

Calabi复形的极限Sobolev不等式

罗 欣

(浙江大学 数学科学学院, 浙江杭州 310058)

摘 要: 将Korn不等式的极限情形推广至以对称梯度算子为首个算子的Calabi复形. 在某些情况下, 相应的不等式需要用Hardy空间 $\mathcal{H}^1$ 替代Lebesgue空间 L^1 . 证明依赖于对Van Schaftingen相应刻画在微分复形上的推广. 此外, 还给出了Calabi复形椭圆性的直接证明.

关键词: Korn不等式; Calabi复形; 极限Sobolev不等式; 椭圆复形

中图分类号: O177.2; O186.1

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0147-12

§1 引 言

1961年, Calabi^[1]在研究常曲率Riemann流形的形变问题时, 构造了常曲率Riemann流形上Killing层的一个如下分解. 假设 (M, g) 为常曲率Riemann流形, 则有椭圆微分复形

$$0 \longrightarrow \Gamma(TM) \xrightarrow{\mathcal{D}_0} \Gamma(\odot^2 T^*M) \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \Gamma(E_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \Gamma(E_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_3} \cdots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} \Gamma(E_{n-1}) \longrightarrow 0. \quad (1)$$

事实上, Calabi复形(以不同形式)出现在众多领域中. 在弹性力学语境中, 上述复形($n=3$)被称作弹性复形, 其中涉及的空间依次对应于位移, 应变, 应力, 载荷^[2, 第4节]. 算子 $\mathcal{D}_0$ 是Killing算子, 对应齐次方程的解为无穷小等距. 在零曲率背景时, $\mathcal{D}_1$ 就是线性化Riemann曲率算子, 其在弹性力学领域通常被称作Saint-Venant相容算子. 在线性化引力理论中, 线性化度量的规范等价性被刻画为相差一个Killing算子的像, $\mathcal{D}_1$ 可视为一个规范不变量, 其中一个重要的问题便是找寻规范不变量的完备集, 用数学语言可描述为: 给定背景几何下构造Killing算子的(完备)相容复形问题^[3-5]. 在常曲率背景下, 这个相容复形就是Calabi复形. 1983年, Goldschmidt和Gasqui^[6]利用偏微分方程的形式理论 (Formal theory)给出了该复形的另一种构造方法. 如今, Calabi复形的构造被纳入了BGG构造体系中^[7-8], 而后者已经成为了有限元外微分领域离散化复形的一个标准框架^[9].

在零曲率背景时, $\mathcal{D}_0$ 就是对称梯度算子(见后面的(10)), 即

$$\mathcal{D}_0 u = \frac{1}{2} (Du + (Du)^T), \quad u \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),$$

这里 Du 为 u 的(逐分量)梯度. 经典的Korn不等式断言: 对任意 $1 < p < \infty$ 以及 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, 有

$$\|Du\|_{L^p} \leq C \|\mathcal{D}_0 u\|_{L^p}. \quad (2)$$

而由Ornstein^[10]的经典结果可知Korn不等式在 $p = 1$ 时是不成立的. 于是自然的问题是Korn不等式在 $p = 1$ 的极限情形是什么? 注意到由Sobolev嵌入

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \|Du\|_{L^1}, \quad u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n).$$

若Korn不等式在 $p = 1$ 时成立, 则有

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \|\mathcal{D}_0 u\|_{L^1}. \quad (3)$$

于是(3)可看作Korn不等式在 $p = 1$ 时不成立的弥补, 称其为 $\mathcal{D}_0$ 的极限Sobolev不等式^[11].

从2003年开始, Bourgain和Brezis^[12-14], Lanzani和Stein^[15], Van Schaftingen^[11, 16-17]等人系统研究了各种形式的极限Sobolev不等式. 与此同时, 极限Sobolev不等式被推广至各种不同背景的微分复形上, 这个方向上最早的结果是2005年Lanzani和Stein^[15]对于de Rham复形的证明.

定理A 设 $k = 0, 1, \dots, n$. 若 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \wedge^k \mathbf{R}^n)$, 则存在正常数 $C > 0$ 使得估计

$$\begin{cases} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|du\|_{L^1} + \|d^*u\|_{L^1}), & k \neq 1, n-1, \\ \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|du\|_{L^1} + \|d^*u\|_{\mathcal{H}^1}), & k = 1, \\ \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|du\|_{\mathcal{H}^1} + \|d^*u\|_{L^1}), & k = n-1 \end{cases} \quad (4)$$

成立, 这里 $\mathcal{H}^1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的Hardy空间.

在(4)中, 对应于 $k \neq 1, n-1$ 的估计在 $k = 1, n-1$ 时不再成立(反例见[11, 第1.2节]). 之后, 不等式组(4)被推广至其它背景的微分复形上, 有Heisenberg群^[18]以及有限型CR流形上的切向Cauchy-Riemann复形^[19], 与对合椭圆结构相伴的微分复形^[20], Heisenberg群上的Rumin复形^[21]等.

本文将不等式组推广至Calabi复形(1)上(其中 F_k 的定义见后文的(13)).

定理1.1 对任意 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, F_k)$, 存在正常数 $C > 0$ 使得以下估计成立.

- 1) 若 $2 < k < n-1$, 则 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|\mathcal{D}_{k-1}^* u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_k u\|_{L^1})$;
- 2) 若 $k = 0, n$, 则 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C\|\mathcal{D}_0 u\|_{L^1}$; $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C\|\mathcal{D}_{n-1}^* u\|_{L^1}$;
- 3) 若 $k = 1$, 则 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-2}}} \leq C(\|\mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0^* u\|_{\mathcal{H}^1} + \|\mathcal{D}_1 u\|_{L^1})$;
- 4) 若 $k = 2$, 则 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-2}}} \leq C(\|\mathcal{D}_1^* u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_2^* \mathcal{D}_2 u\|_{L^1})$;
- 5) 若 $k = n-1$, 则 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|\mathcal{D}_{n-2}^* u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_{n-1} u\|_{\mathcal{H}^1})$.

本文的结构如下. §2给出Calabi复形涉及的空间与算子的详细定义. §3计算了各算子的形式伴随算子. §4给出了Calabi复形椭圆性的直接证明. §5证明了Hardy空间 $\mathcal{H}^1$ 可嵌入Sobolev空间 $\dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}$. §6将Van Schaftingen的刻画推广至微分复形并给出了主定理1.1的证明.

§2 张量积与群作用

给定黎曼流形 (M, g) . 分别记 $\otimes^r T^*M$, $\odot^s T^*M$, $\wedge^t T^*M$ 为余切丛 T^*M 的 r 阶张量积, s 阶对称张量积, 以及 t 阶反对称张量积, $R, \bar{R}$ 分别为 $(0, 4)$ 型曲率张量与 $(2, 2)$ 型曲率张量. 以下给出Calabi复形(1)中的空间 E_k 以及算子 $\mathcal{D}_k$ 的详细定义. 首先定义Bianchi和映射(可参见[22]) $\mathfrak{G} : \wedge^{k+1} T^*M \otimes \wedge^2 T^*M \rightarrow \wedge^{k+2} T^*M \otimes T^*M$, 其满足

$$\mathfrak{G}(v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1} \otimes u_1 \wedge u_2) = u_2 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1} \otimes u_1 - u_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1} \otimes u_2, \quad (5)$$

并且线性延拓至整个 $\wedge^{k+1} T^*M \otimes \wedge^2 T^*M$. 定义

$$E_k = \text{Ker } \mathfrak{G} \cap \wedge^{k+1} T^*M \otimes \wedge^2 T^*M, \quad (6)$$

由于 $\mathfrak{G}$ 是常秩映射, 故 E_k 为 $\wedge^{k+1} T^*M \otimes \wedge^2 T^*M$ 的子丛^[23, 定理10.34]. 对向量丛 E , 记 $\Gamma(E) = C^\infty(M, E)$, 即 E 的光滑截面全体. 特别地, 由定义(5)以及(6), 黎曼曲率张量 R 满足第一Bianchi恒

等式等价于 $R \in \Gamma(E_1)$ [24, 命题7.12].

算子 $\mathcal{D}_0 : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(\odot^2 T^*M)$ 定义为

$$\mathcal{D}_0(\xi) = L_\xi g. \quad (7)$$

这里 L_ξ 为沿向量场 ξ 方向的Lie导数.

算子 $\mathcal{D}_1 : \Gamma(\odot^2 T^*M) \rightarrow \Gamma(E_1)$ 定义为 $\mathcal{D}_1(h) = \mathcal{R}'_g(h) - h_g^b \circ \bar{\mathcal{R}}$, 这里 $\mathcal{R}'_g$ 为线性化曲率算子, 即对 $h \in \Gamma(\odot^2 T^*M)$, $\mathcal{R}'_g(h) := \frac{d}{dt} R(g + th)|_{t=0}$. h_g^b 为线性化下降指标算子 (见[6, p.243]).

算子 $\mathcal{D}_k : \Gamma(E_{k-1}) \rightarrow \Gamma(E_k)$ ($k = 2, \dots, n-1$) 为向量丛 $\wedge^2 T^*M$ 上的Levi-Civita联络诱导的外协变微分 [25, p.200].

以下只考虑空间 $(\mathbf{R}^n, g)$, 其中 g 为 $\mathbf{R}^n$ 上的标准度量. 将 $T^*\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 等同, 则 $\otimes^r T^*\mathbf{R}^n = \otimes^r \mathbf{R}^n$ 可视作数组 $(f_{i_1 i_2 \dots i_r})$, 其中 $f_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbf{R}$, $i_1, i_2, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, n\}$. 对称张量积 $\odot^s \mathbf{R}^n$ 与反对称张量积 $\wedge^t \mathbf{R}^n$ 可类似表示, 前者分量关于各指标对称, 后者分量关于各指标反对称. 设 $f = (f_{i_1 \dots i_{k+1}; j_1 j_2}) \in \wedge^{k+1} \mathbf{R}^n \otimes \wedge^2 \mathbf{R}^n$, 则由定义(5)及(6), $f \in E_k$ 当且仅当

$$f_{[i_1 \dots i_{k+1}; j_1] j_2} = 0. \quad (8)$$

这里

$$f_{[i_1 \dots i_{k+1}; i_{k+2}] j} := \frac{1}{(k+2)!} \sum_{\sigma \in S_{k+2}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} f_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k+1)}; i_{\sigma(k+2)} j}, \quad (9)$$

其中 S_{k+2} 为 $k+2$ 阶置换群. 特别地, 易得若 $f \in E_1$, 则 $f_{ij;kl} = f_{kl;ij}$. 用分量形式重新给出 $\mathcal{D}_k$ (精确到乘上一个非零常数) 的表达式.

算子 $\mathcal{D}_0 : C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, \odot^2 \mathbf{R}^n)$ 为

$$(\mathcal{D}_0 f)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i f_j + \partial_j f_i). \quad (10)$$

算子 $\mathcal{D}_1 : C^\infty(\mathbf{R}^n, \odot^2 \mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, E_1)$ 为

$$(\mathcal{D}_1 f)_{ij;kl} = \frac{1}{2} (\partial_{ik} f_{jl} + \partial_{jl} f_{ik} - \partial_{jk} f_{il} - \partial_{il} f_{jk}). \quad (11)$$

算子 $\mathcal{D}_k : C^\infty(\mathbf{R}^n, E_{k-1}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, E_k)$ ($k = 2, \dots, n-1$) 为

$$(\mathcal{D}_k f)_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \partial_{[i_1} f_{i_2 \dots i_{k+1]; j_1 j_2}. \quad (12)$$

记

$$F_0 = \mathbf{R}^n, F_1 = \odot^2 \mathbf{R}^n, F_k = E_{k-1}, k = 2, \dots, n. \quad (13)$$

下面考虑群在张量空间上的作用. 设 G 为群, V 为线性空间. 群 G 在 V 上的作用定义为映射

$$G \times V \rightarrow V$$

$$(g, v) \rightarrow g \cdot v.$$

其满足: 对任意 $g_1, g_2 \in G, v \in V$, 成立

(i) $(g_1 g_2) \cdot v = g_1 \cdot (g_2 \cdot v)$; (ii) $\text{id} \cdot v = v$, 这里 id 为群 G 的单位元.

设 $G = GL(n)$ 为全体 n 阶可逆方阵组成的群. G 在 $\mathbf{R}^n$ 的作用定义为矩阵乘法

$$g \cdot v = gv.$$

此作用可以诱导张量积空间 $\otimes^r \mathbf{R}^n \otimes \otimes^s \mathbf{R}^n$ 上的自然作用

$$(g \cdot F)_{i_1 i_2 \dots i_r; j_1 j_2 \dots j_s} := \sum_{i'_1, \dots, i'_r, j'_1, \dots, j'_s=1}^n g_{i_1 i'_1} \dots g_{i_r i'_r} g_{j_1 j'_1} \dots g_{j_s j'_s} F_{i'_1 \dots i'_r; j'_1 \dots j'_s}. \quad (14)$$

空间 $\odot^r \mathbf{R}^n, \wedge^r \mathbf{R}^n$ 自然继承上述作用. 由作用(14)与(8), 易得 $g \cdot E_k \subset E_k$ 对任意 $g \in GL(n)$ 成立. 因此 E_k 可视作 $GL(n)$ -模, 事实上, E_k 是不可约 $GL(n)$ -模 [26, 定理6.3(4)].

§3 形式伴随算子

设 $\mathcal{D} : C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n_1}) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n_2})$ 是一个 m 阶常系数微分算子. $\mathcal{D}^*$ 称为 $\mathcal{D}$ 的形式伴随算子如果对任意的 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n_1}), v \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n_2})$, 均有

$$\int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathcal{D}u, v \rangle dx = \int_{\mathbf{R}^n} \langle u, \mathcal{D}^*v \rangle dx,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbf{R}^{n_j}$ ($j = 1, 2$) 上的欧式内积. $L^2(\mathbf{R}^n, \wedge^s \mathbf{R}^n \otimes \odot^t \mathbf{R}^n)$ 上的内积定义为

$$(u, v) = \sum_{A_1, \dots, A_s, A'_1, \dots, A'_t=1}^n \int_{\mathbf{R}^n} u_{A_1 \dots A_s A'_1 \dots A'_t} v_{A_1 \dots A_s A'_1 \dots A'_t}(x) dx.$$

$L^2(\mathbf{R}^n, F_k)$ 上的内积为上述内积的自然限制. 下面的引理用在形式伴随算子的计算中(参考[27, 引理2.1]).

引理3.1 对任意 $f, F \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \otimes^t \mathbf{R}^n)$, 有

$$\sum_{A_1, \dots, A_t=1}^n f_{[A_1 \dots A_t]} F_{[A_1 \dots A_t]} = \sum_{A_1, \dots, A_t=1}^n f_{[A_1 \dots A_t]} F_{A_1 \dots A_t}.$$

以下给出Calabi复形中算子的形式伴随算子(一般常曲率Riemann流形上的的计算可参考[5]).

命题3.1

- 1) $\mathcal{D}_0$ 的形式伴随算子 $\mathcal{D}_0^* : C^\infty(\mathbf{R}^n, \odot^2 \mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 为 $(\mathcal{D}_0^* f)_i = - \sum_{j=1}^n \partial_j f_{ij}$.
- 2) $\mathcal{D}_1$ 的形式伴随算子 $\mathcal{D}_1^* : C^\infty(\mathbf{R}^n, E_1) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, \odot^2 \mathbf{R}^n)$ 为 $(\mathcal{D}_1^* f)_{ij} = 2 \sum_{s,t=1}^n \partial_s \partial_t f_{si;tj}$.
- 3) $\mathcal{D}_k$ ($k = 2, \dots, n-1$) 的形式伴随算子 $\mathcal{D}_k^* : C^\infty(\mathbf{R}^n, E_k) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, E_{k-1})$ 为

$$(\mathcal{D}_k^* f)_{i_1 i_2 \dots i_k; j_1 j_2} = - \sum_{s=1}^n \partial_s f_{s i_1 i_2 \dots i_k; j_1 j_2} - \frac{1}{k} (\partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; j_2 s} - \partial_s f_{j_2 i_1 i_2 \dots i_k; j_1 s}).$$

证 1)和2)直接分部积分可得到, 以下证明3). 先验证 $\mathcal{D}_k^* f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, E_{k-1})$, 直接计算得

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_k^* f)_{[i_1 i_2 \dots i_k; j_1] j_2} &= - \sum_{s=1}^n \left(\partial_s f_{s [i_1 i_2 \dots i_k; j_1] j_2} - \frac{1}{k} \partial_s f_{[j_1 i_1 i_2 \dots i_k]; j_2 s} + \frac{1}{k} \partial_s f_{j_2 [i_1 i_2 \dots i_k; j_1] s} \right) = \\ &= - \sum_{s=1}^n \frac{1}{k+1} ((k+2) \partial_s f_{[i_1 i_2 \dots i_k; j_1] j_2} - \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; s j_2}) - \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; j_2 s} + \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \sum_{s=1}^n ((k+2) f_{[j_2 i_2 i_2 \dots i_k; j_1] s} - \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; j_2 s}) = \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\frac{1}{k+1} \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; s j_2} - \frac{1}{k} \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; s j_2} - \frac{1}{k(k+1)} \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; j_2 s} \right) = 0, \end{aligned}$$

这里第三个等号来自于(8). 对任意 $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n, E_{k-1})$, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (g_{i_1 \dots i_k; j_1 j_2}, \partial_s f_{j_1 i_1 i_2 \dots i_k; j_2 s} - \partial_s f_{j_2 i_1 i_2 \dots i_k; j_1 s}) = \\ &\sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (g_{i_1 \dots i_k; j_1 j_2}, \partial_s f_{[j_1 i_2 i_2 \dots i_k]; j_2 s} - \partial_s f_{[j_2 i_1 i_2 \dots i_k]; j_1 s}) = \\ &\sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (g_{[i_1 \dots i_k; j_1] j_2}, \partial_s f_{[j_1 i_2 i_2 \dots i_k]; j_2 s}) + (g_{[i_1 \dots i_k; j_2] j_1}, \partial_s f_{[j_2 i_1 i_2 \dots i_k]; j_1 s}) = 0, \end{aligned}$$

这里第二个等号来自于引理3.1. 于是对任意 $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n, E_{k-1})$ 以及 $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, E_k)$, 有

$$\begin{aligned} (g, \mathcal{D}_k^* f) &= \sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (g_{i_1 \dots i_k; j_1 j_2}, -\partial_s f_{s i_1 \dots i_k; j_1 j_2}) = \\ &= \sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (\partial_s g_{i_1 \dots i_k; j_1 j_2}, f_{s i_1 \dots i_k; j_1 j_2}) = \sum_{s, i_1, \dots, i_k, j_1, j_2=1}^n (\partial_{[s} g_{i_1 \dots i_k]; j_1 j_2}, f_{s i_1 \dots i_k; j_1 j_2}) = \\ &= (\mathcal{D}_k g, f), \end{aligned}$$

由形式伴随算子的唯一性即得结论.

§4 Calabi复形的椭圆性

设 V, W 为有限维实向量空间. 假设 $A(D)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的从 V 到 W 的 l 阶齐次常系数线性微分算子, 即

$$A(D)u = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha|=l}} A_\alpha (\partial^\alpha u),$$

其中 A_α 为从 V 到 W 的线性映射. 算子 $A(D)$ 的象征 $\sigma_A(\xi) : V \rightarrow W$ (精确到乘上一个非零常数) 定义为

$$\sigma_A(\xi)u = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^n \\ |\alpha|=l}} \xi^\alpha A_\alpha u,$$

其中 $\xi \in \mathbf{R}^n$, 从而 $\sigma_A(\xi)$ 为从 V 到 W 的线性映射. 若对于任意 $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\sigma_A(\xi)$ 都是单射, 则称 $A(D)$ 为椭圆算子.

一般地, 考虑齐次微分算子序列

$$\Gamma(F_0) \xrightarrow{\mathcal{D}_0} \Gamma(F_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \Gamma(F_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_{n-1}} \Gamma(F_n),$$

如果 $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_{j-1} = 0$ 对 $j = 1, \dots, n-1$, 则称上述序列为微分复形, 记作 $(\Gamma(F_j), \mathcal{D}_j)$. 对于微分复形 $(\Gamma(F_j), \mathcal{D}_j)$, 称其是正合的, 如果 $\text{Ker } \mathcal{D}_j = \text{Im } \mathcal{D}_{j-1}$, $j = 1, \dots, n-1$. 研究一个微分复形在什么条件下为正合的是微分复形领域的基本问题, 一个常见的条件是微分复形的椭圆性. 称微分复形 $(\Gamma(F_j), \mathcal{D}_j)$ 为椭圆复形, 如果对任意 $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, 其对应的象征序列 $(F_j, \sigma_{\mathcal{D}_j}(\xi))$ 都是正合列. 椭圆复形的名称最初是Atiyah, Singer与Bott等人在研究椭圆算子的指标时引入的^[28-30], 微分复形的椭圆性是Hodge理论的起点^[31]. 在本小节中, 证明Calabi复形是椭圆复形, 为此先证明Calabi复形中算子象征的等变性.

引理4.1 设 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 对任意 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 以及任意 $g \in GL(n)$ 有

$$g \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi)v) = \sigma_{\mathcal{D}_k}(g\xi)(g \cdot v)$$

对任意 $v \in F_k$ 成立.

证 分三种情形证明.

情形1 $k = 0$. 由群作用(14)及定义(10)知

$$\begin{aligned} (g \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_0}(\xi)v))_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i', j'=1}^n g_{ii'} g_{jj'} (\xi_{i'} v_{j'} + \xi_{j'} v_{i'}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i', j'=1}^n (g_{ii'} \xi_{i'} g_{jj'} v_{j'} + g_{jj'} \xi_{j'} g_{ii'} v_{i'}) = (\sigma_{\mathcal{D}_k}(g\xi)(g \cdot v))_{ij}. \end{aligned}$$

情形2 $k = 1$. 由群作用(14)及定义(11)知

$$\begin{aligned} & (g \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)v))_{ij;kl} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i',j',k',l'=1}^n g_{ii'} g_{jj'} g_{kk'} g_{ll'} (\xi_{i'} \xi_{k'} v_{j'l'} + \xi_{j'} \xi_{l'} v_{i'k'} - \xi_{j'} \xi_{k'} v_{j'l'} - \xi_{i'} \xi_{l'} v_{j'k'}) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i',j',k',l'=1}^n (g_{ii'} \xi_{i'} g_{kk'} \xi_{k'} g_{jj'} g_{ll'} v_{j'l'} + g_{jj'} \xi_{j'} g_{ll'} \xi_{l'} g_{ii'} g_{kk'} v_{i'k'}) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i',j',k',l'=1}^n (g_{jj'} \xi_{j'} g_{kk'} \xi_{k'} g_{ii'} g_{ll'} v_{i'l'} - g_{ii'} \xi_{i'} g_{ll'} \xi_{l'} g_{jj'} g_{kk'} v_{j'k'}) = (\sigma_{\mathcal{D}_1}(g\xi)(g \cdot v))_{ij;kl}. \end{aligned}$$

情形3 $k = 2, 3, \dots, n-1$. 由群作用(14)及定义(12), (9)知

$$\begin{aligned} & (g \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi)v))_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \\ & \sum_{i'_1, \dots, j'_2=1}^n g_{i_1 i'_1} g_{i_2 i'_2} \dots g_{i_{k+1} i'_{k+1}} g_{j_1 j'_1} g_{j_2 j'_2} \xi_{[i'_1 v_{i'_2} \dots i'_{k+1}]; j'_1 j'_2} = \\ & \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i'_1, \dots, j'_2=1}^n \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} g_{i_1 i'_1} g_{i_2 i'_2} \dots g_{i_{k+1} i'_{k+1}} g_{j_1 j'_1} g_{j_2 j'_2} \xi_{i'_{\sigma(1)}} v_{i'_{\sigma(2)}} \dots i'_{\sigma(k+1)}; j'_1 j'_2 = \\ & \frac{1}{(k+1)!} \times \\ & \sum_{i'_1, \dots, j'_2=1}^n \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} g_{i_{\sigma(1)} i'_{\sigma(1)}} \xi_{i'_{\sigma(1)}} g_{i_{\sigma(2)} i'_{\sigma(2)}} \dots g_{i_{\sigma(k+1)} i'_{\sigma(k+1)}} g_{j_1 j'_1} g_{j_2 j'_2} v_{i'_{\sigma(2)}} \dots i'_{\sigma(k+1)}; j'_1 j'_2 = \\ & \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} (g\xi)_{i_{\sigma(1)}} (g \cdot v)_{i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(k+1)}; j_1 j_2} = \\ & (g\xi)_{[i_1 (g \cdot v)_{i_2 \dots i_{k+1}}]; j_1 j_2} = (\sigma_{\mathcal{D}_1}(g\xi)(g \cdot v))_{i_1 \dots i_{k+1}; j_1 j_2}. \end{aligned}$$

命题4.1 对于任意 $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. 象征序列

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}^n \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{D}_0}(\xi)} \odot^2 \mathbf{R}^n \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)} E_1 \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)} E_2 \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{D}_3}(\xi)} \dots \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(\xi)} E_{n-1} \longrightarrow 0$$

是正合的. 即 $\ker \sigma_0(\xi) = \{0\}$, 以及

$$\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi) = \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(\xi), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

且 $\sigma_{n-1}(\xi)$ 是一个满射.

证 由引理4.1, 只需对 $\xi = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 验证即可. 事实上, 假设对 $\xi = e_1$ 证明了结论, 对于一般的 $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, 总存在某个 $A \in GL(n)$ 使得 $Ae_1 = \xi$. 设 $k = 1, \dots, n-1$. 若 $v \in F_k$ 满足 $\sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi)v = 0$, 则

$$0 = \sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi)v = \sigma_{\mathcal{D}_k}(Ae_1)(AA^{-1} \cdot v) = A \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_k}(e_1)(A^{-1} \cdot v)).$$

于是有 $\sigma_{\mathcal{D}_k}(e_1)(A^{-1} \cdot v) = 0$, 从而存在 $u \in F_{k-1}$ 使得 $\sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(e_1)u = A^{-1} \cdot v$, 进一步有

$$\sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(\xi)(A \cdot u) = A \cdot (\sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(e_1)u) = v.$$

同理可证明 $\sigma_{\mathcal{D}_0}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(\xi)$ 为单射与满射分别等价于 $\sigma_{\mathcal{D}_0}(e_1), \sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(e_1)$ 为单射与满射. 下面对 $\xi = e_1$ 证明结论, 分几种情形讨论.

情形1 $k = 0$. 设 $u \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_0}(e_1)$, 则 $0 = (\sigma_{\mathcal{D}_0}(e_1)u)_{1j} = \frac{1}{2}(u_j + \delta_{1j}u_1)$, 由此显然有 $u_j = 0, j = 1, \dots, n$.

情形2 $k = 1$. 设 $v \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1}(e_1)$. 取 $u \in \mathbf{R}^n$ 使得

$$u_i = \begin{cases} v_{11}, & i = 1, \\ 2v_{1i}, & i \geq 2. \end{cases}$$

则有 $\sigma_{\mathcal{D}_0}(e_1)u = v$.

情形3 $k = 2$. 设 $v \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(e_1)$, 则

$$0 = \delta_{1[i_1 v_{i_2 i_3}]; j_1 j_2}.$$

若 $i, j \geq 2$, 则由上式知 $v_{ij;kl} = 0$, 由于 $v_{kl;ij} = v_{ij;kl}$, 故只有形如 v_{1jl} ($j, l \geq 2$) 的分量才可能非0.

令 $u_{jl} = 2v_{1j;1l}$, 由于 $v_{1i;1j} = v_{1j;1i}$, 于是有 $u = (u_{jl}) \in \odot^2 \mathbf{R}^n$. 注意到

$$(\sigma_{\mathcal{D}_1}(e_1)u)_{ij;kl} = \frac{1}{2} (\delta_{1i} \delta_{1k} u_{jl} + \delta_{1j} \delta_{1l} u_{ik} - \delta_{1j} \delta_{1k} u_{il} - \delta_{1i} \delta_{1l} u_{jk}),$$

故显然有 $\sigma_{\mathcal{D}_1}(e_1)u = v$.

情形4 $k = 3, \dots, n-1$. 设 $v \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_k}(e_1)$, 则

$$0 = (\sigma_{\mathcal{D}_k}(e_1)v)_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \delta_{1[i_1 v_{i_2 i_3 \dots i_{k+1}}]; j_1 j_2}.$$

若 $i_2, i_3, \dots, i_{k+1} \geq 2$, 则由上式知 $v_{i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = 0$. 令 $u \in \wedge^{k-1} \mathbf{R}^n \otimes \wedge^2 \mathbf{R}^n$ 满足

$$u_{i_3 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = v_{1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1 j_2},$$

则由

$$(\sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(e_1)u)_{1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \delta_{1[1 u_{i_3 \dots i_{k+1}}]; j_1 j_2} = v_{1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1 j_2},$$

可得 $\sigma_{\mathcal{D}_{k-1}}(e_1)u = v$, 故只需验证 $u \in E_{k-2}$. 注意到

$$u_{[i_3 \dots i_{k+1}; j_1] j_2} = v_{1[i_3 \dots i_{k+1}; j_1] j_2}.$$

若 $j_1 = 1$, 则显然有 $v_{[1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1] j_2} = 0$. 设 $j_1 \geq 2$, 不妨假设 $i_3, \dots, i_{k+1} \geq 2$, 则有

$$\begin{aligned} v_{1[i_3 \dots i_{k+1}; j_1] j_2} &= \frac{1}{k} (v_{1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} - v_{1 j_1 i_4 \dots i_{k+1}; i_3 j_2} - \dots - v_{1 i_3 \dots j_1; i_{k+1} j_2}) = \\ &= \frac{1}{k} ((k+1) v_{[1 i_3 \dots i_{k+1}; j_1] j_2} + v_{j_1 i_3 \dots i_{k+1}; 1 j_2}) = 0. \end{aligned}$$

其中最后一个等号来自于 $v \in E_{k-1}$.

情形5 $k = n$. 设 $v \in E_{n-1} = \wedge^n \mathbf{R}^n \otimes \wedge^2 \mathbf{R}^n$. 类似情形4取 $u \in \wedge^{n-1} \mathbf{R}^n \otimes \wedge^2 \mathbf{R}^n$, 满足

$$u_{i_2 \dots i_n; j_1 j_2} = v_{1 i_2 \dots i_n; j_1 j_2}, \quad (15)$$

则 $u \in E_{n-2}$. 而 $(\sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(e_1)u)_{12 \dots n; j_1 j_2} = u_{23 \dots n; j_1 j_2} = v_{12 \dots n; j_1 j_2}$, 故 $\sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(e_1)$ 为满射.

§5 齐次Sobolev空间与Hardy空间

给定 $l \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$. 齐次Sobolev空间 $\dot{W}^{l,p}(\mathbf{R}^n)$ 定义为 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在齐次Sobolev范数

$$\|u\|_{\dot{W}^{l,p}} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |D^l u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

下的完备化. 给定 $\phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 满足 $\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx = 1$, 且对 $t > 0$, 设 $\phi_t(x) = t^{-n} \phi(x/t)$. Hardy空间 $\mathcal{H}^p(\mathbf{R}^n)$ 定义为 $\mathcal{H}^p = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) : \sup_{t>0} |f * \phi_t| \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$. 这里 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的缓增分布空间. 众所周知, 对 $p > 1$ 有 $\mathcal{H}^p(\mathbf{R}^n) = L^p(\mathbf{R}^n)$, 但 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n) \subsetneq L^1(\mathbf{R}^n)$ (参考[32, p.91]). 设 $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n)$, 定义

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_B \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_B |f - \bar{f}_B| dx,$$

这里 $\bar{f}_B := \text{Vol}(B)^{-1} \int_B f dx$, 而 $\sup_B$ 是对 $\mathbf{R}^n$ 中所有开球 B 取上确界. 满足 $\|f\|_{\text{BMO}} < \infty$ 的函数 f 叫做有界平均振动函数. $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 为满足 $\|f\|_{\text{BMO}} < \infty$ 的局部可积函数(赋予通常的线性结

构)组成的线性空间. 注意 $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ 在 $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 中只是半范, $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)/\mathbf{R}$ 赋予 $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ 构成赋范线性空间. 下面是Stein和Fefferman的经典结果(见[33, 定理2]或[34, 定理3.2.2]).

引理5.1 $(\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n))^* = \text{BMO}(\mathbf{R}^n)/\mathbf{R}$.

需要如下经典的Poincaré不等式(见[35, p.291]). 记 $\bar{u}_r = \text{Vol}(B(x, r))^{-1} \int_{B(x, r)} u dy$.

引理5.2 设 $1 \leq p \leq \infty$. 则存在正常数 $C = C(n, p)$, 使得

$$\|u - \bar{u}_r\|_{L^p(B(x, r))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B(x, r))}$$

对任意 $\mathbf{R}^n$ 中的开球 $B(x, r)$ 以及任意 $u \in W^{1,p}(B(x, r))$ 成立.

记 $\dot{W}^{-l,p}(\mathbf{R}^n)$ 为 l 次导数在 L^p 里的分布构成的空间, 则 $\dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}(\mathbf{R}^n)$ 为 $\dot{W}^{1,n}(\mathbf{R}^n)$ 的对偶空间. 下面的引理在主定理Hardy空间部分的证明中需要用到, 由于在现有文献中难以找到其证明, 在这里给出详细证明, 其中部分证明来自[36, 例1].

引理5.3 设 m 为正整数, 则 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \hookrightarrow \dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

证 只需验证标量函数的情形. 先证明 $\dot{W}^{1,n} \hookrightarrow \text{BMO}$. 由引理5.2, 有

$$\int_{B(x, r)} |f - \bar{f}_r| dy \leq Cr \int_{B(x, r)} |Df| dy.$$

由Hölder不等式得 $\int_{B(x, r)} |f - \bar{f}_r| dy \leq Cr^n \left(\int_{B(x, r)} |Df|^n dy \right)^{\frac{1}{n}}$, 从而有

$$\text{Vol}(B(x, r))^{-1} \int_{B(x, r)} |f - \bar{f}_r| dy \leq C \left(\int_{B(x, r)} |Df|^n dy \right)^{\frac{1}{n}},$$

进一步有 $\|f\|_{\text{BMO}} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{1,n}}$. 设 $f \in \mathcal{H}^1, g \in \dot{W}^{1,n}$, 则 $g \in \text{BMO}$, 于是由引理5.1有

$$|(f, g)| \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^1} \|g\|_{\text{BMO}} \leq C' \|f\|_{\mathcal{H}^1} \|g\|_{\dot{W}^{1,n}}.$$

故 f 可视作 $\dot{W}^{1,n}$ 上的连续线性泛函, 且 $\|f\|_{\dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}} \leq C' \|f\|_{\mathcal{H}^1}$.

§6 齐次Sobolev空间与Hardy空间

以下所考虑微分算子都假设是常系数齐次线性的. 2013年, Van Schaftingen^[11, 定理1.3]给出了如下刻画.

命题6.1 设 $A(D)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的从 V 到 W 的 l 阶齐次微分算子. 估计

$$\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \|A(D)u\|_{L^1}$$

成立当且仅当 $A(D)$ 为椭圆的且满足canceling性质.

下面对以上命题涉及到的canceling性质作出解释. 设 $A(D)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的从 V 到 W 的 l 阶齐次微分算子, 如果微分算子 $A(D)$ 满足 $\bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im } \sigma_{A(D)}(\xi) = \{0\}$, 则称 $A(D)$ 满足canceling性质. 对于非canceling的算子, 则有如下结果[11, 命题7.6].

命题6.2 设 $n \geq 2$ 且 $A(D)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的从 V 到 W 的椭圆微分算子. 设 $\mathcal{P}$ 为 E 到

$$\bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im } \sigma_{A(D)}(\xi)$$

的投影. 对任意 $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n, V)$, 有

$$\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \left(\|\mathcal{P} \circ A(D)u\|_{\dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}} + \|(\text{Id} - \mathcal{P}) \circ A(D)u\|_{L^1} \right).$$

以下将命题6.1推广至微分复形.

定理6.1 给定 l 阶算子构成的微分复形

$$C^\infty(\mathbf{R}^n, V_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_1} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_2} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_3).$$

估计 $\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|\mathcal{D}_1^*u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_2u\|_{L^1})$ 成立当且仅当该复形为椭圆复形且算子 $\mathcal{D}_1^*$ 和 $\mathcal{D}_2$ 都是canceling的.

证 设 $\xi \neq 0$. 先证明充分性. 复形的椭圆性等价于 $(\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2) : C^\infty(\mathbf{R}^n, V_2) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n, V_1) \times C^\infty(\mathbf{R}^n, V_3)$ 是椭圆的. 事实上, 假设该复形为椭圆复形. 设 $v \in V_2$ 满足 $\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)v = \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)v = 0$, 则存在 $u \in V_1$ 使得 $\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)u = v$. 于是有

$$0 = (\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)u, u) = (\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)u, \sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)u),$$

从而 $v = 0$. 反之, 设 $(\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2)$ 为椭圆算子. 由复形的定义有

$$\text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi) \subset \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi),$$

于是有正交分解

$$\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi) = \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi) \oplus \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi) \cap \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)^\perp. \quad (16)$$

由 $(\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2)$ 的椭圆性可得到

$$\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi) \cap \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi) = 0. \quad (17)$$

注意到 $\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi) = \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi)^\perp$, 由(17)与(16)即得到该复形的椭圆性. 由命题6.1, 只需证明 $(\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2)$ 为canceling的. 注意到

$$\text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) \subset (\text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)), \quad (18)$$

故由假设 $\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2$ 都是canceling的, 即得结论.

现在证明必要性. 由命题6.1知该复形为椭圆复形且 $(\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2)$ 为canceling的, 故只需证明

$$\text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) = (\text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)), \quad (19)$$

而由(18)知, (19)等价于

$$\dim \text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) = \dim \text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)) + \dim \text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)). \quad (20)$$

由同态基本定理知道(20)右端等于

$$2 \dim V_2 - \dim \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)) - \dim \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)). \quad (21)$$

左端等于

$$\dim V_2 - \dim \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)). \quad (22)$$

由于复形为椭圆复形, 故 $\text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)) = \text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_1}(\xi))^\perp = \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi))^\perp$.

于是有

$$\text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) = \{0\} \quad \text{且} \quad \dim \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)) + \dim \text{Ker}(\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) = \dim V_2. \quad (23)$$

由(21)-(23)即可得到(20).

对于具体的例子的验证, 下面的对偶概念似乎更为有效. 给定 $\mathbf{R}^n$ 上的齐次微分算子 $A(D)$, 称其为cocanceling的, 如果成立 $\bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Ker } \sigma_{A(D)}(\xi) = \{0\}$.

推论6.1 给定 l 阶算子构成的椭圆微分复形

$$C^\infty(\mathbf{R}^n, V_0) \xrightarrow{\mathcal{D}_0} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_1) \xrightarrow{\mathcal{D}_1} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_2) \xrightarrow{\mathcal{D}_2} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_3) \xrightarrow{\mathcal{D}_3} C^\infty(\mathbf{R}^n, V_4).$$

估计 $\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C(\|\mathcal{D}_1^*u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_2u\|_{L^1})$ 成立当且仅当 $\mathcal{D}_0^*$ 与 $\mathcal{D}_3$ 都是cocanceling的.

证 由复形的椭圆性, 有 $\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi) = \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)$, $\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_0^*}(\xi) = \text{Im } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(\xi)$. 从而 $\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2$ 为canceling的当且仅当 $\mathcal{D}_0^*, \mathcal{D}_3$ 分别为cocanceling的. 由定理6.1即得结论.

现在可以叙述本文的主要结果.

命题6.1 Calabi复形中的微分算子 $\mathcal{D}_k$ 以及其形式伴随算子 $\mathcal{D}_k^*$ 都是cocanceling的.

证 由于Calabi复形中的算子具有不同形式, 将证明分为6种情形.

情形1 $k = 0$. 由Calabi复形的椭圆性知 $\mathcal{D}_0$ 为椭圆算子, 故更满足cocanceling性质.

情形2 $k = 1$. 对任意 j, l , 至少存在一个 $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $j, l \neq m$, 若 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1}(e_m)$, 则 $0 = (\sigma_{\mathcal{D}_1}(e_m)f)_{mj;ml} = \frac{1}{2}f_{jl}$. 从而 $\mathcal{D}_1$ 为cocanceling的.

情形3 $k = 2, \dots, n-1$.

注意到 $k \leq n-1, \forall i_2, \dots, i_{k+1}, j_1, j_2$, 至少存在一个 $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $i_2, \dots, i_{k+1} \neq m$. 则由 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_k}(e_m)$, 得 $0 = (\sigma_{\mathcal{D}_k}(e_m)f)_{mi_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = f_{i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2}$. 故 $\mathcal{D}_k$ 为cocanceling算子.

下面考虑对偶算子的情形.

情形4 $k = 0$. 由命题3.1, 知 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_0^*}(e_m)$ 等价于 $0 = (\mathcal{D}_0^*f)_j = -f_{mj}$. 由 m, j 的任意性即得结论.

情形5 $k = 1$. 设 $f \in E_k$ 且满足 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(e_m)$, 则

$$0 = (\sigma_{\mathcal{D}_2^*}(e_m)f)_{ij} = f_{mi;mj}. \quad (24)$$

再取 $\xi_{pq} = e_p + e_q$, 若 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_k}(\xi_{pq})$, 则

$$0 = (\sigma_{\mathcal{D}_2^*}(\xi_{pq})f)_{ij} = f_{pi;pj} + f_{qi;qj} + f_{pi;qj} + f_{qi;pj}. \quad (25)$$

由(24), (25)得

$$f_{pi;qj} = -f_{qi;pj}. \quad (26)$$

而由 $f \in E_k$, 得

$$f_{pi;qj} + f_{qi;pj} + f_{qp;ij} = 0 \quad (27)$$

将(26)代入(27)得

$$f_{qp;ij} = 2f_{qi;pj} \quad (28)$$

反复利用(28)得 $f_{qp;ij} = 2f_{qi;pj} = 4f_{qp;ij}$, 即 $f_{qp;ij} = 0$, 由指标的任意性得 $f = 0$.

情形6 $k = 2, \dots, n-1$. 对任意 j_1, j_2 以及任意 $i_1, i_2, \dots, i_{k+1}$, 设 $f \in \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_1^*}(e_{i_1})$, 得

$$0 = (\sigma_{\mathcal{D}_k^*}(e_{i_1})f)_{i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = -f_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} + \frac{1}{k} (f_{j_1 i_2 \dots i_{k+1}; i_1 j_2} + f_{j_2 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 i_1}),$$

即

$$f_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \frac{1}{k} (f_{j_1 i_2 \dots i_{k+1}; i_1 j_2} + f_{j_2 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 i_1}). \quad (29)$$

将(29)右端两项分别代入左端, 再次利用(29)得

$$f_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = \frac{2-k}{k^2} f_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2},$$

注意到 $k \geq 2$, 于是有 $f_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}; j_1 j_2} = 0$.

现在可以证明主定理1.1了.

定理1.1的证明 由命题4.1, 推论6.1, 以及定理6.2可直接得到(1)和(2). 注意到

$\text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2^* \mathcal{D}_2}(\xi) = \text{Ker } (\sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)^* \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)) = \text{Ker } \sigma_{\mathcal{D}_2}(\xi)$, 则由定理6.2以及推论6.1有

$$\|Du\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C (\|\mathcal{D}_1^* u\|_{L^1} + \|\mathcal{D}_2^* \mathcal{D}_2 u\|_{L^1}).$$

再由Sobolev嵌入 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-2}}} \leq C \|Du\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}$, 即得到(4). 由(19), 命题4.1以及定理6.2有

$$\bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im}(\sigma_{\mathcal{D}_{n-2}^*}(\xi), \sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(\xi)) = \left(\bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im} \sigma_{\mathcal{D}_{n-2}^*}(\xi), \bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im} \sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(\xi) \right) = \left(0, \bigcap_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \text{Im} \sigma_{\mathcal{D}_{n-1}}(\xi) \right),$$

则由命题6.2知 $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq C \left(\|\mathcal{D}_{n-1}u\|_{\dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}} + \|\mathcal{D}_{n-2}^*u\|_{L^1} \right)$. 再由嵌入 $\mathcal{H}^1 \hookrightarrow \dot{W}^{-1, \frac{n}{n-1}}$ (引理5.3), 可以得到(5). (3)的证明类似于(4), (5).

参考文献:

- [1] Calabi E. On compact, Riemannian manifolds with constant curvature. I[C]. Proc Sympos Pure Math, Vol III, Amer Math Soc, Providence, RI, 1961, 155-180.
- [2] Hu Kaibo. Many facets of cohomology: Differential complexes and structure-aware formulations[EB/OL]. arXiv, <https://arxiv.org/abs/2503.22813>.
- [3] Khavkine I. Compatibility complexes of overdetermined PDEs of finite type, with applications to the Killing equation[J]. Classical Quant Gravity, 2019, 36(18): 185012, 46p.
- [4] Aksteiner S, Andersson L, Bäckdahl T, et al. Compatibility complex for black hole spacetimes[J]. Comm Math Phys, 2021, 384(3): 1585-1614.
- [5] Khavkine I. The Calabi complex and Killing sheaf cohomology[J]. Journal of Geometry and Physics, 2017, 113: 131-169.
- [6] Gasqui J, Goldschmidt H. Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques. I[J]. Adv in Math, 1983, 48(3): 205-285.
- [7] Čap A, Slovák, J. Souček, V. Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences[J]. Ann of Math (2), 2001, 154(1): 97-113.
- [8] Arnold D N, Hu Kaibo. Complexes from complexes[J]. Found Comput Math, 2021, 21(6): 1739-1774.
- [9] Christiansen S H, Gopalakrishnan J, Guzmán J, et al. A discrete elasticity complex on three-dimensional Alfeld splits[J]. Numer Math, 2024, 156(1): 159-204.
- [10] Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm [J]. Arch Rational Mech Anal, 1962, 11: 40-49.
- [11] Van Schaftingen J. Limiting Sobolev inequalities for vector fields and canceling linear differential operators[J]. J Eur Math Soc, 2013, 15(3): 877-921.
- [12] Bourgain J, Brezis H. On the equation $\operatorname{div} Y = f$ and application to control of phases[J]. J Amer Math Soc, 2003, 16(2): 393-426.
- [13] Bourgain J, Brezis H. New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems[J]. C R Math Acad Sci Paris, 2004, 338(7): 539-543.
- [14] Bourgain J, Brezis H. New estimates for elliptic equations and Hodge type systems[J]. J Eur Math Soc, 2007, 9(2): 277-315.
- [15] Lanzani L, Stein E M. A note on div curl inequalities[J]. Math Res Lett, 2005, 12(1): 57-61.
- [16] Van Schaftingen J. Estimates for L^1 -vector fields[J]. C R Math Acad Sci Paris, 2004, 339(3): 181-186.
- [17] Van Schaftingen J. Estimates for L^1 vector fields under higher-order differential conditions[J]. J Eur Math Soc, 2008, 10(4): 867-882.
- [18] Wang Yi, Yung P L. A subelliptic Bourgain-Brezis inequality[J]. J Eur Math Soc, 2014, 16(4): 649-693.
- [19] Yung P L. Sobolev inequalities for $(0, q)$ forms on CR manifolds of finite type[J]. Math Res Lett, 2010, 17(1): 177-196.
- [20] Hounie J, Picon T. Local Gagliardo-Nirenberg estimates for elliptic systems of vector fields[J]. Math Res Lett, 2011, 18(4): 791-804.

- [21] Baldi A, Franchi B, Pansu P. Gagliardo-Nirenberg inequalities for differential forms in Heisenberg groups[J]. Math Ann, 2016, 365(3-4): 1633-1667.
- [22] Kulkarni R S. On the Bianchi Identities[J]. Math Ann, 1972, 199: 175-204.
- [23] Lee J M. Introduction to Smooth Manifolds[M]. New York: Springer 2012.
- [24] Lee J M. Introduction to Riemannian Manifolds, second edition[M]. Cham: Springer, 2018.
- [25] Lee J M. Introduction to Complex Manifolds[M]. Providence: American Mathematical Society, 2024.
- [26] Fulton W, and Harris J. Representation Theory[M]. Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1991.
- [27] Wang Wei. On the weighted L^2 estimate for the k -Cauchy-Fueter operator and the weighted k -Bergman kernel[J]. J Math Anal Appl, 2017, 452(1): 685-707.
- [28] Atiyah M F, Singer I M. The index of elliptic operators. I[J]. Ann of Math (2), 1968, 87: 484-530.
- [29] Atiyah M F, Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications[J]. Ann of Math (2), 1968, 88(3): 451-491.
- [30] Atiyah M F, Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I[J]. Ann of Math (2), 1967, 86: 374-407.
- [31] Wells Jr R O. Differential Analysis on Complex Manifolds[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [32] Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- [33] Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables[J]. Acta Math, 1972, 129(3-4): 137-193.
- [34] Grafakos L. Modern Fourier Analysis, third edition[M]. New York: Springer, 2014.
- [35] Evans L C. Partial Differential Equations, second edition[M]. Providence: American Mathematical Society, 2010.
- [36] Brezis H, Nirenberg L. Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries[J]. Selecta Math (N.S.), 1995, 1(2): 197-263.

Limiting Sobolev inequalities for Calabi complex

LUO Xin

(School of Math. Sci., Zhejiang Univ., Hangzhou 310058, China)

Abstract: The limiting case of the Korn inequality is extended to the Calabi complex whose first operator is the symmetric gradient. In certain cases, the corresponding inequalities require Hardy space $\mathcal{H}^1$ in place of Lebesgue space L^1 . The extension relies on an extension of Van Schaftingen's characterization to differential complexes. In addition, a direct proof of the ellipticity of Calabi complex is obtained.

Keywords: Korn inequality; Calabi complex; limiting Sobolev inequality; elliptic complex

MR Subject Classification: 58J10; 46E35; 35A23; 53C21