C > 0$, 使得

$$(\log \log \frac{2}{1-t})^a (\log \frac{2}{1-t})^b \mu([t, 1)) \leq C(1-t)^s, \quad 0 \leq t < 1.$$

在本文中, C 表示常数, 其值可能在不同情况下发生变化. p' 表示 p 的共轭指标, 即 $1/p + 1/p' = 1$.

§2 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的作用

本节给出使得 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 β -对数Bloch空间 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ ($\beta \geq 0$)到加权Bergman空间 $A_{\alpha-2}^p$ ($p \geq 1$)有界(或紧)的描述. 首先介绍后续将要使用的引理.

引理2.1(见[14, 引理3.3]) 假设 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, 其中 $\beta \in \mathbf{R}$. 那么

- (i) 当 $0 \leq \beta < 1$ 时, $|f(z)| \leq C(\log \frac{e}{1-|z|})^{1-\beta} \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}}$.
- (ii) 当 $\beta = 1$ 时, $|f(z)| \leq C \log \log \frac{e}{1-|z|} \|f\|_{\mathcal{B}_{L^1}}$.
- (iii) 当 $\beta > 1$ 时, $|f(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}}$.

引理2.2 假设 $0 \leq \beta < \infty$, μ 是 $[0, 1)$ 上的正Borel测度. 对任意 $s > 0$, 若 μ 是 s -Carleson测度, 且满足条件

- (i) 当 $0 \leq \beta < 1$ 时, $\int_{[0,1)} (\log \frac{e}{1-t})^{1-\beta} d\mu(t) < \infty$.
- (ii) 当 $\beta = 1$ 时, $\int_{[0,1)} \log \log \frac{e}{1-t} d\mu(t) < \infty$.
- (iii) 当 $\beta > 1$ 时, μ 是有限测度.

则对任意 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)$ 有定义, 且 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f) = \mathcal{I}_{\mu_\alpha}(f)$.

证 根据[14, 定理3.5]可知对于 $f \in \mathcal{B}_{L^\alpha}$, $\mathcal{I}_{\mu_\alpha}$ 有定义. 此外, 结合[18, 定理3.3]及 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 与 A_α^p 之间的包含关系, 可知 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 在 $\mathcal{B}_{L^\alpha}$ 上有定义, 且与 $\mathcal{I}_{\mu_\alpha}$ 满足相等关系.

引理2.3 假设 $\alpha > 1, \beta \geq 0$, 且 μ 满足引理2.2中的条件, 则对 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}, g \in A_{\alpha-2}^1$ 及 $0 \leq r < 1$, 有

$$(\alpha - 1) \int_{\mathbf{D}} \overline{\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)(rz)} g(rz) (1 - |z|^2)^{\alpha-2} dA(z) = \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t). \quad (3)$$

证 首先验证(3)中左侧积分的收敛性, 以确保后续讨论有意义. 由于 $\beta \geq 0$ 且 μ 满足引理2.2的条件, 故由引理2.1可知, 对任意 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, $\int_{[0,1)} |f(t)| d\mu(t) < \infty$. 由此可知, 对任

意 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, $g \in A_{\alpha-2}^1$, 有

$$\begin{aligned} & (\alpha-1) \int_D \int_{[0,1)} \left| \frac{f(t)}{(1-trz)^\alpha} g(rz)(1-|z|^2)^{\alpha-2} \right| d\mu(t) dA(z) \leq \\ & \frac{1}{(1-r)^\alpha} \int_{[0,1)} |f(t)| d\mu(t) \int_D (\alpha-1)(1-|z|^2)^{\alpha-2} |g(rz)| dA(z) \leq \\ & \frac{C}{(1-r)^\alpha} \|g_r\|_{A_{\alpha-2}^1} \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha} \|g\|_{A_{\alpha-2}^1}, \end{aligned}$$

其中 $g_r(z) = g(rz)$, $0 < r < 1$. 再结合Bergman空间核函数的再生性及Fubini定理, 得到

$$\begin{aligned} & \int_D \overline{\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)}(rz) g(rz)(1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) = \\ & \int_D \int_{[0,1)} \frac{\overline{f(t)}}{(1-tr\bar{z})^\alpha} d\mu(t) g(rz)(1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) = \\ & \int_{[0,1)} \int_D \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-2} g(rz)}{(1-tr\bar{z})^\alpha} dA(z) \overline{f(t)} d\mu(t) = \frac{1}{\alpha-1} \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t). \end{aligned}$$

接下来将讨论 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的作用, 首先考虑 $p > 1$ 的情形.

定理2.4 设 $\alpha > 1$, 且 μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理2.2的正Borel测度. 定义正Borel测度 ν 为

$$d\nu(t) = \begin{cases} (\log \frac{e}{1-t})^{1-\beta} d\mu(t), & 0 \leq \beta < 1, \\ (\log \log \frac{e}{1-t}) d\mu(t), & \beta = 1, \\ d\mu(t), & \beta > 1. \end{cases}$$

则对于 $p > 1$, 以下条件等价.

- (i) $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 是有界的.
- (ii) $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 是紧的.
- (iii) 对于任意 $g \in A_{\alpha-2}^{p'}$, 满足 $\int_{[0,1)} g(t) d\nu(t) \leq \|g\|_{A_{\alpha-2}^{p'}}$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

证 首先考虑 $0 \leq \beta < 1$ 的情形.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) 根据加权Bergman空间的对偶定理(见[21, 定理2.1]): 对于 $p > 1$ 及 $\alpha_1, \alpha_2 > -1$, 通过关系式

$$\langle f, g \rangle = \int_D \overline{f(z)} g(z) (1-|z|^2)^{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{\alpha_2}{p'}} dA(z), \quad f \in A_{\alpha_1}^p, g \in A_{\alpha_2}^{p'}$$

有 $(A_{\alpha_1}^p)^* \cong A_{\alpha_2}^{p'}$ 及 $(A_{\alpha_2}^{p'})^* \cong A_{\alpha_1}^p$. 结合(3), 得到 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的有界算子当且仅当存在正常数 C , 使得

$$\left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(t) d\mu(t) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^{p'}}, \quad f \in \mathcal{B}_{L^\beta}, g \in A_{\alpha-2}^{p'}. \quad (4)$$

若(i)中的有界性条件成立, 对 $0 < a < 1$, 取测试函数

$$f_a(z) = \left(\log \frac{e}{1-az} \right)^{1-\beta},$$

通过计算可得 $f_a \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, $\sup_{0 < a < 1} \|f_a\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} < \infty$. 因此

$$\infty > C \sup_{0 < a < 1} \|f_a\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^{p'}} \geq \left| \int_{[0,1)} f_a(t) g(t) d\mu(t) \right| \geq \left| \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-at} \right)^{1-\beta} g(t) d\mu(t) \right|.$$

令 $a \rightarrow 1^-$, 得到(iii)中的不等式成立.

另一方面, 假设 $\int_{[0,1)} g(t) d\nu(t) = \int_{[0,1)} (\log \frac{e}{1-t})^{1-\beta} g(t) d\mu(t) < \infty$, 可知

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} |f(t)| |g(t)| d\mu(t) &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} (\log \frac{e}{1-t})^{1-\beta} |g(t)| d\mu(t) \leq \\ C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} |g(t)| d\nu(t) &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^{p'}}. \end{aligned}$$

于是(4)成立, 故 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的有界算子.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 首先回顾证明解析函数紧性时的一个常用引理, 即: 假设 X 是从 A 到 B 的有界算子, 其中 A 和 B 是 Banach 空间. 那么对于 A 中任意有界序列 $\{f_n\}$, 如果它在 D 上内闭一致收敛于 0, 那么 X 是紧算子的充要条件是 $X(f_n) \rightarrow 0$ 在 B 中收敛. 该证明可参考[22, 命题3.11].

现假设 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ 是满足 $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} < \infty$ 的函数列, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, f_n 在 D 上内闭一致收敛于 0. 在此条件下, 只需证明在 $A_{\alpha-2}^p$ 中 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f) \rightarrow 0$ 成立即可. 由于 $\int_{[0,1)} g(t) d\nu(t) < \infty$, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{[r,1)} g(t) d\nu(t) &= 0. \text{ 取 } g \in A_{\alpha-2}^{p'}, \text{ 得到} \\ \int_{[0,1)} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) &= \int_{[0,r]} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) + \int_{(r,1)} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\int_{[0,r]} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) + C \|f_n\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{(r,1)} g(t) d\nu(t). \end{aligned}$$

由 $\{f_n\}$ 的收敛性质, 可知 $\int_{[0,r]} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) \rightarrow 0$. 这就说明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1)} |f_n(t)| |g(t)| d\mu(t) = 0$.

0. 再根据(3), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 1^-} \left| \int_D \overline{\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)(rz)} g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) \right| \right) = 0.$$

因此 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f_n) \rightarrow 0$ 在 $A_{\alpha-2}^p$ 上成立. 这就等价于得到了 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的紧算子.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 显然成立.

接下来讨论 $\beta = 1$ 的情况.

(i) $\Rightarrow$ (iii) 假设 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^p$ 的有界算子. 对于 $0 < a < 1$, 取

$$f_a(z) = \log \log \frac{e}{1-az} \in \mathcal{B}_L,$$

那么

$$\begin{aligned} \infty &> C \sup_{0 < a < 1} \|f_a\|_{\mathcal{B}_L} \|g\|_{A_{\alpha-2}^{p'}} \geq \left| \int_{[0,1)} f_a(t) g(t) d\mu(t) \right| \geq \\ &\left| \int_{[0,1)} \log \log \frac{e}{1-at} g(t) d\mu(t) \right| \geq \left| \int_{[0,1)} g(t) d\nu(t) \right|. \end{aligned}$$

于是得到(iii)成立.

剩余部分的证明与 $0 < \beta < 1$ 情形过程类似, 将细节省略. 在 $\beta > 1$ 情况下, 可取测试函数 $f_a(z) = 1 \in \mathcal{B}_{L^\beta}$ 得到结果.

接下来的定理考虑取 $A_{\alpha-2}^p$ 中 $p = 1$ 的情况.

定理2.5 设 $\alpha > 1$, μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理2.2的正Borel测度. 定义正Borel测度 ν 为

$$d\nu(t) = \begin{cases} (\log \frac{e}{1-t})^{2-\beta} d\mu(t), & 0 \leq \beta < 1, \\ (\log \log \frac{e}{1-t}) (\log \frac{e}{1-t}) d\mu(t), & \beta = 1, \\ (\log \frac{e}{1-t}) d\mu(t), & \beta > 1. \end{cases}$$

则以下条件等价.

(i) $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^1$ 是有界的.

(ii) $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^1$ 是紧的.

(iii) 对于任意 $0 \leq \beta < \infty$, 满足 $\int_{[0,1)} d\nu(t) < \infty$.

证 由于使用的方法与定理2.4类似, 仅给出 $0 \leq \beta < 1$ 的部分证明.

(i) $\Rightarrow$ (iii) 首先回顾关于 $A_{\alpha-2}^1$ 空间的对偶定理(见[6, 定理5.15]): 通过关系式

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_D \overline{f(rz)} g(rz) (1 - |z|^2)^{\alpha-2} dA(z), \quad f \in \mathcal{B}, g \in A_{\alpha-2}^1$$

有 $(A_{\alpha-2}^1)^* \cong \mathcal{B}$. 结合(3)可知, $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^1$ 的有界算子当且仅当存在 $C > 0$, 使得

$$\left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{\mathcal{B}}, \quad f \in \mathcal{B}_{L^\beta}, g \in \mathcal{B}. \quad (5)$$

假设 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $A_{\alpha-2}^1$ 的有界算子, 对 $0 < a < 1$, 考虑测试函数

$$f_a(z) = \left(\log \frac{e}{1-az} \right)^{1-\beta} \in \mathcal{B}_{L^\beta}, \quad g_a(z) = \log \frac{e}{1-az},$$

计算可知 $g_a \in \mathcal{B}$, 且 $\sup_{0 < a < 1} \|g\|_{\mathcal{B}} < \infty$. 于是对于 $r \in [a, 1)$, 可以得到

$$\begin{aligned} \infty &> C \sup_{0 < a < 1} \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \sup_{0 < a < 1} \|g\|_{\mathcal{B}} \geq \left| \int_{[0,1)} f_a(t) g_a(r^2 t) d\mu(t) \right| \geq \\ &\left| \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-at} \right)^{1-\beta} \log \frac{e}{1-ar^2 t} d\mu(t) \right| \geq \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-at} \right)^{2-\beta} d\mu(t). \end{aligned}$$

当 a 趋向于 1^- 时, 即得 $\int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{2-\beta} d\mu(t) < \infty$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 假设 $\int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{2-\beta} d\mu(t) < \infty$. 对于 $g \in \mathcal{B}$, 易知其满足

$$|g(z)| \leq C \|g\|_{\mathcal{B}} \log \frac{e}{1-|z|}.$$

因此对任意 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$ 及 $g \in \mathcal{B}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t) \right| &\leq C \|g\|_{\mathcal{B}} \int_{[0,1)} |f(t)| \log \frac{e}{1-r^2 t} d\mu(t) \leq \\ &C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{\mathcal{B}} \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{2-\beta} d\mu(t) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

有界性得证.

剩余部分的证明省略.

§3 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的作用

本节将介绍 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 从 β -对数 Bloch 空间 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到经典 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 及到 α -Bloch 空间 $\mathcal{B}_\alpha$ 的有界性及紧性. 基于定理2.5的过程可立即得到以下关于经典 Bloch 空间的定理.

定理3.1 假设 $\alpha > 1$, μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理2.2的正 Borel 测度.

(i) 若 $0 \leq \beta < 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 $(1-\beta)$ -对数 α -Carleson 测度.

(ii) 若 $\beta = 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^1}$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 1-双对数 α -Carleson 测度.

(iii) 若 $\beta > 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 α -Carleson 测度.

证 (i) 若 μ 是 $(1-\beta)$ -对数 α -Carleson 测度, 定义 $d\nu(t) = \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{1-\beta} d\mu(t)$, 则根据[14, 引理4.1]可知 ν 是 α -Carleson 测度. 回顾关于 Carleson 测度的经典定理(见[23, 定理A]): 对于 $\alpha > 1$,

ν 是 α -Carleson测度当且仅当对于任意 $f \in A_{\alpha-2}^1$,

$$\left\{ \int_D |f(z)| d\nu(z) \right\} \leq C \|f\|_{A_{\alpha-2}^1}. \quad (6)$$

因此 $A_{\alpha-2}^1$ 到 $L^1(D, \mu)$ 的恒等映射 i 是有界的, 将其范数记为 $\mathcal{N}(\mu)$. 结合 $A_{\alpha-2}^1$ 和 $\mathcal{B}$ 的对偶关系, 可知 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子当且仅当

$$\left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^1}, \quad f \in \mathcal{B}_{L^\beta}, g \in A_{\alpha-2}^1.$$

联系引理2.1及(6), 得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2 t) d\mu(t) \right| &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{1-\beta} |g(r^2 t)| d\mu(t) \leq \\ &C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} |g(r^2 t)| d\nu(t) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^1}, \end{aligned}$$

故有界性成立.

另一方面, 假设 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的有界算子, 对任意 $0 < a < 1$, 设

$$f_a(z) = \left(\log \frac{e}{1-at} \right)^{1-\beta} \in \mathcal{B}_{L^\beta} \quad g_a(z) = \left(\frac{1-a^2}{(1-az)^2} \right)^\alpha \in A_{\alpha-2}^1,$$

由此, 对任意 $r \in [a, 1)$, 可知

$$\begin{aligned} \infty &> \sup_{0 < a < 1} \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \sup_{0 < a < 1} \|g\|_{A_{\alpha-2}^1} \geq C \left| \int_{[0,1)} f_a(t) g_a(r^2 t) d\mu(t) \right| \geq \\ &C \int_{[a,1)} \left(\log \frac{e}{1-at} \right)^{1-\beta} \left(\frac{1-a^2}{(1-ar^2 t)^2} \right)^\alpha d\mu(t) \geq C \frac{(\log \frac{e}{1-a})^{1-\beta}}{(1-a)^\alpha} \mu([a, 1)). \end{aligned}$$

根据Carleson测度的定义, 得到 μ 是 $(1-\beta)$ -对数 α -Carleson测度.

(ii)和(iii)的论证与(i)类似.

定理3.2 假设 $\alpha > 1$, μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理2.2的正Borel测度.

(i) 若 $0 \leq \beta < 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的 $(1-\beta)$ -对数 α -Carleson测度.

(ii) 若 $\beta = 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^1}$ 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的1-双对数 α -Carleson测度.

(iii) 若 $\beta > 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的 α -Carleson测度.

证 在此同样仅给出(i)的证明.

假设 $0 \leq \beta < 1$, 且 $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子, 考虑序列 $\{a_n\} \subset (0, 1)$, 满足 $a_n \rightarrow 1$. 取

$$f_{a_n}(z) = \left(\log \frac{e}{1-a_n t} \right)^{1-\beta} \in \mathcal{B}_{L^\beta},$$

则 f_{a_n} 在 D 上内闭一致收敛. 因此 $\{\mathcal{H}_{\mu, \alpha}(f_{a_n})\}$ 在 $\mathcal{B}$ 中收敛于0. 结合(3)可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1)} \overline{f_{a_n}(t)} g(r^2 t) d\mu(t) &= \\ (\alpha-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \overline{\mathcal{H}_{\mu, \alpha}(f_{a_n})(rz)} g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) &= 0, \end{aligned}$$

其中 $g \in A_{\alpha-2}^1$. 再取 $g_{a_n}(z) = \left(\frac{1-a_n^2}{(1-a_n z)^2} \right)^\alpha \in A_{\alpha-2}^1$, 则有

$$\int_{[0,1)} \overline{f_{a_n}(t)} g_{a_n}(r^2 t) d\mu(t) \geq C \int_{a_n}^1 \left(\log \frac{e}{1-a_n t} \right)^{1-\beta} \left(\frac{1-a_n^2}{(1-a_n r^2 t)^2} \right)^\alpha d\mu(t) \geq C \frac{(\log \frac{e}{1-a_n})^{1-\beta}}{(1-a_n)^\alpha} \mu([a_n, 1)).$$

结合 $\{a_n\}$ 的定义, 可推出 $\lim_{a_n \rightarrow 1^-} \frac{(\log \frac{e}{1-a_n})^{1-\beta}}{(1-a_n)^\alpha} \mu([a_n, 1)) = 0$. 即证 μ 是消失的 $(1-\beta)$ -对数 α -Carleson 测度.

反之, 假设 μ 满足该 Carleson 测度条件. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为在 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 范数下的有界序列, 且满足在 D 上内闭一致收敛于 0. 对 $0 < r < 1$, 设

$$d\mu_r(z) = \chi_{r < |z| < 1}(t) d\mu(t).$$

若 μ 是 α -Carleson 测度, 则 μ 是消失的 α -Carleson 测度当且仅当 $r \rightarrow 1^-$ 时,

$$\mathcal{N}(\mu_r) \rightarrow 0.$$

对于 $g \in A_{\alpha-2}^1$,

$$\int_{[0,1)} |f_n(t)| |g(r^2 t)| d\mu(t) = \int_{[0,r]} |f_n(t)| |g(r^2 t)| d\mu(t) + \int_{(r,1)} |f_n(t)| |g(r^2 t)| d\mu(t).$$

而

$$\begin{aligned} \int_{(r,1)} |f_n(t)| |g(r^2 t)| d\mu(t) &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} \left(\log \frac{e}{1-t} \right)^{1-\beta} |g(r^2 t)| d\mu_r(t) \leq \\ C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \int_{[0,1)} |g(r^2 t)| d\nu_r(t) &\leq C \mathcal{N}(\nu_r) \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A_{\alpha-2}^1}. \end{aligned}$$

从而得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1)} |f_n(t)| |g(r^2 t)| d\mu(t) = 0$. 因此, 对任意 $g \in A_{\alpha-2}^1$, 令 $r \rightarrow 1^-$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_D \overline{\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f_n)(rz)} g(rz) (1-|z|^{\alpha-2}) dA(z) \right| = 0.$$

这样就得到了 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 上收敛于 0, 因此 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 即为 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}$ 的紧算子.

借助 α -Bloch 空间和 Bergman 空间 A^1 之间的对偶关系, 对上述定理稍作推广, 得到以下结果.

定理 3.3 假设 $\alpha \geq 2$, μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理 2.2 的正 Borel 测度.

(i) 若 $0 \leq \beta < 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 $(1-\beta)$ -对数 2-Carleson 测度.

(ii) 若 $\beta = 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^1}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 1-双对数 2-Carleson 测度.

(iii) 若 $\beta > 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的有界算子当且仅当 μ 是 2-Carleson 测度.

证 (i) Bloch 型空间的对偶可看作 Bergman 空间 A^1 . 具体来说, 通过关系式

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_D \overline{f(rz)} g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-1} dA(z), \quad f \in \mathcal{B}_\alpha, g \in A^1, \quad (7)$$

有 $(A^1)^* \cong \mathcal{B}_\alpha$ (见文 [2, p.1150]). 由于 $\alpha \geq 2$, 则对任意 $g \in A^1$, 可得

$$\int_D (1-|z|^2)^{\alpha-2} |g(rz)| dA(z) \leq C \int_D |g(rz)| dA(z) \leq C \|g\|_{A^1}.$$

因此对 $f \in \mathcal{B}_{L^\beta}$, $g \in A^1$ 及 $0 \leq r < 1$, 成立

$$\int_D \int_{[0,1)} \left| \frac{f(t)g(rz)(1-|z|^2)^{\alpha-2}}{(1-rtz)^\alpha} \right| d\mu(t) dA(z) \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha} \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A^1} < \infty.$$

根据Fubini定理有

$$\begin{aligned} \int_D \overline{\mathcal{H}_{\mu,\alpha}(f)(rz)} g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) &= \\ \int_D \int_{[0,1)} \frac{\overline{f(t)}}{(1-rt\bar{z})^\alpha} d\mu(t) g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-2} dA(z) &= \\ \int_{[0,1)} \int_D \frac{g(rz) (1-|z|^2)^{\alpha-2}}{(1-rt\bar{z})^\alpha} dA(z) \overline{f(t)} d\mu(t) &= \frac{1}{\alpha-1} \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2t) d\mu(t). \end{aligned}$$

于是建立了 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 与 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 在 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 算子作用下的等式关系. 再结合(7), 说明了 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是从 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的有界算子的充要条件为

$$\left| \int_{[0,1)} \overline{f(t)} g(r^2t) d\mu(t) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{L^\beta}} \|g\|_{A^1}, \quad f \in \mathcal{B}_{L^\beta}, g \in A^1.$$

证明的剩余部分与定理3.1类似, 将其省略.

定理3.4 假设 $\alpha \geq 2$, μ 是 $[0, 1)$ 上满足引理2.2的正Borel测度.

(i) 若 $0 \leq \beta < 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的 $(1-\beta)$ -对数2-Carleson测度.

(ii) 若 $\beta = 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^1}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的1-双对数2-Carleson测度.

(iii) 若 $\beta > 1$, 则 $\mathcal{H}_{\mu,\alpha}$ 是 $\mathcal{B}_{L^\beta}$ 到 $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ 的紧算子当且仅当 μ 是消失的2-Carleson测度.

证明省略.

参考文献:

- [1] Pommerenke C, Clunie J, Anderson J. On Bloch functions and normal functions[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1974, 270(1): 12-37.
- [2] Zhu Kehe. Bloch type spaces of analytic functions[J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1993, 23(3): 1143-1177.
- [3] 叶善力. 不同权的Bloch型空间之间的加权复合算子[J]. 数学学报, 2007, 50(4): 927-942.
- [4] Pavlović M. Logarithmic Bloch space and its predual[J]. Publications de l'Institut Mathématique, 2016, 100(114): 1-16.
- [5] Duren P, Schuster A. Bergman Spaces[M]. Providence: American Mathematical Society, 2004.
- [6] Zhu Kehe. Operator Theory in Function Spaces, 2nd ed[M]. Providence: American Mathematical Society, 2007.
- [7] Chatzifountas C, Girela D, Peláez J Á. A generalized Hilbert matrix acting on Hardy spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 413(1): 154-168.
- [8] Girela D, Merchán N. A generalized Hilbert operator acting on conformally invariant spaces[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2018, 12(2): 374-398.
- [9] Girela D, Merchán N. A Hankel matrix acting on spaces of analytic functions[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2017, 89: 581-594.
- [10] Galanopoulos P, Peláez J Á. A Hankel matrix acting on Hardy and Bergman spaces[J]. Studia Mathematica, 2010, 200(3): 201-220.
- [11] Xu Yun, Ye Shanli. A derivative Hilbert operator acting from Bergman spaces to Hardy spaces[J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(4): 9290-9302.
- [12] Xu Yun, Ye Shanli, Zhou Zhihui. A derivative-Hilbert operator acting on Dirichlet spaces[J]. Open Mathematics, 2023, 21(1): 20220559.

- [13] Ye Shanli, Feng Guanghao. A Derivative-Hilbert operator acting on Hardy spaces[J]. Acta Mathematica Scientia, Series B, 2023, 43(6): 2398-2412.
- [14] Ye Shanli, Xu Yun. A derivative-Hilbert operator acting from logarithmic Bloch spaces to Bergman spaces[J]. Acta Mathematica Scientia, 2024, 44B(5): 1916-1930.
- [15] Ye Shanli, Zhou Zhihui. A derivative-Hilbert operator acting on the Bloch space[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2021, 15(5): 88.
- [16] Ye Shanli, Zhou Zhihui. A Derivative-Hilbert operator acting on Bergman spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, 506(1): 125553.
- [17] 叶善力, 周智慧. Bloch型空间上的广义Hilbert算子[J]. 数学学报A辑, 2023, 66(3): 557-568.
- [18] Ye Shanli, Feng Guanghao. Generalized Hilbert operators acting on weighted Bergman spaces and Dirichlet spaces[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2023, 17(3): 38.
- [19] MacCluer B, Zhao Ruhan. Vanishing logarithmic Carleson measures[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2002, 46(2): 507-518.
- [20] Zhao Ruhan. On logarithmic Carleson measures[J]. Acta Scientiarum Mathematicarum, 2003, 69(3-4): 605-618.
- [21] Luecking D H. Representation and duality in weighted spaces of analytic functions[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1985, 34(2): 319-336.
- [22] Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions[M]. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [23] Luecking D H. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives[J]. American Journal of Mathematics, 1985, 107(1): 85-111.

Generalized Hilbert operators acting from logarithmic Bloch Spaces to weighted Bergman spaces

WANG Li-yi¹, YE Shan-li¹, GAO Jin-shou²

- (1. School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;
- 2. School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou, 350117, China)

Abstract: Consider μ as a positive Borel measure on the interval $[0, 1)$. For $\alpha > 0$, the generalized Hankel matrix $\mathcal{H}_{\mu, \alpha} = (\mu_{n, k, \alpha})_{n, k \geq 0}$ is defined with the entries given by

$$\mu_{n, k, \alpha} = \int_{[0, 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} t^{n+k} d\mu(t).$$

This matrix formally induces an operator

$$\mathcal{H}_{\mu, \alpha}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu_{n, k, \alpha} a_k \right) z^n$$

on the Taylor coefficients of any analytic function $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ in the unit disk D . The conditions for $\mathcal{H}_{\mu, \alpha}$ to be a bounded (resp., compact) operator from the logarithmic weighted Bloch space $\mathcal{B}_{L^\beta}(\beta \geq 0)$ into the weighted Bergman space $A_{\alpha-2}^p(p \geq 1)$ for $\alpha > 1$, and into the weighted Bloch space $\mathcal{B}_{\alpha-1}$ for $\alpha \geq 2$ have been obtained.

Keywords: generalized Hilbert operators; Bloch type space; weighted Bergman space; Carleson measure

MR Subject Classification: 47B35; 30H30; 30H20