

具有两类故障模式且修理设备可更换的 冷贮备可修系统研究

阙 佳, 姜 颖*, 吴文青

(西南科技大学 数理学院, 四川绵阳 621010)

摘 要: 该文研究具有两类故障模式且修理设备可更换的冷贮备可修系统. 部件和修理设备的工作寿命均服从负指数分布, 而故障部件的修理时间和修理设备的更换时间则遵从一般分布. 应用Markov更新过程理论、Laplace变换和Laplace-Stieltjes变换等数学工具, 分别讨论系统首次故障前时间分布函数以及系统首次故障前平均时间、系统的可用度和 $(0, t]$ 时间内系统平均故障次数. 同时讨论了三种特殊情形下系统的相应可靠性指标并验证该模型的正确性. 最后将此系统运用于冗余设计的太阳能发电系统, 并进行数值计算验证了系统相应参数对系统可靠性指标的影响. 文中研究的系统是一类更广泛的可修系统, 既丰富了现有理论内容, 又有具体的应用背景.

关键词: 两类故障模式; 冷贮备可修系统; 修理设备可更换; 可靠性指标

中图分类号: O213.2

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)02-0127-14

§1 引 言

在可靠性数学理论的研究中, 冷贮备系统作为可靠性问题研究中所用到的概率模型, 其描述的是贮备的正常部件在没有工作的时候既不故障也不劣化, 贮备期的长短对部件的工作寿命没有影响^[1], 被广泛应用于航空航天、交通运输系统、能源以及金融系统等领域^[2-3]. 国标电动车的电池系统可以看作一个冷贮备系统, 当正在使用的电池出现问题时, 可以使用贮备的不失效不裂化的电池去更换, 确保电动车能正常使用. 在数据中心或关键业务设施中使用的备用电源系统可以看作是一个冷贮备系统. 在这种系统中, 主电源是正常运行时的主要供电来源, 而备用电源(如电池组或柴油发电机)则处于冷贮备状态, 只有在主电源失效时才会被激活.

在现有的冷贮备可修系统的研究中, 学者通常都考虑冷贮备系统中转换开关是否可靠或冷贮备系统中的部件发生单一故障状态. 程畅^[4]研究了三类具有优先权的可修冷贮备系统, 针对

收稿日期: 2024-05-16 修回日期: 2024-10-12

*通讯作者, E-mail: jiangy@swust.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(72001181); 西南科技大学博士基金(22zx7106); 西南科技大学创新基金育苗计划(24ycx1003)

系统开关是否可靠, 维修设备的个数等不同情况进行讨论, 得到了系统的有关可靠性指标. 程江等人^[5]研究了一个单向关闭两个不同型部件串联和一个部件冷贮备的可修系统, 应用补充变量法、Laplace变换和Laplace-Stieltjes变换等工具研究系统的可用度、系统的可靠度以及系统在 $(0, t]$ 内的故障频度等指标. 刘仁彬等人^[6]在假设转换开关寿命和部件的工作寿命都服从指数分布的条件下, 讨论了开关寿命连续型的不同型多部件冷贮备不可修系统, 得到了该系统可靠度的理论表达式. 皮志敏等人^[7]在假设部件的工作寿命和维修时间都服从指数分布且转换开关完全可靠的情况下研究了由三个不同型部件和双开关组成的冷贮备可修系统, 得到可修系统的稳态指标, 如可靠度以及首次故障前平均时间.

事实上, 由于部件发生故障的位置不同, 修理设备磨损老化和修理工休假等情况, 部件发生故障的模式可能不止一种, 修理设备也可能在修理故障部件的过程中发生失效, 修理工休假会造成修理延迟等情况. 基于这样的实际情况, 程江等人^[8]研究了修理设备可更换的三部件串-并联可修系统, 利用全概率分解技术和更新过程理论以及Laplace变换工具得到了系统的可用度、系统在 $(0, t]$ 时间内平均故障次数的可靠性指标, 同时也得到了修理设备的首次失效时间分布、时刻 t 修理设备失效的概率、修理设备失效的平均次数和修理设备在 $(0, t]$ 内失效的平均次数等可靠性指标. 刘仁彬等人^[9]在经典的串联系统中引入了多级适应性休假策略和修理设备可更换的策略, 利用更新过程理论和概率分解法得到了系统的可用度, $(0, t]$ 时间内系统的平均故障次数和系统的更新时间分布, 也得到了修理工的闲期, 修理工的假期和修理工实际休假次数等可靠性指标, 最后将系统运用于实际工作站中. 顾建雄等人^[10]讨论了 n 个部件两个修理设备组成的冷贮备可修系统, 得到了系统可靠性的稳态指标和平均指标, 并且还利用Laplace变换的方法去解微分方程组得到了两个部件时的瞬时指标. 王丽敏^[11]研究了修理工可多重延误休假的多状态串联、并联、退化、冷贮备四个系统, 利用Markov过程理论, Laplace变换等数学工具分别计算得到四个系统可靠性指标. 杨会崇^[12]在假设部件寿命, 修理时间, 修理设备寿命均服从指数分布的条件下, 研究了修理延迟且修理设备可更换的冷贮备系统, 得到了系统的首次故障前时间、可用度和平均故障次数等可靠性指标. 魏瑛源等人^[13]在两个不同型部件组成的冷贮备可修系统中, 加入修理延迟和修理设备可更换策略, 应用Markov更新过程理论, 得到可靠性指标, 通过数值实例分析, 得到了修理延迟时间和修理设备的失效率对相关指标的影响. 文献^[14]基于补充变量法, 建立由 S_1 和 S_2 两类部件构成的三状态可修系统. 运用泛函分析方法研究了该模型的适定性和解的渐近行为. 姜颖等人^[15-16]讨论了具有两类故障状态的部件在修理设备可更换的条件下, 利用Markov更新过程等数学工具, 得到了修理设备的闲期长度和广义忙期长度等指标, 基于此还加入了修理有延迟的条件, 利用Laplace变换等数学工具, 最后得到了系统有关的可靠性指标. 吴文青等人^[17]在假设故障部件的修理时间为一般分布的条件下, 研究了修理设备可更换的 $k/n(G)$ 表决可修系统, 并利用Markov更新过程理论, Laplace变换等数学工具, 最终得到系统和修理设备有关的可靠性指标, 通过对特殊情况的讨论验证该文所得结果的正确性. 唐应辉等人^[18]考虑到可修系统中修理工带休假状态, 研究了修理工带休假状态的单部件可修系统, 利用全概率分解和Laplace变换等数学工具, 讨论了系统的可靠性指标. 刘宝亮等人在文献^[19]中讨论了在修理工休假中断策略下的冷贮备可修系统, 利用 PH 分布和Markov过程理论研究了系统的运行情况.

据笔者所知, 对于部件具有两类故障模式和修理设备可更换的冷贮备系统还未有相关文献进行讨论, 在实际的生产生活中, 部件具有两类故障状态和修理设备可更换的系统应用更加广

泛. 基于此, 本文研究在假设部件和修理设备的工作寿命都服从负指数分布, 故障部件的修理时间和修理设备的更换时间遵从一般分布的条件下研究了具有两类故障模式且修理设备可更换的冷贮备可修系统. 通过可靠性数学理论方法推导出系统首次故障前时间分布函数以及系统首次故障前平均时间、系统的可用度和 $(0, t]$ 时间内系统平均故障次数的可靠性指标.

§2 模型描述和符号说明

系统的模型描述如下.

1) 系统是由两个相同的独立部件和一个修理设备组成. 在系统启动之初, 两个部件和修理设备都处于全新状态, 一个部件开始工作, 而另一个部件则作为冷贮备部件贮存起来, 当工作部件发生故障时, 贮备部件立即转为工作部件开始工作.

2) 部件的工作寿命 X 服从参数为 $\lambda(0 < \lambda < \infty)$ 的负指数分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$, 部件发生第1类故障的概率为 p , 发生第2类故障的概率为 q , 且满足 $p + q = 1, p \geq 0, q \geq 0$.

3) 当部件出现故障时, 系统会立即使用修理设备对其进行维修. 然而, 在修复故障部件的过程中, 修理设备本身也有可能发生故障或失效. 修理设备的工作寿命 U 服从参数为 $\alpha(0 \leq \alpha < \infty)$ 的指数分布 $U(t) = 1 - e^{-\alpha t}, t \geq 0$, 修理设备的更换时间服从一般分布 $V(t)$, 且平均更换时间为 $E[V] = \frac{1}{\beta}$.

4) 修理设备每次只能修理一个故障部件. 对发生第 i 类故障的部件进行修理的时间 Y_i 服从一般分布 $G_i(t)$, 且平均修理时间为 $E[Y_i] = \frac{1}{\mu_i}, i = 1, 2$.

5) $X, Y_i, U, V, i = 1, 2$ 相互独立.

6) 假设冷贮备系统的转换开关是完全可靠的, 转移状态是瞬时的. 修理后的部件与新的一样, 且贮备部件既不故障也不劣化.

下面给出本文的符号说明.

用 $h^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t) dt$ 表示任意函数 $H(t)$ 的Laplace变换, $h(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH(t)$ 表示任意函数 $H(t)$ 的Laplace-Stieltjes变换, $H(t) * W(t) = \int_0^t W(t-u) dH(u)$ 表示函数 $H(t)$ 与 $W(t)$ 的卷积.

§3 系统的半Markov核

记 $\tilde{Y}_i$ 表示发生第 i 类故障部件的广义修理时间, 其中包含实际修理时间以及修理设备发生失效而对其进行更换的时间. 由模型描述可知, $\tilde{Y}_i$ 的分布函数 $\tilde{G}_i(t)$ 为

$$\tilde{G}_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P \left\{ Y_i + \sum_{l=1}^k V_l \leq t, \sum_{l=1}^k U_l < Y_i \leq \sum_{l=1}^{k+1} U_l \right\} = \sum_{(k=0)}^{\infty} \int_0^t V^{(k)}(t-y) \frac{(\alpha y)^k}{k!} e^{-\alpha y} dG_i(y), i = 1, 2.$$

对 $\tilde{G}_i(t)$ 作Laplace-Stieltjes变换得

$$\tilde{g}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\tilde{G}_i(t) = g_i(s + \alpha - \alpha v(s)), i = 1, 2,$$

进一步, 故障部件的广义修理时间的表达式为

$$E[\tilde{Y}_i] = \int_0^\infty t d\tilde{G}_i(t) = \frac{\alpha + \beta}{\mu_i \beta}, i = 1, 2.$$

接下来定义系统可能的状态.

0: 一个部件工作, 另一个部件冷贮备;

1: 工作部件发生第1类故障;

2: 工作部件发生第2类故障;

为了讨论问题的方便, 引入四个虚设状态.

3: 发生第1类故障的部件正在修理, 另一个发生第1类故障的部件处于等待修理状态;

4: 发生第1类故障的部件正在修理, 另一个发生第2类故障的部件处于等待修理状态;

5: 发生第2类故障的部件正在修理, 另一个发生第1类故障的部件处于等待修理状态;

6: 发生第2类故障的部件正在修理, 另一个发生第2类故障的部件处于等待修理状态.

由于修理时间是一般分布, 故进入状态3, 4, 5, 6的时刻不是系统的再生点, 状态3, 4, 5, 6是系统的故障状态, 即系统失效状态. 图1描述了系统各状态之间的转移关系.

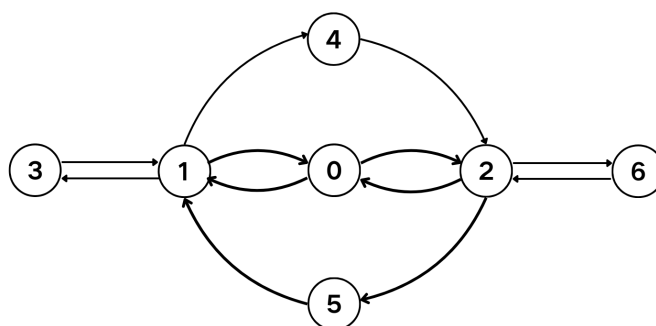


图1 系统各状态之间可能的状态转移情况

记 $X(t) = j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 表示 t 时刻系统处于状态 j . 由于指数分布具有无记忆性, 则进入状态 0, 1, 2 的时刻为系统的再生点, 进入状态 3, 4, 5, 6 的时刻不是系统的再生点. 令 T_n 表示系统发生第 n 次状态转移的时刻, $n = 0, 1, 2, \dots$, ($T_0 = 0$), $Z_n = X(T_n + 0)$ 表示第 n 次状态转移后系统所处的状态. 因此 $\{Z_n, T_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是一个 Markov 更新过程, $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个半 Markov 过程, 由半 Markov 核定义

$$Q_{ij}(t) = P\{Z_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = i\}, i, j = 0, 1, \dots, 6, n = 0, 1, 2, \dots$$

并结合系统各状态之间的转移图1, 可计算出所有状态转移的半 Markov 核.

1. 计算 $Q_{01}(t)$ 和 $Q_{02}(t)$, 即时刻 0 系统从进入状态 0 出发, $(0, t]$ 内系统转移到状态 1 和状态 2 的概率

$$Q_{01}(t) = P\{Z_{n+1} = 1, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 0\} = p(1 - e^{-\lambda t}),$$

$$Q_{02}(t) = P\{Z_{n+1} = 2, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 0\} = q(1 - e^{-\lambda t}).$$

2. 计算 $Q_{10}(t)$, $Q_{13}(t)$ 和 $Q_{14}(t)$, 即时刻 0 系统从进入状态 1 出发, $(0, t]$ 内系统转移到状态 0, 状态 3,

状态4的概率

$$Q_{10}(t) = P\{Z_{n+1} = 0, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 1\} = \int_0^t [1 - F(u)] d\tilde{G}_1(u),$$

$$Q_{13}(t) = P\{Z_{n+1} = 3, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 1\} = p \int_0^t [1 - \tilde{G}_1(u)] dF(u),$$

$$Q_{14}(t) = P\{Z_{n+1} = 4, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 1\} = q \int_0^t [1 - \tilde{G}_1(u)] dF(u).$$

3. 计算 $Q_{20}(t)$ 和 $Q_{25}(t)$ 和 $Q_{26}(t)$, 即时刻0系统从进入状态2出发, $(0, t]$ 内系统转移到状态0, 状态5, 状态6的概率

$$Q_{20}(t) = P\{Z_{n+1} = 0, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 2\} = \int_0^t [1 - F(u)] d\tilde{G}_2(u),$$

$$Q_{25}(t) = P\{Z_{n+1} = 5, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 2\} = p \int_0^t [1 - \tilde{G}_2(u)] dF(u),$$

$$Q_{26}(t) = P\{Z_{n+1} = 6, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 2\} = q \int_0^t [1 - \tilde{G}_2(u)] dF(u).$$

由于故障部件的修理时间和修理设备的更换时间均服从一般分布, 因而进入状态3, 4, 5, 6的时刻不是系统的再生点, 显然状态3, 4, 5, 6都是系统的故障状态, 且Markov更新过程从进入状态1到进入状态1或2的期间内, 可能经过虚设状态3或4, 可计算半Markov核 $Q_{11}^{(3)}(t)$ 和 $Q_{12}^{(4)}(t)$,

$$Q_{11}^{(3)}(t) = P\{Z_{n+1} = 1, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 1\} = p \int_0^t F(u) d\tilde{G}_1(u),$$

$$Q_{12}^{(4)}(t) = P\{Z_{n+1} = 2, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 1\} = q \int_0^t F(u) d\tilde{G}_1(u),$$

同理从进入状态2到进入状态1或2的期间内, 可能经过虚设状态5或6, 可计算半Markov核 $Q_{21}^{(5)}(t)$ 和 $Q_{22}^{(6)}(t)$,

$$Q_{21}^{(5)}(t) = P\{Z_{n+1} = 1, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 2\} = p \int_0^t F(u) d\tilde{G}_2(u),$$

$$Q_{22}^{(6)}(t) = P\{Z_{n+1} = 2, T_{n+1} - T_n \leq t | Z_n = 2\} = q \int_0^t F(u) d\tilde{G}_2(u).$$

对以上各式做Laplace-Stieltjes变换得

$$q_{01}(s) = \frac{\lambda p}{s + \lambda}, \quad q_{02}(s) = \frac{\lambda q}{s + \lambda},$$

$$q_{10}(s) = \tilde{g}_1(s + \lambda), \quad q_{13}(s) = \frac{p\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_1(s + \lambda)], \quad q_{14}(s) = \frac{q\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_1(s + \lambda)],$$

$$q_{20}(s) = \tilde{g}_2(s + \lambda), \quad q_{25}(s) = \frac{p\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_2(s + \lambda)], \quad q_{26}(s) = \frac{q\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_2(s + \lambda)],$$

$$q_{11}^{(3)} = p [\tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_1(s + \lambda)], \quad q_{12}^{(4)} = q [\tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_1(s + \lambda)],$$

$$q_{21}^{(5)} = p [\tilde{g}_2(s) - \tilde{g}_2(s + \lambda)], \quad q_{22}^{(6)} = q [\tilde{g}_2(s) - \tilde{g}_2(s + \lambda)].$$

§4 系统的可靠性分析

4.1 系统首次故障前时间分布及平均时间

令 $\Phi_i(t) = P\{\text{系统首次故障前时间}\tau \leq t | \text{时刻0系统进入状态}i\}$, $\phi_i(t) = \int_0^\infty e^{-st} d\Phi_i(t)$,

$$T_i = \int_0^{\infty} t d\Phi_i(t), i = 0, 1, 2.$$

定理1 系统首次故障前的时间分布函数的Laplace-Stieltjes变换的表达式为

$$\begin{cases} \varphi_0(s) = \zeta, \\ \varphi_1(s) = \zeta \tilde{g}_1(s + \lambda) + \frac{\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_1(s + \lambda)], \\ \varphi_2(s) = \zeta \tilde{g}_2(s + \lambda) + \frac{\lambda}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_2(s + \lambda)], \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\zeta = \frac{\lambda^2 [1 - \tilde{g}_1(s + \lambda) - \tilde{g}_2(s + \lambda)]}{(s + \lambda)^2 - (s + \lambda)\lambda p \tilde{g}_1(s + \lambda) - (s + \lambda)\lambda q \tilde{g}_2(s + \lambda)}$, 且系统首次故障前平均时间为

$$\begin{cases} T_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda[p\tilde{g}_1(\lambda) + q\tilde{g}_2(\lambda) - 1]}, \\ T_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{g}_1(\lambda)}{\lambda[p\tilde{g}_1(\lambda) + q\tilde{g}_2(\lambda) - 1]}, \\ T_2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{g}_2(\lambda)}{\lambda[p\tilde{g}_1(\lambda) + q\tilde{g}_2(\lambda) - 1]}. \end{cases} \quad (2)$$

证 由 $\Phi_i(t)$ 的定义及系统的状态转移关系得

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= P\{\text{系统首次故障前时间} \tau \leq t | z_0 = 0\} = \\ &= P\{\tau \leq t, T_1 > t | z_0 = 0\} + P\{\tau \leq t, T_1 \leq t | z_0 = 0\} = \\ &= \int_0^t \Phi_1(t-u) dQ_{01}(u) + \int_0^t \Phi_2(t-u) dQ_{02}(u) = \Phi_1(t) * Q_{01}(t) + \Phi_2(t) * Q_{02}(t). \end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= P\{\text{系统首次故障前时间} \tau \leq t | z_0 = 1\} = \\ &= P\{\tau \leq t, T_1 > t | z_0 = 1\} + P\{\tau \leq t, T_1 \leq t | z_0 = 1\} = \\ &= \int_0^t \Phi_0(t-u) dQ_{10}(u) + Q_{13}(t) + Q_{14}(t) = \Phi_0(t) * Q_{10}(t) + Q_{13}(t) + Q_{14}(t), \\ \Phi_2(t) &= P\{\text{系统首次故障前时间} \tau \leq t | z_0 = 2\} = \\ &= P\{\tau \leq t, T_1 > t | z_0 = 2\} + P\{\tau \leq t, T_1 \leq t | z_0 = 2\} = \\ &= \int_0^t \Phi_0(t-u) dQ_{20}(u) + Q_{25}(t) + Q_{26}(t) = \Phi_0(t) * Q_{20}(t) + Q_{25}(t) + Q_{26}(t). \end{aligned}$$

对 $\Phi_i(t)$ 作Laplace-Stieltjes变换有

$$\begin{aligned} \phi_0(s) &= \phi_1(s)q_{01}(s) + \phi_2(s)q_{02}(s), \quad \phi_1(s) = \phi_0(s)q_{10}(s) + q_{13}(s) + q_{14}(s), \\ \phi_2(s) &= \phi_0(s)q_{20}(s) + q_{25}(s) + q_{26}(s). \end{aligned}$$

经计算, 可解得(1), 进一步, 系统首次故障前的平均时间为

$$T_i = \int_0^{\infty} t d\Phi_i(t) = -\frac{d\phi_i(s)}{ds} \Big|_{s=0}, i = 0, 1, 2,$$

并结合 $\phi_0(s), \phi_1(s), \phi_2(s)$, 经过计算可得系统首次故障前平均时间(2).

4.2 系统的可用度

令 $A_i(t) = P\{\text{时刻} t \text{ 系统处于正常状态} | \text{时刻} 0 \text{ 系统进入状态} i\}, i = 0, 1, 2.$

定理2 系统可用度的Laplace变换的表达式为

$$\begin{cases} a_0^*(s) = \frac{1 + \lambda p \xi_1 + \lambda q \xi_2}{s + \lambda - \lambda p \eta_1 - \lambda q \eta_2}, \\ a_1^*(s) = \frac{1 + \lambda p \xi_1 + \lambda q \xi_2}{s + \lambda - \lambda p \eta_1 - \lambda q \eta_2} \eta_1 + \xi_1, \\ a_2^*(s) = \frac{1 + \lambda p \xi_1 + \lambda q \xi_2}{s + \lambda - \lambda p \eta_1 - \lambda q \eta_2} \eta_2 + \xi_2, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\eta_i = \frac{s + \lambda}{\lambda} [\tilde{g}_i(s) - \tilde{g}_i(s + \lambda)] + \tilde{g}_i(s + \lambda), i = 1, 2,$$

$$\xi_i = -\frac{1}{\lambda} [\tilde{g}_i(s) - \tilde{g}_i(s + \lambda)] + \frac{1}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_i(s + \lambda)], i = 1, 2,$$

且系统的稳态可用度为

$$A = \frac{1}{p \tilde{g}_1(\lambda) + q \tilde{g}_2(\lambda) + \lambda p E[\tilde{Y}_1] + \lambda q E[\tilde{Y}_2]}. \quad (4)$$

其中

$$E[\tilde{Y}_1] = \frac{\alpha + \beta}{\mu_1 \beta}, \quad E[\tilde{Y}_2] = \frac{\alpha + \beta}{\mu_2 \beta}.$$

证 由 $A_i(t)$ 的定义以及系统的状态转移关系可得

$$\begin{aligned} A_0(t) &= P\{\text{时刻}t\text{系统处于正常状态}|Z_0 = 0\} = \\ &P\{\text{时刻}t\text{系统处于正常状态}, T_1 > t|Z_0 = 0\} + P\{\text{时刻}t\text{系统处于正常状态}, T_1 \leq t|Z_0 = 0\} = \\ &1 - (1 - e^{-\lambda t}) + \int_0^t A_1(t-u) dQ_{01}(u) + \int_0^t A_2(t-u) dQ_{02}(u) = \\ &e^{-\lambda t} + A_1(t) * Q_{01}(t) + A_2(t) * Q_{02}(t), \end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned} A_1(t) &= P\{\text{时刻}t\text{系统处于正常状态}|Z_0 = 1\} = \\ &e^{-\lambda t} [1 - \tilde{G}_1(t)] + A_0(t) * Q_{10}(t) + A_1(t) * Q_{11}(t) + A_2(t) * Q_{12}(t), \\ A_2(t) &= P\{\text{时刻}t\text{系统处于正常状态}|Z_0 = 2\} = \\ &e^{-\lambda t} [1 - \tilde{G}_2(t)] + A_0(t) * Q_{20}(t) + A_1(t) * Q_{21}(t) + A_2(t) * Q_{22}(t). \end{aligned}$$

对 $A_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ 作Laplace变换, 有

$$\begin{aligned} a_0^*(s) &= \frac{1}{s + \lambda} + a_1^*(s) q_{01}(s) + a_2^*(s) q_{02}(s), \\ a_1^*(s) &= \frac{1}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_1(s + \lambda)] + a_0^*(s) q_{10}(s) + a_1^*(s) q_{11}(s) + a_2^*(s) q_{12}(s), \\ a_2^*(s) &= \frac{1}{s + \lambda} [1 - \tilde{g}_2(s + \lambda)] + a_0^*(s) q_{20}(s) + a_1^*(s) q_{21}(s) + a_2^*(s) q_{22}(s). \end{aligned}$$

经计算可得(3), 进一步, 由系统的稳态可用度

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s a_i^*(s), i = 0, 1, 2,$$

并结合 $a_0^*(s)$, $a_1^*(s)$, $a_2^*(s)$ 计算得到系统的稳态可用度(4).

4.3 (0, t]时间内系统平均故障次数

令 $N^l(t)$, $l = 1, 2$ 表示(0, t] 时间内系统发生第 l ($l = 1, 2$)类故障的次数.

$M_i^l = E\{N^l(t)|Z_0 = i\}$, $l = 1, 2$, 表示0时刻系统从进入状态*i*出发, 在(0, *t*]内系统发生*l* ($l = 1, 2$)类故障的平均次数, $i = 0, 1, 2$; $M_i(t) = M_i^1(t) + M_i^2(t)$, 表示时刻0系统从进入状态*i*出发, 在(0, *t*]内系统总的平均故障次数.

定理3 系统第1类故障的平均故障次数的Laplace-Stieltjes变换的表达式为

$$\begin{cases} m_0^1(s) = \frac{\frac{\lambda p}{s+\lambda}[\lambda - \lambda p \tilde{g}_1(s+\lambda) - \lambda q \tilde{g}_2(s+\lambda)]}{(s+\lambda)\varpi}, \\ m_1^1(s) = \frac{\frac{p\lambda}{s+\lambda}[1 - \tilde{g}_1(s+\lambda)] \left\{ 1 - \frac{\lambda q}{s+\lambda} \tilde{g}_2(s+\lambda) - q[\tilde{g}_2(s) - \tilde{g}_2(s+\lambda)] \right\}}{\varpi} + \\ \quad \frac{\frac{p\lambda}{s+\lambda}[1 - \tilde{g}_2(s+\lambda)] \left\{ \frac{\lambda q}{s+\lambda} \tilde{g}_1(s+\lambda) + q[\tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_1(s+\lambda)] \right\}}{\varpi}, \\ m_2^1(s) = \frac{\frac{p\lambda}{s+\lambda}[1 - \tilde{g}_2(s+\lambda)] \left\{ 1 - \frac{\lambda p}{s+\lambda} \tilde{g}_1(s+\lambda) - p[\tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_1(s+\lambda)] \right\}}{\varpi} + \\ \quad \frac{\frac{p\lambda}{s+\lambda}[1 - \tilde{g}_1(s+\lambda)] \left\{ \frac{\lambda p}{s+\lambda} \tilde{g}_2(s+\lambda) + p[\tilde{g}_2(s) - \tilde{g}_2(s+\lambda)] \right\}}{\varpi}, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\varpi = \left\{ 1 - \frac{\lambda p}{s+\lambda} \tilde{g}_1(s+\lambda) - \frac{\lambda q}{s+\lambda} \tilde{g}_2(s+\lambda) - p[\tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_1(s+\lambda)] - q[\tilde{g}_2(s) - \tilde{g}_2(s+\lambda)] \right\}.$$

且系统第1类故障的平均故障次数为

$$M^1 = \frac{\lambda p[1 - p \tilde{g}_1(\lambda) - q \tilde{g}_2(\lambda)]}{p \tilde{g}_1(\lambda) + q \tilde{g}_2(\lambda) + \lambda p E[\tilde{Y}_1] + \lambda q E[\tilde{Y}_2]}, \quad (6)$$

同理可得系统第2类故障的平均故障次数为

$$M^2 = \frac{\lambda q[1 - p \tilde{g}_1(\lambda) - q \tilde{g}_2(\lambda)]}{p \tilde{g}_1(\lambda) + q \tilde{g}_2(\lambda) + \lambda p E[\tilde{Y}_1] + \lambda q E[\tilde{Y}_2]}, \quad (7)$$

所以得到系统平均故障次数为

$$M = \frac{\lambda[1 - p \tilde{g}_1(\lambda) - q \tilde{g}_2(\lambda)]}{p \tilde{g}_1(\lambda) + q \tilde{g}_2(\lambda) + \lambda p E[\tilde{Y}_1] + \lambda q E[\tilde{Y}_2]}. \quad (8)$$

证 由定义及系统的状态转移关系得

$$\begin{aligned} M_0^1(t) &= E[N^1(t)|Z_0 = 0] = \\ &= E[N^1(t), T_1 > t|Z_0 = 0] + E[N^1(t), T_1 \leq t|Z_0 = 0] = \\ &= \int_0^t M_1^1(t-u) dQ_{01}(u) + \int_0^t M_2^1(t-u) dQ_{02}(u) = \\ &= M_1^1(t) * Q_{01}(t) + M_2^1(t) * Q_{02}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1^1(t) &= E[N^1(t)|Z_0 = 1] = \\
 &E[N^1(t), T_1 > t|Z_0 = 1] + E[N^1(t), T_1 \leq t|Z_0 = 1] = \\
 &\int_0^t M_0^1(t-u)dQ_{10}(u) + \int_0^t M_1^1(t-u)dQ_{11}(u) + \\
 &\int_0^t M_2^1(t-u)dQ_{12}(u) + Q_{13}(t) = \\
 &M_0^1(t) * Q_{10}(t) + M_1^1(t) * Q_{11}(t) + M_2^1(t) * Q_{12}(t) + Q_{13}(t), \\
 M_2^1(t) &= E[N^1(t)|Z_0 = 2] = \\
 &E[N^1(t), T_1 > t|Z_0 = 2] + E[N^1(t), T_1 \leq t|Z_0 = 2] = \\
 &\int_0^t M_0^1(t-u)dQ_{20}(u) + \int_0^t M_1^1(t-u)dQ_{21}(u) + \\
 &\int_0^t M_2^1(t-u)dQ_{22}(u) + Q_{25}(t) = \\
 &M_0^1(t) * Q_{20}(t) + M_1^1(t) * Q_{21}(t) + M_2^1(t) * Q_{22}(t) + Q_{25}(t),
 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
 M_0^2(t) &= M_1^2(t) * Q_{01}(t) + M_2^2(t) * Q_{02}(t), \\
 M_1^2(t) &= M_0^2(t) * Q_{10}(t) + M_1^2(t) * Q_{11}(t) + M_2^2(t) * Q_{12}(t) + Q_{14}(t), \\
 M_2^2(t) &= M_0^2(t) * Q_{20}(t) + M_1^2(t) * Q_{21}(t) + M_2^2(t) * Q_{22}(t) + Q_{26}(t),
 \end{aligned}$$

对 $M_i^1(t)$, $M_i^2(t)$ 做Laplace-Stieltjes变换, 有

$$\begin{aligned}
 m_0^1(s) &= m_1^1(s)q_{01}(s) + m_2^1(s)q_{02}(s), \\
 m_1^1(s) &= m_0^1(s)q_{10}(s) + m_1^1(s)q_{11}(s) + m_2^1(s)q_{12}(s) + q_{13}(s), \\
 m_2^1(s) &= m_0^1(s)q_{20}(s) + m_1^1(s)q_{21}(s) + m_2^1(s)q_{22}(s) + q_{25}(s), \\
 m_0^2(s) &= m_1^2(s)q_{01}(s) + m_2^2(s)q_{02}(s), \\
 m_1^2(s) &= m_0^2(s)q_{10}(s) + m_1^2(s)q_{11}(s) + m_2^2(s)q_{12}(s) + q_{14}(s), \\
 m_2^2(s) &= m_0^2(s)q_{20}(s) + m_1^2(s)q_{21}(s) + m_2^2(s)q_{22}(s) + q_{26}(s)..
 \end{aligned}$$

经计算, 可解得(5), 进一步, 由系统第 $l(l=1, 2)$ 类故障的平均故障次数

$$M^l = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i^l(t)}{t} = \lim_{s \rightarrow 0^+} sm_i^l(s), i = 0, 1, 2, l = 1, 2,$$

并结合 $m_0^1(s)$, $m_1^1(s)$, $m_2^1(s)$, $m_0^2(s)$, $m_1^2(s)$, $m_2^2(s)$, 计算得到系统第1类平均故障次数(6), 系统第2类平均故障次数(7)以及系统平均故障次数(8), 且与初始状态无关.

§5 特殊情况

下面给出三种特殊情况下系统可靠性指标的表达式.

推论1 当 $\alpha = 0$, 文中所研究的系统退化为具有两种故障状态的两同型部件冷贮备可修系统.

a. 系统首次故障前平均时间

$$\begin{cases} T_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda[pg_1(\lambda) + qg_2(\lambda) - 1]}, \\ T_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{g_1(\lambda)}{\lambda[pg_1(\lambda) + qg_2(\lambda) - 1]}, \\ T_2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{g_2(\lambda)}{\lambda[pg_1(\lambda) + qg_2(\lambda) - 1]}. \end{cases}$$

b. 系统的可用度

$$A = \frac{1}{pg_1(\lambda) + qg_2(\lambda) + \lambda p \frac{1}{\mu_1} + \lambda q \frac{1}{\mu_2}}.$$

c. 系统的故障频度

$$M = \frac{\lambda[1 - pg_1(\lambda) - qg_2(\lambda)]}{pg_1(\lambda) + qg_2(\lambda) + \lambda p \frac{1}{\mu_1} + \lambda q \frac{1}{\mu_2}}.$$

推论2 当 $p = 1, q = 0$, 文中所研究的系统退化为修理设备可更换的两部件冷贮备可修系统.

a. 系统首次故障前平均时间

$$\begin{cases} T_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda[\tilde{g}_1(\lambda) - 1]}, \\ T_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{g}_1(\lambda)}{\lambda[\tilde{g}_1(\lambda) - 1]}. \end{cases}$$

b. 系统的可用度

$$A = \frac{1}{g_1(\lambda) + \lambda \frac{\alpha + \beta}{\mu_1 \beta}}.$$

c. 系统的故障频度

$$M = \frac{\lambda[1 - \tilde{g}_1(\lambda)]}{\tilde{g}_1(\lambda) + \lambda \frac{\alpha + \beta}{\mu_1 \beta}}.$$

推论3 当 $\alpha = 0, p = 1, G_1(t) = G_2(t) = 1 - e^{-\mu t}$, 文中所研究的系统退化为一个修理设备两个同型部件组成的冷贮备可修系统.

a. 系统首次故障前平均时间

$$T_0 = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

b. 系统的可用度

$$A = \frac{\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}.$$

c. 系统的故障频度

$$M = \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}.$$

注 推论3的结果与文献[1]第231页的结果一致, 这也证明了本文得到的结果是正确的.

§6 数值实例与分析

太阳能发电系统主要由太阳能电池板、逆变器、控制器和储能设备(如蓄电池)等部分组成. 这些部分协同工作, 将太阳能转化为电能, 并通过逆变器转换为交流电供用户使用或并入电网.

在某些高端或关键应用的太阳能发电系统中,可能会采用冗余设计来提高系统的可靠性和稳定性.例如,配置双逆变器、双控制器或双储能系统等,以确保在一个部件发生故障时,系统能够继续运行.在冗余设计的太阳能发电系统中,未投入使用的冗余部件可以视为处于冷贮备状态.当主部件出现故障时,冗余部件会立即投入运行,从而确保系统的连续供电.出现故障的主部件系统会立即进行修理,在修理的过程中,修理设备由于老化磨损等情况会出现故障或失效.

下面对冗余设计的太阳能发电系统实例进行数值计算,参数假定为冗余设计的太阳能发电系统中修理设备的修复率 μ ,冗余设计的太阳能发电系统的修理设备的失效率 α ,冗余设计的太阳能发电系统的修理设备的更换率 β ,验证对冗余设计的太阳能发电系统首次故障前平均时间 T_0, T_1, T_2 ,冗余设计的太阳能发电系统的稳态可用度 A 和冗余设计的太阳能发电系统的稳态故障频度 M 的影响.其中 $A = \frac{1}{p\tilde{g}_1(\lambda) + q\tilde{g}_2(\lambda) + \lambda pE[\tilde{Y}_1] + \lambda qE[\tilde{Y}_2]}$, $M = \frac{\lambda[1 - p\tilde{g}_1(\lambda) - q\tilde{g}_2(\lambda)]}{p\tilde{g}_1(\lambda) + q\tilde{g}_2(\lambda) + \lambda pE[\tilde{Y}_1] + \lambda qE[\tilde{Y}_2]}$.

由于修理设备的失效率 α 和修理设备的更换率 β 不同,以及部件发生两种故障模式的概率 p, q 不同,假设部件故障后的修理时间服从参数为 μ_i 的指数分布 $G_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, i = 1, 2$;冗余设计的太阳能发电系统的修理设备故障后的更换时间服从参数为 β 的指数分布 $V(t) = 1 - e^{-\beta t}$;0时刻冗余设计的太阳能发电系统从状态0(一个部件工作,另一个部件冷贮备)开始.

取 $\alpha = 1, \beta = 6$,图2给出以 λ 为自变量的冗余设计的太阳能发电系统首次故障前平均时间 T_0, T_1, T_2 变化的图形,从图2可以看出冗余设计的太阳能发电系统首次故障前平均时间 T_0, T_1, T_2 ,随着 λ 的增大而减小,随着 μ_1, μ_2 的减小而减小,并逐渐趋于稳定值.

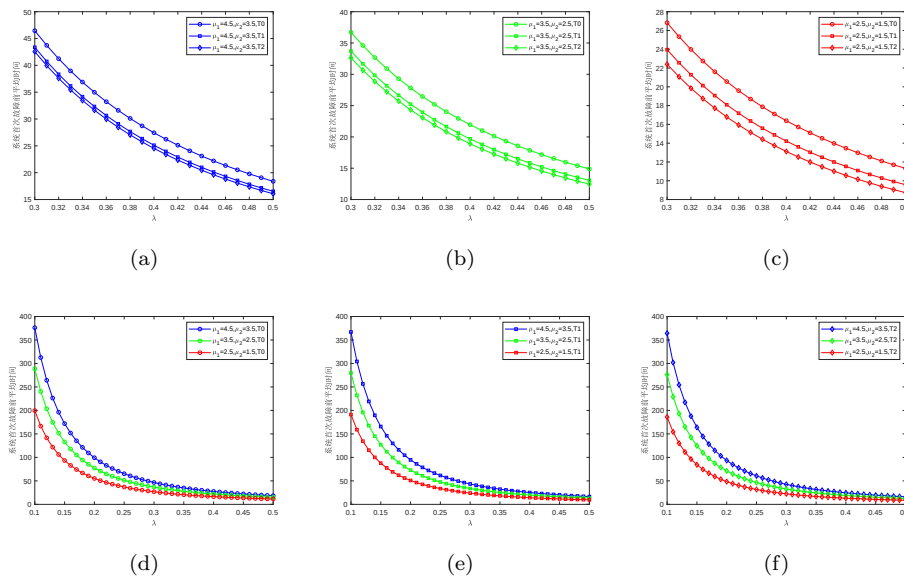
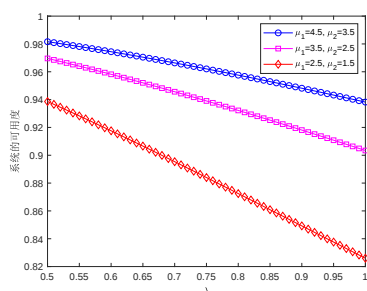
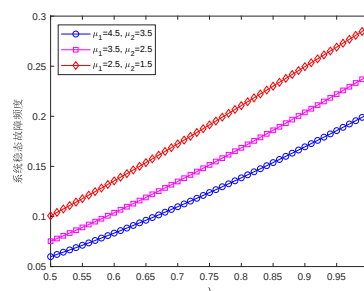
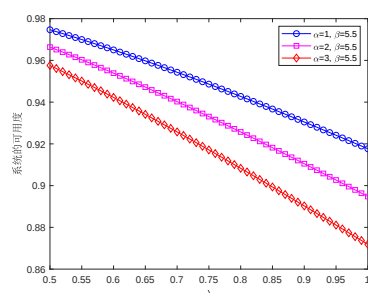
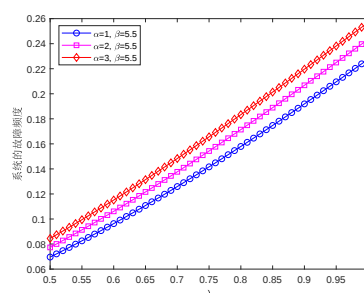


图2 不同 λ 值下系统首次故障前平均时间

取 $\alpha = 1, \beta = 6$,图3-图4给出以 λ 为自变量的冗余设计的太阳能发电系统的稳态可用度 A 和冗余设计的太阳能发电系统的稳态故障频度 M 变化的图形,三条曲线分别对应 $\mu_1 = 4.5, \mu_2 = 3.5; \mu_1 = 3.5, \mu_2 = 2.5; \mu_1 = 2.5, \mu_2 = 1.5$.从图3中可以看出,太阳能发电系统的稳态可用度 A 随着 λ 的增大而减小,随着 μ_1, μ_2 的减小而减小;从图4中可以看出,冗余设计的太阳能发电系统的稳态故障频度 M 随着 λ 的增大而增大,随着 μ_1, μ_2 的减小而增大.

图3 系统稳态可用度 A 随 λ, μ_1, μ_2 的变化图4 系统稳态故障频度 M 随 λ, μ_1, μ_2 的变化图5 系统稳态可用度 A 随 λ, α, β 的变化图6 系统稳态故障频度 M 随 λ, α, β 的变化

进一步, 取 $\beta = 5.5$, 图5-图6给出以 λ 为自变量的冗余设计的太阳能发电系统的稳态可用度 A 和冗余设计的太阳能发电系统的稳态故障频度 M 变化的图形, 三条曲线分别对应 $\alpha = 1, \alpha = 2, \alpha = 3$, 从图5中可以看出, 冗余设计的太阳能发电系统的稳态可用度 A 随着 λ 的增大而减小, 随着 α 的增大而减小; 从图6中可以看出冗余设计的太阳能发电系统的稳态故障频度 M 随着 λ 的增大而增大, 随着 α 的增大而增大. 这与实际情况相符, 当冗余设计的太阳能发电系统的修理设备的失效率增大, 冗余设计的太阳能发电系统的修理设备的寿命不断降低时, 冗余设计的太阳能发电系统的可用度降低, 冗余设计的太阳能发电系统的故障频度不断增大.

由此可见, 冗余设计的太阳能发电系统具有显著的应用价值, 并在提升系统可靠性, 保障电力供应连续性方面发挥着重要作用. 当主部件出现故障时, 冗余部件能够迅速接替工作, 从而避免系统整体瘫痪. 在选择冗余部件时, 应优先考虑高质量, 高可靠性的产品, 并确保其与主部件具有良好的兼容性和互换性. 在冗余设计的太阳能发电系统作业中通过实时监测系统的运行状态和性能参数, 及时发现并处理潜在问题; 同时定期对冗余部件进行维护和保养, 确保其处于良好状态.

§7 结论

文中讨论了部件具有两类故障模式且修理设备可更换的冷贮备可修系统, 利用Markov更新过程理论, Laplace变换, Laplace-Stieltjes变换等数学工具, 得到了系统首次故障前时间分布函数以及系统首次故障前平均时间, 系统的可用度, $(0, t]$ 时间内系统平均故障次数可靠性指标的表达式. 通过将讨论的系统退化为具有两种故障状态的两同型部件冷贮备可修系统, 修理设备可更

换的两部件冷贮备可修系统, 一个修理设备两个同型部件组成的冷贮备可修系统三种特殊情形下的系统, 并得到这三种特殊情形下系统的可靠性指标, 验证了本文结果的正确性. 最后将该可修系统运用于太阳能发电系统, 进行数值计算, 得到了系统参数对系统可靠性指标的影响.

在研究中, 仅考虑了故障部件的两类故障模式. 在后续的工作中, 可以考虑故障部件的多类故障模式的情形, 也可以引入更多的维修控制策略, 使得所讨论的模型具有更大的适应性.

参考文献:

- [1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 张雪松, 王超, 程晓东. 基于马尔可夫状态空间法的超高压电网继电保护系统可靠性分析模型[J]. 电网技术, 2008, 32(13): 94-99.
- [3] 王同文, 谢民, 孙月琴, 等. 智能变电站继电保护系统可靠性分析[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(06): 58-66.
- [4] 程畅. 几类可修冷贮备系统的可靠性分析[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2019.
- [5] 程江, 唐应辉, 余妙妙. 单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的三部件可修系统的可靠性[J]. 应用数学, 2017, 30(1): 27-39.
- [6] 刘仁彬, 唐应辉, 骆川义. 一种新型的N部件串联可修系统及其可靠性分析[J]. 应用数学, 2007, 20(1): 164-170.
- [7] 皮志敏, 董秋仙, 刘君. 双开关的三部件冷贮备系统可靠性分析[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(24): 183-194.
- [8] 程江, 唐应辉. 修理设备可以更换的三部件串-并联可修系统的可靠性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2010, 32(1): 148-154.
- [9] 刘仁彬, 邓朝晖, 刘锋. 一类多级适应性休假的串联可修系统分析[J]. 系统工程学报, 2014, 29(1): 126-134.
- [10] 顾建雄, 魏瑛源. n 个同型部件和两个修理设备的冷贮备可修系统的可靠性指标[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2006, 20(2): 17-20.
- [11] 王丽敏. 修理工可休假的多状态系统可靠性分析[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2017.
- [12] 杨会崇. 修理延迟且修理设备可更换的冷贮备系统[J]. 河西学院学报, 2016, 32(5): 26-32.
- [13] 魏瑛源, 唐应辉. 基于修理设备可更换和修理延迟策略的两不同型部件冷贮备可修系统[J]. 工程数学学报, 2020, 37(4): 423-441.
- [14] 阿布都瓦力·阿布都克热木, 艾合买提·卡斯木. 具有两类部件的三状态可修系统的动态分析[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(2): 166-180.
- [15] 姜颖, 唐应辉. 部件有两类故障状态且修理设备可更换的并联可修系统分析[J]. 应用数学, 2014, 27(3): 535-545.
- [16] 姜颖, 唐应辉. 修理设备可更换和修理延迟的两类故障状态并联可修系统[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(7): 174-186.
- [17] 吴文青, 唐应辉, 兰绍军. 修理设备可更换的 $k/n(G)$ 表决可修系统[J]. 数学学报(中文版), 2016, 59(06): 799-820.
- [18] Tang Yinghui, Liu Xiaoyun. Reliability analysis of one unit repairable system with repairman vacation[J]. OALib Journal, 2004, 30(3): 466-470.
- [19] Liu Baoliang, Cui Lirong, Wen Yanqing. Cold standby repairable system with working vacations and vacation interruption[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2015, 26(5): 1127-1134.

- [20] Liu Baoliang, Cui Lirong, Wen Yanqing. A cold standby repairable system with working vacations and vacation interruption following Markovian arrival process[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015, 142: 1-8.

Cold standby repairable system of two identical parts with two fault modes and replaceable repair facility

QUE Jia, JIANG Ying, WU Wen-qing

(School of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: A cold standby repairable system with two failure modes and one replaceable repair facility is considered. The operating times of the components and the repair facility follow exponential distributions, while the repair times of failed components and the replacement time of the repair facility follow general distributions. By applying the Markov renewal process theory, the Laplace transform, and the Laplace-Stieltjes transform, the distribution function of the time to the first system failure, the mean time to the first system failure, the system availability, and the average number of system failures in $(0, t]$ are derived. Meanwhile, three special cases of the model are discussed, along with various reliability measures. Finally, the model is applied to a redundantly designed solar power system, and some numerical examples are reported to demonstrate how various parameters of the model influence the behavior of the solar power system. The studied model is a general repairable system that enriches the existing theoretical framework and has specific practical application backgrounds.

Keywords: cold standby repairable system; two models of failure; replaceable repair equipment; reliability measures

MR Subject Classification: 60K10; 90B25