

三维连续型随机变量条件概率的计算

丁尚文

(合肥工业大学 数学学院, 安徽合肥 230009)

摘要: 该文给出了弯曲柱体的定义及其参数方程. 文中将空间曲线视为弯曲柱体在母圆半径趋于零时的极限情形, 并结合弯曲柱体上的三重积分换元方法, 建立了三维随机变量落在空间曲线上的条件概率计算方法.

关键词: 随机变量; 条件概率; 概率密度函数; 弯曲柱体

中图分类号: O211.1

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0141-06

§1 引言

条件概率是概率论与数理统计中的重要概念. 对于多维随机变量的条件概率计算问题, 已有诸多学者进行了深入研究. 文献[1]建立了二维连续型随机变量条件概率的基本计算框架: 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y)$. 若边缘概率密度函数 $f_Y(y_0) > 0$ 时, 则随机变量 X 在 $Y = y_0$ 条件下的概率密度函数定义为 $f_{X|Y}(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$, 相应的条件概率表示为 $P\{a \leq X \leq b | Y = y_0\} = \int_a^b f_{X|Y}(x | y_0) dx$, 其中常数 $a < b$. 进一步地, 文献[2]针对马氏环境下的复合二项模型, 提出了条件概率的具体计算方法. 此外, 文献[3-4]研究了二维随机变量 (X, Y) 落在光滑平面曲线 L 上的条件概率问题, 分别给出了条件概率 $P\{c \leq Y \leq d | (X, Y) \in L\}$ 和 $P\{a \leq X \leq b | (X, Y) \in L\}$ 的计算公式. 然而, 上述研究均局限于二维随机变量的情形. 在上述研究的基础上, 本文将问题拓展至三维空间, 研究三维连续型随机变量 (X, Y, Z) 落在空间曲线 Γ 上的条件概率计算问题. 由于 $P\{(X, Y, Z) \in \Gamma\} = 0$, 条件概率计算公式在此不可直接使用, 因此需要借助邻域极限来刻画沿空间曲线的条件概率. 此外, 空间曲线与平面曲线的几何性质存在本质差异: 空间曲线可视为三维空间中弯曲柱体的极限情形, 这使得二维随机变量的条件概率计算方法(如文献[2-4]所述)难以直接推广至三维空间. 针对上述问题, 从弯曲柱体的极限表达形式出发, 通过构造弯曲柱体的参数方程, 并利用极限过程重新定义空间曲线上的条件概率, 从而解决三维随机变量的条件概率计算问题.

§2 弯曲柱体和空间曲线

定义1 曲面 Σ 由圆心在曲线上半径为 ε 的动圆 l 沿着空间光滑曲线 Γ 从一端移动到另外一端所生成. 移动过程中圆面始终与曲线 Γ 上的切线垂直. 为了叙述简便, 将空间曲面 Σ 称为弯曲柱面 Σ , 对应的有界闭空间区域 Ω 称为弯曲柱体 Ω . 曲线 Γ 称为弯曲柱面 Σ 的准线, 动圆 l 称为弯曲柱面 Σ 的母圆(见图1).

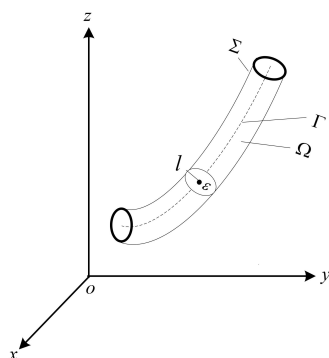


图1 弯曲柱体

定义2 当母圆半径 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, 相应弯曲柱体 Ω 收缩到其准线 Γ , 因此空间曲线 Γ 可视为弯曲柱体 Ω 的极限表达.

§3 主要结论

定理3.1 设曲线 Γ 为弯曲柱面 Σ 的准线, 其参数方程 $\mathbf{r}(t) : x = \phi(t), y = \varphi(t), z = \gamma(t), t_1 \leq t \leq t_2$, 且 Γ 为一条 C^2 正则曲线. 动圆 l (半径 ε)为弯曲柱面 Σ 的母圆(见图1). 则弯曲柱体 Ω 的参数方程为 $\tilde{x} = \phi(t) + e\rho \cos \theta - abeg\rho \sin \theta, \tilde{y} = \varphi(t) + \frac{a}{e}\rho \sin \theta, \tilde{z} = \gamma(t) + ae\rho \cos \theta - a^2beg\rho \sin \theta + \frac{bg}{e}\rho \sin \theta, t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq \rho \leq \varepsilon, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 且其Jacobian行列式 $J(t, \rho, \theta) = \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(t, \rho, \theta)}$ 为

$$J(t, \rho, \theta) = (a'U + b'V)g\rho + \operatorname{sgn}(\gamma')\|\mathbf{r}'(t)\|\rho,$$

其中 $a = -\frac{\phi'(t)}{\gamma'(t)}, b = -\frac{\varphi'(t)}{\gamma'(t)}, e = (1 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, g = (1 + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$.

证 设动圆圆心 M_0 坐标为 $(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t))$. 设弯曲柱面 Σ 上动点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} (x - \phi(t))^2 + (y - \varphi(t))^2 + (z - \gamma(t))^2 = \varepsilon^2, \\ \phi'(t)(x - \phi(t)) + \varphi'(t)(y - \varphi(t)) + \gamma'(t)(z - \gamma(t)) = 0. \end{cases}$$

由于 $\phi'(t), \varphi'(t), \gamma'(t)$ 至少有一个不为零, 假设 $\gamma'(t) \neq 0$, 将上式化简为

$$\begin{cases} (x - \phi(t))^2 + (y - \varphi(t))^2 + (z - \gamma(t))^2 = \varepsilon^2, \\ z - \gamma(t) = -\frac{\phi'(t)}{\gamma'(t)}(x - \phi(t)) - \frac{\varphi'(t)}{\gamma'(t)}(y - \varphi(t)). \end{cases}$$

令 $x - \phi(t) = U, y - \varphi(t) = V, z - \gamma(t) = W, a = -\frac{\phi'(t)}{\gamma'(t)}, b = -\frac{\varphi'(t)}{\gamma'(t)}$, 则弯曲柱面 Σ 满足的约束方

程为

$$\begin{cases} U^2 + V^2 + W^2 = \varepsilon^2, \\ W = aU + bV. \end{cases}$$

令 $(1+a^2)^{-\frac{1}{2}} = e$, $(1+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = g$, 进一步化简得到弯曲柱面 Σ 的参数方程为 $V = \frac{a}{e}\varepsilon \sin \theta$, $U = e\varepsilon \cos \theta - abeg\varepsilon \sin \theta$, $W = aU + bV$, 其中 $t_1 \leq t \leq t_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

设弯曲柱体 Ω 上的任意一点为 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, 根据弯曲柱面 Σ 参数方程可得到弯曲柱体 Ω 的参数方程为 $\tilde{x} = \phi(t) + e\rho \cos \theta - abeg\rho \sin \theta$, $\tilde{y} = \varphi(t) + \frac{a}{e}\rho \sin \theta$, $\tilde{z} = \gamma(t) + ae\rho \cos \theta - a^2beg\rho \sin \theta + \frac{ba}{e}\rho \sin \theta$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $0 \leq \rho \leq \varepsilon$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 因此定理3.1的结论(1)得证.

再证明Jacobian行列式为 $J(t, \rho, \theta) = (a'U + b'V)g\rho + \operatorname{sgn}(\gamma')\|\mathbf{r}'(t)\|\rho$.

根据 $U = e\rho \cos \theta - abeg\rho \sin \theta$, $V = \frac{a}{e}\rho \sin \theta$, $W = aU + bV$, 将 $J(t, \rho, \theta)$ 按行列式展开并将 $W = aU + bV$ 代入行列式, 化简得到

$$J(t, \rho, \theta) = (W_t - aU_t - bV_t) \frac{\partial(U, V)}{\partial(\rho, \theta)} + (\gamma'(t) - a\phi'(t) - b\varphi'(t)) \frac{\partial(U, V)}{\partial(\rho, \theta)}.$$

由

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} e \cos \theta & -e\rho \sin \theta \\ \frac{g}{e} \sin \theta & \frac{g}{e}\rho \cos \theta \end{vmatrix} = g\rho,$$

以及 $W_t = a'U + aU_t + b'V + bV_t$, 进一步化简得到

$$J(t, \rho, \theta) = (a'U + b'V)g\rho + (\gamma'(t) - a\phi'(t) - b\varphi'(t))g\rho.$$

由已知条件 $\mathbf{r}(t) = (\phi(t), \varphi(t), \gamma(t))$, $a = -\frac{\phi'}{\gamma'}$, $b = -\frac{\varphi'}{\gamma'}$, $g = (1+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma'(t) \neq 0$, 得到

$$\gamma' - a\phi' - b\varphi' = \gamma' - \left(-\frac{\phi'}{\gamma'}\right)\phi' - \left(-\frac{\varphi'}{\gamma'}\right)\varphi' = \gamma' + \frac{\phi'^2 + \varphi'^2}{\gamma'} = \frac{\phi'^2 + \varphi'^2 + \gamma'^2}{\gamma'} = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}{\gamma'}.$$

因为

$$g = (1+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\phi'^2 + \varphi'^2}{\gamma'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{|\gamma'|}{\sqrt{\phi'^2 + \varphi'^2 + \gamma'^2}} = \frac{|\gamma'|}{\|\mathbf{r}'(t)\|},$$

所以

$$(\gamma' - a\phi' - b\varphi')g = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}{\gamma'} \cdot \frac{|\gamma'|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \|\mathbf{r}'(t)\| \cdot \frac{|\gamma'|}{\gamma'} = \operatorname{sgn}(\gamma')\|\mathbf{r}'(t)\|,$$

即得到定理3.1的结论(2).

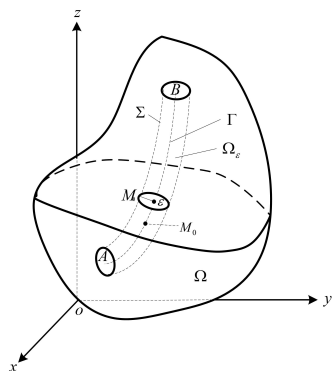
注 若某点处 $\gamma'(t) = 0$, 则可改取 $\phi'(t) \neq 0$ 或 $\varphi'(t) \neq 0$ 的分量, 按同样的方法作局部参数化处理.

定理3.2 已知三维连续型随机变量 (X, Y, Z) 在有界闭空间区域 Ω 上取值, 其密度函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上一阶连续可微, $f(x, y, z) \geq 0$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \notin \Omega$. 记空间曲线

$$\Gamma: \mathbf{r}(t) = (\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

为包含在 $\operatorname{int}(\Omega)$ 内的一条 C^2 正则曲线, 且 $\phi(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上严格单调, $f(x, y, z)$ 在空间曲线 Γ 上不恒为零, 则

$$P\{x_0 \leq X \leq x_1 \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\} = \frac{\int_{t \in I_x} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt}{\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt},$$

图2 弯曲柱面 Σ 与空间曲线 Γ 在 Ω 内的位置

其中 $I_x = \{t \in [t_1, t_2] \mid x_0 \leq \phi(t) \leq x_1\}$.

证 由弯曲柱面 Σ 围成的有界闭区域记为 Ω_ε (见图2). 由于空间曲线 Γ 是零测集, 条件概率 $P\{x_0 \leq X \leq x_1 \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\}$ 可采用极限形式表达为

$$P\{x_0 \leq X \leq x_1 \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{(X, Y, Z) \in \Omega_{\varepsilon, x}\}}{P\{(X, Y, Z) \in \Omega_\varepsilon\}},$$

其中 $\Omega_{\varepsilon, x}$ 是 Ω_ε 中满足 $x_0 \leq X \leq x_1$ 的子区域(对应于曲线段 Γ_x 的弯曲柱体).

先讨论某一局部区间上 $\gamma'(t) \neq 0$ 的情形. 由定理3.1结论直接得到弯曲柱体 Ω_ε 的参数方程为 $\tilde{x} = \phi(t) + e\rho \cos \theta - abeg\rho \sin \theta$, $\tilde{y} = \varphi(t) + \frac{a}{e}\rho \sin \theta$, $\tilde{z} = \gamma(t) + ae\rho \cos \theta - a^2beg\rho \sin \theta + \frac{ba}{e}\rho \sin \theta$, 其中 $t \in [t_1, t_2]$, $0 \leq \rho \leq \varepsilon$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 并且Jacobian行列式为

$$J(t, \rho, \theta) = (a'U + b'V)g\rho + \operatorname{sgn}(\gamma'(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\rho.$$

以下证明中, 记号 $O(\rho)$ 表示当 $\rho \rightarrow 0^+$ 时的渐近估计. 具体地, 若 $A(t, \rho, \theta) = O(\rho)$, 则表示存在与 ρ 无关的常数 $C > 0$ 及充分小的 $\delta > 0$, 使得当 $0 < \rho < \delta$ 时, 对所考虑范围内的一切参数 t, θ , 均有 $|A(t, \rho, \theta)| \leq C\rho$. $O(\rho^2)$ 的定义类似.

由于 a, b, e, g, a', b' 在闭区间 $[t_1, t_2]$ 上连续, 故它们在该区间上有界, 从而存在常数 $C_0 > 0$, 使得对任意 $t \in [t_1, t_2]$, $0 \leq \rho \leq \varepsilon$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 都有

$$|U| + |V| + |W| \leq C_0\rho.$$

由

$$J(t, \rho, \theta) = (a'U + b'V)g\rho + \operatorname{sgn}(\gamma'(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\rho,$$

以及 $U = O(\rho)$, $V = O(\rho)$, 可得

$$(a'U + b'V)g\rho = O(\rho^2),$$

故

$$J(t, \rho, \theta) = \operatorname{sgn}(\gamma'(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\rho + O(\rho^2).$$

又由于在所讨论的闭区间上 $\gamma'(t) \neq 0$, 故 $\gamma'(t)$ 不变号, 从而

$$|J(t, \rho, \theta)| = \|\mathbf{r}'(t)\|\rho + O(\rho^2),$$

其中 $O(\rho^2)$ 对 t, θ 一致成立.

另一方面, 因为 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上一阶连续可微, 且 Ω 为有界闭区域, 故 f 在 Ω 上满足Lipschitz

条件, 即存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \Omega$, 有

$$|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| \leq M(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

从而

$$|f(\phi(t) + U, \varphi(t) + V, \gamma(t) + W) - f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t))| \leq M(|U| + |V| + |W|) \leq C_1 \rho,$$

其中 $C_1 = MC_0$. 因此 $f(\phi(t) + U, \varphi(t) + V, \gamma(t) + W) = f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) + O(\rho)$, 于是

$$f(\phi(t) + U, \varphi(t) + V, \gamma(t) + W) |J| = f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \rho + O(\rho^2),$$

其中 $O(\rho), O(\rho^2)$ 对 t, θ 一致成立.

先计算分母表达式. 记 $D_\varepsilon = P\{(X, Y, Z) \in \Omega_\varepsilon\}$, 则

$$D_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} f(\phi(t) + U, \varphi(t) + V, \gamma(t) + W) |J| d\theta d\rho dt.$$

代入上式可得

$$D_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} (f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \rho + O(\rho^2)) d\theta d\rho dt,$$

进一步化简得到

$$D_\varepsilon = \pi \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt + O(\varepsilon^3).$$

记 $I = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, 由条件 $I > 0$ 并进一步化简得到分母表达式为

$$D_\varepsilon = \pi \varepsilon^2 I + O(\varepsilon^3).$$

再计算分子表达式. 由于 ϕ 在 $[t_1, t_2]$ 上严格单调, 集合 $I_x = \{t \in [t_1, t_2] \mid x_0 \leq \phi(t) \leq x_1\}$ 是 $[t_1, t_2]$ 的一个区间或空集. 若 $I_x = \emptyset$, 则分子直接为 0. 以下只讨论 $I_x \neq \emptyset$ 的情形.

设 $I_x = [\alpha, \beta] \subset [t_1, t_2]$, 空间曲线 $\Gamma_x = \{\mathbf{r}(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$, 其对应的弯曲柱体记为 $\Omega_{\varepsilon, x}$. 对 $\Omega_{\varepsilon, x}$ 与分母完全相同地计算, 可得

$$P\{(X, Y, Z) \in \Omega_{\varepsilon, x}\} = \pi \varepsilon^2 \int_\alpha^\beta f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt + O(\varepsilon^3).$$

即得到分子表达式 $N_\varepsilon = \pi \varepsilon^2 \int_{t \in I_x} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt + O(\varepsilon^3)$. 因此

$$P\{x_0 \leq X \leq x_1 \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{N_\varepsilon}{D_\varepsilon} = \frac{\int_{t \in I_x} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt}{\int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt},$$

其中 $I_x = \{t \in [t_1, t_2] \mid x_0 \leq \phi(t) \leq x_1\}$.

注 由于 Γ 为 C^2 正则曲线, 对每个 $t \in [t_1, t_2]$, 至少有一个分量导数非零. 因此可将 $[t_1, t_2]$ 分成有限个闭子区间, 使得在每一子区间上可选取一个非零导数分量, 并据此建立局部参数化. 由于各局部参数块只在边界处相接, 边界为零测集, 故总概率可由各段相加得到, 因此上述估计仍然成立.

例1 有界闭空间区域 Ω 由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 所围成. 随机变量 (X, Y, Z) 在 Ω 上取值, 密度函数为

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z}{\pi}, & (x, y, z) \in \Omega, \\ 0, & (x, y, z) \notin \Omega. \end{cases}$$

空间曲线 Γ 为包含在 Ω 内的一条光滑曲线, 其参数方程为 $(x, y, z) = (t, 0, t^2 + \frac{1}{2})$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. 以

下计算 $P\left\{0 \leq X \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\right\}$.

将 $\phi(t) = t$, $\varphi(t) = 0$, $\gamma(t) = t^2 + \frac{1}{2}$ 代入 $f(x, y, z) = \frac{z}{\pi}$ 得到

$$f(\phi(t), \varphi(t), \gamma(t)) = \frac{t^2 + \frac{1}{2}}{\pi}, \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2},$$

并记 $I_{[0, \sqrt{3}/6]} = [0, \sqrt{3}/6]$, $[t_1, t_2] = [0, 1/2]$. 由定理3.2

$$P\left\{0 \leq X \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \mid (X, Y, Z) \in \Gamma\right\} = \frac{\int_0^{\sqrt{3}/6} \left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + 4t^2} dt}{\int_0^{1/2} \left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + 4t^2} dt} = \frac{\frac{29}{9} + \frac{7}{4} \ln 3}{\frac{11}{2} \sqrt{2} + \frac{7}{2} \ln(\sqrt{2} + 1)}.$$

§4 结论

由于空间曲线不同于平面曲线, 将空间曲线视为弯曲柱体在母圆半径趋于零时的极限情形, 利用弯曲柱体的参数方程与三重积分换元方法得到三维连续型随机变量落在空间曲线上的条件概率计算公式. 该方法避免了在零测集上直接定义条件概率的困难, 为相关问题的处理提供了一条统一且可操作的计算路径, 对现有的条件概率的计算方法提供了补充.

参考文献:

- [1] 盛骤, 谢世千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 67-70.
- [2] 肖临, 杨向群. 马氏环境复合二项模型的条件概率计算[J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(1): 43-49.
- [3] 赵德勤, 宁荣健. 二维连续型随机变量的条件概率的计算[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 83-88.
- [4] 谭昕玥, 许忠好. 应用曲线积分求解条件概率密度函数[J]. 高等数学研究, 2021, 24(4): 45-48.
- [5] 朱士信, 唐烁, 宁荣健, 等. 高等数学(上)[M]. 第1版. 北京: 高等教育出版社, 2014, 45-55.

Calculation of conditional probability of three dimensional continuous random variables

DING Shang-wen

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, 230009, China)

Abstract: A definition of a curved cylinder and its parametric equation are given. A space curve is viewed as the limiting case of a curved cylinder as the radius of its generating circle tends to zero. On this basis, together with the change-of-variables method for triple integrals on the curved cylinder, a method is established for calculating the conditional probability of three-dimensional random variables on a space curve.

Keywords: random variable; conditional probability; probability density function; curved cylinder

MR Subject Classification: 60A05