

非线性sine-Gordon方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元方法

王婧瑗^{1,3}, 李宏^{1,*}, 何斯日古楞²

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 内蒙古呼和浩特 010021;

2. 呼和浩特民族学院 数学科学学院, 内蒙古呼和浩特 010051;

3. 河套学院 数学与计算机系, 内蒙古巴彦淖尔 015000)

摘要: 将时空有限元方法和混合有限元方法相结合, 构造二维非线性sine-Gordon方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元离散格式, 不同于传统的 H^1 -Galerkin混合有限元方法, 所构造格式在时间和空间方向同时使用有限元离散, 能同时得到时空两个方向的高阶精度, 克服了空间利用有限元离散而时间利用Euler或Crank-Nicolson等差分离散得到的时间精度不够高的不足. 理论分析中给出了数值解的稳定性, 并将传统的 L^2 投影和Ritz投影延拓到时空区域, 给出了时空投影算子的定义, 并讨论了时空投影算子的相关性质, 证明了 u 的时间 L^2 模空间 H^1 模的误差估计和 q 的时间 L^2 模空间 $H(\text{div}, \Omega)$ 模的误差估计. 最后给出数值算例验证了格式的有效性和可行性以及理论分析结果的合理性.

关键词: Sine-Gordon方程; H^1 -Galerkin时空混合有限元方法; 稳定性; 误差估计

中图分类号: O241.82

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2026)01-0082-13

§1 引言

本文考虑非线性sine-Gordon方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t - \gamma \Delta u + \beta \sin u = f(X, t), & (X, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(X, t) = 0, & (X, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), & (X, t) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界域. $X = (x_1, x_2)$, α, β, γ 是正常数, $u_0(X)$ 和 $u_1(X)$ 是已知的光滑函数.

收稿日期: 2023-10-12 修回日期: 2025-10-08

*通讯作者, E-mail: smslh@imu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(12161063; 12561068; 12161034); 内蒙古自然科学基金重点项目(2025ZD036); 内蒙古自治区科技计划(2025KYPT009)

Sine-Gordon方程在非线性数学物理领域中有着广泛应用, 常用来描述晶格位错传播、磁性晶体的Bloch壁运动、沿类脂膜扩张波的传播等, 该方程由于存在多种孤立子解而倍受瞩目. 对其相关数值方法研究工作有很多, [1]讨论了sine-Gordon方程的三次配点法, [2]提出了一个交替方向隐格式, 给出收敛性分析. [3]研究了建立在Padè逼近基础上的隐式差分格式, [4]将一维sine-Gordon方程通过适当变换转化成相应多辛Hamilton偏微分方程, 研究了四阶整体保能量格式. [5]给出了Neumann边界条件下sine-Gordon方程的高效保能量算法, 所提出数值格式不仅保持系统的原始能量, 而且通过离散cosine变换进行高效快速求解. [6]给出格子玻尔兹曼(Lattice Boltzmann)方法, [7]讨论了MQ拟插值法, [8]利用了无网格方法, [9]研究了一类带扰动的sine-Gordon方程的谱方法. 也有很多利用有限元方法研究sine-Gordon数值解的工作, [10, 11]基于Hermit矩形元和双线性元的高精度结果和高阶误差渐近展开式证明了超收敛性质及外推分析, [12]给出了非协调有限元分析的一般格式, [13]提出了改进的移动最小二乘Ritz法.

本文尝试将 H^1 -Galerkin混合有限元法和时空有限元法相结合, 构造sine-Gordon方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元离散格式, 所构造格式既保持了 H^1 -Galerkin混合有限元的优点, 又能得到时空高精度, 目前利用时空混合有限元方法数值求解偏微分方程的工作并不多, [14]和[15]分别构造了Sobolev方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元分裂格式和连续时空混合有限元方法. [16]构造了sine-Gordon方程的时间间断时空有限元格式, 但利用的理论分析手段是将有限元分析与以Radau积分点为节点的Lagrange插值结合. 本文构造的二维非线性sine-Gordon方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元离散格式, 不同于传统的 H^1 -Galerkin混合有限元方法, 所构造格式在时间和空间方向同时使用有限元离散, 能同时得到时空两个方向的高阶精度, 克服了空间利用有限元离散而时间利用Euler或Crank-Nicolson等差分离散得到的时间精度不够高, 和空间精度不匹配等的不足, 同时时空有限元空间可以利用不同次数的多项式空间, 理论分析中将传统的 L^2 投影和Ritz投影延拓到时空区域, 定义时空投影算子, 讨论时空投影算子的相关性质, 证明了 u 的时间 L^2 模空间 H^1 模的误差估计和 q 的时间 L^2 模空间 $H(\operatorname{div}, \Omega)$ 模的误差估计.

§2 H^1 -Galerkin时空混合有限元离散格式

首先引入一些必要的概念和定义. 本文用到的Sobolev空间及范数都是标准的^[17]. $L^2(\Omega)$ 的内积和范数分别用 (\cdot, \cdot) 和 $\|\cdot\|$ 表示. 空间 $W^{s,p}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq s\}$, 相应的范数为 $\|u\|_{s,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$. 当 $p = 2$ 时, 记 $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ 上的内积为 $(u, v)_{H^s} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v)$, 用 $\|\cdot\|_s$ 表示空间 $H^s(\Omega)$ ($s \geq 1$)的范数. 空间 $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$. 记时间区间 $J = (0, T)$, 引入时空Sobolev空间及其相应的范数

$$H^m(J; H^p(\Omega)) = \left\{ v(x, t) \mid \int_J \sum_{i=0}^m \left\| \frac{d^i}{dt^i} v(x, t) \right\|_p^2 dt < \infty \right\},$$

$$\|v\|_{H^m(J; H^p(\Omega))} = \left[\int_J \sum_{i=0}^m \left\| \frac{d^i}{dt^i} v(x, t) \right\|_p^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

特别地, 当 $m = 0, p = 0, 1$ 时, 其相应的范数分别记为

$$\|v\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} = \left[\int_J \|v(x, t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{L^2(J; H^1(\Omega))} = \left[\int_J \|v(x, t)\|_1^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

定义空间

$$V = H_0^1(\Omega), \quad W = H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\tau | \tau \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} \tau \in L^2(\Omega)\},$$

其范数满足 $\|\tau\|_W = (\|\tau\|^2 + \|\operatorname{div} \tau\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

为建立方程(1)的 H^1 -Galerkin 时空混合有限元离散格式, 首先引进辅助变量 $\nabla u = \mathbf{q}$, 则原方程(1)等价于如下一阶系统

$$\begin{cases} \text{(a)} & \nabla u = \mathbf{q}, \\ \text{(b)} & u_{tt} + \alpha u_t - \gamma \nabla \cdot \mathbf{q} + \beta \sin u = f. \end{cases} \quad (2)$$

分别用 $\nabla v (v \in L^2(J; H_0^1(\Omega)))$ 乘以(2)中的(a), $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \in H^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega)))$ 乘以(2)中的(b), 并在时空区域 $\Omega \times J$ 上积分, 可得

$$\begin{cases} \text{(a)} & \int_0^T (\nabla u, \nabla v) dt = \int_0^T (\mathbf{q}, \nabla v) dt, \quad \forall v \in L^2(J; H_0^1(\Omega)), \\ \text{(b)} & \int_0^T [(u_{tt}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \alpha (u_t, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \gamma (\nabla \cdot \mathbf{q}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ & \beta (\sin u, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega})] dt = \int_0^T (f, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) dt, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in H^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega)). \end{cases} \quad (3)$$

对(3)中的(b)运用分部积分和 Lipschitz 边界条件 $u(X, t) = 0$ 整理, 当 $t \in (0, T]$ 时, 得到(2)的变分形式为: 求 $\{u, \mathbf{q}\} : J \mapsto L^2(J; H_0^1(\Omega)) \times H^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega))$ 满足

$$\begin{cases} \text{(a)} & \int_0^t (\nabla u, \nabla v) ds = \int_0^t (\mathbf{q}, \nabla v) ds, \quad \forall v \in L^2(J; H_0^1(\Omega)), \\ \text{(b)} & \int_0^t [(\mathbf{q}_{tt}, \boldsymbol{\omega}) + \alpha (\mathbf{q}_t, \boldsymbol{\omega}) + \gamma (\nabla \cdot \mathbf{q}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ & \beta (\mathbf{q} \cos u, \boldsymbol{\omega})] ds = - \int_0^t (f, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) ds, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in H^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega)). \end{cases} \quad (4)$$

引理2.1 (Gronwall 引理) 设 $g(t), f(t)$ 和 $m(t)$ 是非负函数, 且对 $\forall t \in [0, T]$ 满足

$$f(t) + m(t) \leq C + \int_0^t g f ds,$$

则有

$$f(t) + m(t) \leq C \exp \left(\int_0^t g ds \right).$$

其中 $C \geq 0$. 特别地, 当 $C = 0$ 时, $f(t) = m(t) = 0$.

下面给出问题(4)的存在唯一性证明. 此外, 文中出现的 c 表示正常数, 在不同的地方可能取值不同, 但都与时空网格参数无关.

定理2.1 如果 $f \in L^2(\bar{J}; L^2(\bar{\Omega}))$, 则问题(4)存在唯一解.

证 由于问题(1)存在唯一解^[18], 而问题(1)的解必是(4)的解, 故问题(4)解的存在性已证. 接下来证明解的唯一性. 假设问题(4)存在另外一组解 $(u^*, \mathbf{q}^*) \in L^2(J; H_0^1(\Omega)) \times H^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega))$,

即满足

$$\begin{cases} \text{(a1)} & \int_0^t (\nabla u^*, \nabla v) ds = \int_0^t (\mathbf{q}^*, \nabla v) ds, \quad \forall v \in L^2(J; H_0^1(\Omega)), \\ \text{(b1)} & \int_0^t [(\mathbf{q}_{tt}^*, \boldsymbol{\omega}) + \alpha(\mathbf{q}_t^*, \boldsymbol{\omega}) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{q}^*, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \\ & \beta(\mathbf{q}^* \cos u^*, \boldsymbol{\omega})] ds = - \int_0^t (f, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) ds, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in H^2(J; H(\text{div}, \Omega)). \end{cases} \quad (5)$$

于是由(4)-(5)得

$$\int_0^t (\nabla r, \nabla v) ds = \int_0^t (\mathbf{e}, \nabla v) ds, \quad (6)$$

$$\int_0^t [(\mathbf{e}_{tt}, \boldsymbol{\omega}) + \alpha(\mathbf{e}_t, \boldsymbol{\omega}) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{e}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \beta(\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q}^* \cos u^*, \boldsymbol{\omega})] ds = 0, \quad (7)$$

其中 $(r, \mathbf{e}) = (u - u^*, \mathbf{q} - \mathbf{q}^*)$. 进一步, 在(6)和(7)中分别取 $v = r, \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_t$ 及 $t = t_N$ 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_N} [(\mathbf{e}_{tt}, \mathbf{e}_t) + \alpha(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_t) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{e}, \nabla \cdot \mathbf{e}_t)] dt + \int_0^{t_N} (\nabla r, \nabla r) dt = \\ & \int_0^{t_N} (\mathbf{e}, \nabla r) dt + \beta \int_0^{t_N} (\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q}^* \cos u^*, \mathbf{e}_t) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

注意到 $(\mathbf{e}_{tt}, \mathbf{e}_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{e}_t\|^2$, $(\nabla \cdot \mathbf{e}, \nabla \cdot \mathbf{e}_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \cdot \mathbf{e}\|^2$ 及 $\mathbf{e}_t(0) = \mathbf{e}(0) = 0$, 得

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{e}_t(t_N)\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{e}(t_N)\|^2 + 2 \int_0^{t_N} \|\nabla r\|^2 ds + 2 \int_0^{t_N} \|\mathbf{e}_t\|^2 ds = \\ & 2 \int_0^{t_N} (\mathbf{e}, \nabla r) ds + 2\beta \int_0^{t_N} (\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q}^* \cos u^*, \mathbf{e}_t) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

此外, 注意到 $|\cos u - \cos u^*| \leq |u - u^*|$, 并由 $\cos u$ 的有界性及Hölder及Cauchy不等式得

$$\|\mathbf{e}_t(t_N)\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{e}(t_N)\|^2 + \int_0^{t_N} \|r\|^2 ds + 2 \int_0^{t_N} \|\mathbf{e}_t\|^2 ds \leq c \int_0^{t_N} \|\mathbf{e}_t\|^2 ds. \quad (10)$$

最后由Gronwall引理得

$$\|\mathbf{e}_t(t_N)\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{e}(t_N)\|^2 + \int_0^{t_N} \|r\|^2 ds + 2 \int_0^{t_N} \|\mathbf{e}_t\|^2 ds = 0. \quad (11)$$

由上式可知 $r = 0$. 此外, 由 $\mathbf{e}_t(t_N) = \mathbf{e}_t = 0$ 得 $\mathbf{e} = 0$. 这样就完成了定理2.1的证明.

为了建立问题(1)的 H^1 -Galerkin时空混合有限元离散格式, 还需要对时、空区间进行剖分. 首先剖分时间区间, 设 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, 记此时间剖分为 Γ_k , 剖分单元为 $J_n = [t_{n-1}, t_n]$ ($n = 1, 2, \dots, N$), 时间步长 $k_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots, N$). 且 $k = \max_{1 \leq i \leq N} k_i$. 进一步对空间区间 $\bar{\Omega}$ 进行剖分, 记为 \mathfrak{S}_h , 剖分单元记为 Q , 剖分直径记为 h_Q . 且 $h = \max_{Q \in \mathfrak{S}_h} h_Q$. 用 $V_{hm}(\Omega) \subset V$, 和 $W_{hm}(\Omega) \subset W$, 分别表示由定义在区间 $\bar{\Omega}$ 的剖分 \mathfrak{S}_h 上的 m 次分片连续多项式函数组成的空间, 即

$$V_{hm}(\Omega) = \{v_h \in V : v_h|_Q \in P_m(Q), \quad \forall Q \in \mathfrak{S}_h\},$$

$$W_{hm}(\Omega) = \{\boldsymbol{\omega}_h \in W : \boldsymbol{\omega}_h|_Q \in (P_m(Q))^2, \quad \forall Q \in \mathfrak{S}_h\},$$

其中 $P_m(Q)$ 表示关于空间变量的次数不超过 m 的多项式空间.

用 $V_{kl}([0, T])$ 和 $W_{kl}([0, T])$ 分别表示由定义在 \bar{J} 上的关于时间变量 t 的次数不超过 l 的分段多

项式组成的空间, 即

$$V_{kl}([0, T]) = \{v_k \in H^1(J) | v_k|_{J_n} \in P_l(J_n), \quad \forall J_n \in \Gamma_k\},$$

$$W_{kl}([0, T]) = \{\omega_k \in H^2(J) | \omega_k|_{J_n} \in P_l(J_n), \quad \forall J_n \in \Gamma_k\},$$

其中 $P_l(J_n)$ 表示 J_n 上的关于时间变量 t 的次数不超过 l 的多项式空间.

定义空间 $V_{hk} = V_{hm}(\Omega) \otimes V_{kl}([0, T])$, $W_{hk} = W_{hm}(\Omega) \otimes W_{kl}([0, T])$. 令时空片 $S_h^n = \Omega \times J_n$, V_{kl}^n , W_{kl}^n 分别表示 V_{kl} , W_{kl} 在每个时空片 S_h^n 上的关于时间变量 t 的分段多项式组成的空间. 在此基础上, 记 $V_{hk}^n = V_{hm} \otimes V_{kl}^n$, $W_{hk}^n = W_{hm} \otimes W_{kl}^n$, 即 V_{hk}^n , W_{hk}^n 为每个时空片 S_h^n 上的时空近似多项式空间.

相应于(4)的 H^1 -Galerkin 时空混合有限元离散格式为: 求 $\{u^{hk}, \mathbf{q}^{hk}\}: [t_{n-1}, t_n] \rightarrow V_{hk}^n \times W_{hk}^n$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \int_{J_n} (\nabla u^{hk}, \nabla v^{hk}) dt = \int_{J_n} (\mathbf{q}^{hk}, \nabla v^{hk}) dt, \quad \forall v^{hk} \in V_{hk}^n, \\ \text{(b)} \quad \int_{J_n} [(\mathbf{q}_{tt}^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \alpha(\mathbf{q}_t^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \\ \quad \beta(\mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk})] dt = - \int_{J_n} (f, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{hk}) dt, \quad \forall \boldsymbol{\omega}^{hk} \in W_{hk}^n. \end{array} \right. \quad (12)$$

对(12)两边从1到 N 求和, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \int_0^T (\nabla u^{hk}, \nabla v^{hk}) dt = \int_0^T (\mathbf{q}^{hk}, \nabla v^{hk}) dt, \quad \forall v^{hk} \in V_{hk}, \\ \text{(b)} \quad \int_0^T [(\mathbf{q}_{tt}^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \alpha(\mathbf{q}_t^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{hk}) + \\ \quad \beta(\mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \boldsymbol{\omega}^{hk})] dt = - \int_0^T (f, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^{hk}) dt, \quad \forall \boldsymbol{\omega}^{hk} \in W_{hk}. \end{array} \right. \quad (13)$$

§3 数值解的稳定性

定理3.1 如果 $f \in L^2(\bar{J}; L^2(\bar{\Omega}))$, 则 $\{u^{hk}, \mathbf{q}^{hk}\}$ 有如下稳定性

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u^{hk}\|^2 dt &\leq c(\|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \|f(0)\|^2 + \|f(t_N)\|^2 + \int_0^T \|f_t\|^2 dt), \\ \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}\|^2 dt &\leq \\ &c(\|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \|f(t_N)\|^2 + \|f(0)\|^2 + \int_0^T \|f_t\|^2 dt). \end{aligned}$$

证 在(12)中的(b)中, 选取 $\boldsymbol{\omega}^{hk} = \mathbf{q}_t^{hk}$ 得

$$\begin{aligned} \int_{J_n} [(\mathbf{q}_{tt}^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk}) + \alpha(\mathbf{q}_t^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk}) + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}, \nabla \cdot \mathbf{q}_t^{hk}) + \beta(\mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk})] dt = \\ - \int_{J_n} (f, \nabla \cdot \mathbf{q}_t^{hk}) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

由 $(\mathbf{q}_{tt}^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2$ 整理得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_n)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_n)\|^2 + \alpha \int_{J_n} \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt = \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_{n-1})\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_{n-1})\|^2 - \beta \int_{J_n} (\mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk}) dt + \\ & (f(t_{n-1}), \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_{n-1})) - (f(t_n), \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_n)) + \int_{J_n} (f_t, \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

对上式从1到 N 求和可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt = \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 - \beta \int_0^T (\mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \mathbf{q}_t^{hk}) dt + \\ & (f(0), \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)) - (f(t_N), \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)) + \int_0^T (f_t, \nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

由 $\cos u^{hk}$ 的有界性及Cauchy不等式可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt \leq \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + c \int_0^T \|\mathbf{q}^{hk}\| \|\mathbf{q}_t^{hk}\| dt + \\ & \|f(0)\| \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\| + \|f(t_N)\| \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\| + \int_0^T \|f_t\| \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}\| dt, \end{aligned} \quad (17)$$

再由Young不等式可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt \leq \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + c \int_0^T \|\mathbf{q}^{hk}\|^2 dt + \\ & \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt + \frac{1}{2} \|f(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + c \|f(t_N)\|^2 + \\ & \frac{\gamma}{4} \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|f_t\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}\|^2 dt, \end{aligned} \quad (18)$$

将上式整理得

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_N)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 \leq \\ & \int_0^T \|\mathbf{q}^{hk}\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}\|^2 dt + c(\|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \\ & \|f(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \|f(t_N)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 + \int_0^T \|f_t\|^2 dt). \end{aligned} \quad (19)$$

由于 $\|\mathbf{q}^{hk}(t)\| \leq c \int_0^t \|\mathbf{q}_t^{hk}(s)\| ds$, 对上式使用Gronwall引理, 经整理可得

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{q}_t^{hk}(t_N)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(t_N)\|^2 \leq \\ & c(\|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \|f(0)\|^2 + \|f(t_N)\|^2 + \int_0^T \|f_t\|^2 dt). \end{aligned} \quad (20)$$

在(12)中的(a)中, 选取 $v^{hk} = u^{hk}$, 运用Cauchy不等式得

$$\int_{J_n} \|\nabla u^{hk}\|^2 dt \leq \int_{J_n} \|\mathbf{q}^{hk}\|^2 dt. \quad (21)$$

可知

$$\int_0^T \|u^{hk}\|^2 dt \leq \int_0^T c \|\nabla u^{hk}\|^2 dt \leq \int_0^T \|\mathbf{q}^{hk}\|^2 dt \leq \int_0^T \|\mathbf{q}_t^{hk}\|^2 dt, \quad (22)$$

结合(20)可得

$$\int_0^T \|u^{hk}\|^2 dt \leq c(\|\mathbf{q}_t^{hk}(0)\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}^{hk}(0)\|^2 + \|f(0)\|^2 + \|f(t_N)\|^2 + \int_0^T \|f_t\|^2 dt). \quad (23)$$

由(20)和(23)可得结论.

§4 数值解的误差估计

为了研究 $\{u^{hk}, \mathbf{q}^{hk}\}$ 的误差估计, 引入一些相关时空投影及其性质. 首先定义函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 的Ritz投影算子 $P_x^u \in V_{hm}(\Omega)$, 满足

$$(\nabla u, \nabla \psi) = (\nabla P_x^u, \nabla \psi), \quad \forall \psi \in V_{hm}(\Omega). \quad (24)$$

如果 $u \in L^2(\Omega) \cap H^r(\Omega)$, 则存在与空间剖分步长 h 无关的正常数 c , 满足

$$\|\nabla P_x^u\| \leq \|\nabla u\|, \quad (25)$$

$$\|u - P_x^u\|_s \leq ch^{r-s} \|u\|_r, \quad (26)$$

其中 $1 \leq r \leq m+1$.

此算子可在 L^2 意义下延拓到时空投影 $P_x^u : L^2(J; H^1(\Omega)) \rightarrow V_{hk}^n$, 即

$$\int_0^T (\nabla(u - P_x^u), \nabla \psi) dt = 0, \quad \psi \in V_{hk}^n. \quad (27)$$

类似地, 定义函数 $u \in H^1(J)$ 的关于时间 t 的投影算子 $P_t^u \in V_{kl}^n$, 满足

$$\int_0^T (u - P_t^u)_t \varphi_t dt = 0, \quad \varphi \in V_{kl}^n. \quad (28)$$

由标准有限元理论可知^[14, 17, 20, 21], 存在与时间步长 k 无关的正常数 c , 使得

$$\|P_t^u\|_{H^1(J)} \leq \|u\|_{H^1(J)}, \quad (29)$$

$$\|u - P_t^u\|_{H^s(J)} \leq ck^{r-s} \|u\|_{H^r(J)}, \quad (30)$$

其中 $1 \leq r \leq l+1$, 并且满足初值条件 $P_t^u(\cdot, 0) = u(\cdot, 0)$.

此算子可在 L^2 意义下延拓到时空投影 $P_t^u : H^1(J; L^2(\Omega)) \rightarrow V_{hk}^n$, 即

$$\int_0^T (\nabla(u - P_t^u)_t, \nabla \varphi_t) dt = 0, \quad \varphi \in V_{hk}^n. \quad (31)$$

引理4.1 如果 $u \in H^2(J; L^2(\Omega)) \cap L^2(J; H^2(\Omega))$ 则有

$$(a) (\nabla P_x^u)_t = \nabla(P_x^u)_t, \quad (b) \nabla(P_t^u)_t = (P_t^u \nabla u)_t, \quad (c) \nabla P_x^u P_t^u u_t = P_t^u \nabla P_x^u u_t. \quad (32)$$

证 设 $\psi \in V_{hk}^n$, 且满足 $\psi(\cdot, 0) = \psi(\cdot, T) = 0$. 由于

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nabla P_x^u u_t, \nabla \psi) dt &= \int_0^T (\nabla u_t, \nabla \psi) dt = - \int_0^T (\nabla u, \nabla \psi_t) dt = \\ &= - \int_0^T (\nabla P_x^u u, \nabla \psi_t) dt = \int_0^T ((\nabla P_x^u)_t, \nabla \psi) dt, \end{aligned}$$

所以 $(\nabla P_x^u)_t = \nabla(P_x^u)_t$. 于是(32)的(a)得证. 同理对 $\forall \varphi \in (V_{kl}^n)^2$ 有

$$\begin{aligned} \int_0^T ((P_t^u \nabla u)_t, \varphi_t) dt &= \int_0^T (\nabla u_t, \varphi_t) dt = - \int_0^T (u_t, \nabla \cdot \varphi_t) dt = \\ &= - \int_0^T (P_t^u u_t, \nabla \cdot \varphi_t) dt = \int_0^T (\nabla P_t^u u_t, \varphi_t) dt. \end{aligned}$$

由此可得(32)的(b).

由 P_t^u 的定义和 P_x^u 的定义及(32)的(b), 有

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nabla(P_x^u P_t^u u_t), \nabla\varphi_t) dt &= \int_0^T (\nabla(P_t^u u_t), \nabla\varphi_t) dt = \int_0^T (P_t^u \nabla u_t, \nabla\varphi_t) dt = \\ \int_0^T (\nabla u_t, \nabla\varphi_t) dt &= \int_0^T (\nabla P_x^u u_t, \nabla\varphi_t) dt = \int_0^T (P_t^u \nabla P_x^u u_t, \nabla\varphi_t) dt. \end{aligned}$$

由此可得(32)的(c).

进一步地, 注意到 $\|u - P_x^u P_t^u u\| \leq \|u - P_x^u u\| + \|P_x^u(u - P_t^u u)\|$, 并利用(26)和(32), 有如下估计.

引理4.2 如果 $v \in H^r(J; H^{m+1}(\Omega)) \cap H^{l+1}(J; H^s(\Omega))$, 则

$$\|(v - P_x^u P_t^u v)\|_{H^r(J; H^s(\Omega))} \leq c(h^{m+1-s} \|v\|_{H^r(J; H^{m+1}(\Omega))} + k^{l+1-r} \|v\|_{H^{l+1}(J; H^s(\Omega))}). \quad (33)$$

再定义函数 $\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ 的 L^2 投影算子 $P_x^q \mathbf{q} \in W_{hm}$, 满足

$$(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}) = (P_x^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in W_{hm}. \quad (34)$$

同样地, 此算子可在 L^2 意义下延拓到时空投影 $P_x^q : L^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega)) \rightarrow W_{hk}^n$, 即

$$\int_0^T ((\mathbf{q} - P_x^q \mathbf{q}), \boldsymbol{\psi}) dt = 0, \quad \boldsymbol{\psi} \in W_{hk}^n. \quad (35)$$

定义函数 $\mathbf{q} \in L^2(J)$ 的关于时间 t 的投影算子 $P_t^q \mathbf{q} \in W_{kl}^n$, 满足

$$\int_0^T (\mathbf{q} - P_t^q \mathbf{q}) \boldsymbol{\varphi} dt = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in W_{kl}^n. \quad (36)$$

此算子可延拓到时空投影 $P_t^q : L^2(J; H(\operatorname{div}, \Omega)) \rightarrow W_{hk}^n$

$$\int_0^T ((\mathbf{q} - P_t^q \mathbf{q}), \boldsymbol{\varphi}) dt = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in W_{hk}^n. \quad (37)$$

由标准有限元理论^[14, 17, 20, 21]可知

$$\|P_x^q \mathbf{q}\| \leq c \|\mathbf{q}\|, \quad \|P_t^q \mathbf{q}\|_{L^2(J)} \leq c \|\mathbf{q}\|_{L^2(J)}, \quad (38)$$

及

$$\|\mathbf{q} - P_x^q \mathbf{q}\|_s \leq ch^{r-s} \|\mathbf{q}\|_r, \quad \|\mathbf{q} - P_t^q \mathbf{q}\|_{H^s(J)} \leq ck^{p-s} \|u\|_{H^p(J)}, \quad (39)$$

其中 $1 \leq r \leq m+1$, $1 \leq p \leq l+1$.

类似于引理1和引理2的讨论, 对引入的投影 P_t^q 和 P_x^q , 有如下性质.

引理4.3 如果 $\mathbf{q} \in H^1(J; H(\operatorname{div}, \Omega)) \cap L^2(J; (H^1(\Omega))^2)$ 则有

$$(a) (P_x^q \mathbf{q})_t = P_x^q \mathbf{q}_t, \quad (b) \nabla \cdot (P_t^q \mathbf{q}) = (P_t^q \nabla \cdot \mathbf{q}), \quad (c) P_x^q P_t^q \mathbf{q} = P_t^q P_x^q \mathbf{q}. \quad (40)$$

证 可知

$$\int_0^T (P_x^q \mathbf{q}_t, \boldsymbol{\psi}) dt = \int_0^T (\mathbf{q}_t, \boldsymbol{\psi}) dt = - \int_0^T (\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_t) dt = - \int_0^T (P_x^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_t) dt = \int_0^T ((P_x^q \mathbf{q})_t, \boldsymbol{\psi}) dt,$$

所以 $(P_x^q \mathbf{q})_t = P_x^q \mathbf{q}_t$. 于是(40)的(a)得证. 同理

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nabla \cdot P_t^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt &= - \int_0^T (P_t^q \mathbf{q}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) dt = - \int_0^T (\mathbf{q}, \nabla \boldsymbol{\varphi}) dt = \\ &= - \int_0^T (\nabla \cdot \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt = - \int_0^T (P_t^q \nabla \cdot \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt. \end{aligned}$$

由此可得(40)的(b). 由 P_t^q 的定义和 P_x^q 的定义及(40)的(b), 有

$$\int_0^T (P_t^q P_x^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt = \int_0^T (P_x^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt = \int_0^T (\mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt = \int_0^T (P_t^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt = \int_0^T (P_x^q P_t^q \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}) dt.$$

由此可得(40)的(c).

引理4.4 如果 $\omega \in H^r(J; [H^{m+1}(\Omega)]^2) \cap H^{l+1}(J; [H^s(\Omega)]^2)$, 则

$$\|\omega - P_x^q P_t^q \omega\|_{H^r(J; [H^s(\Omega)]^2)} \leq c(h^{m+1-s} \|\omega\|_{H^r(J; [H^{m+1}(\Omega)]^2)} + k^{l+1-r} \|\omega\|_{H^{l+1}(J; [H^s(\Omega)]^2)}). \quad (41)$$

为证明 H^1 -Galerkin时空混合有限元解的误差估计, 将误差改写为下面形式, 记

$$u - u^{hk} = (u - P_x^u P_t^u u) + (P_x^u P_t^u u - u^{hk}) = \eta + \zeta, \quad (42)$$

$$\mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk} = (\mathbf{q} - P_x^q P_t^q \mathbf{q}) + (P_x^q P_t^q \mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk}) = \rho + \xi. \quad (43)$$

可得误差方程

$$\begin{cases} \text{(a)} & \int_{J_n} (\nabla \eta, \nabla v^{hk}) dt + \int_{J_n} (\nabla \zeta, \nabla v^{hk}) dt = \int_{J_n} (\rho, \nabla v^{hk}) dt + \int_{J_n} (\xi, \nabla v^{hk}) dt, \\ \text{(b)} & \int_{J_n} [(\rho_{tt}, \omega^{hk}) + (\xi_{tt}, \omega^{hk}) + \alpha(\rho_t, \omega^{hk}) + \alpha(\xi_t, \omega^{hk}) + \gamma(\nabla \cdot \rho, \nabla \cdot \omega^{hk})] dt + \\ & \int_{J_n} [\gamma(\nabla \cdot \xi, \nabla \cdot \omega^{hk}) + \beta(\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \omega^{hk})] dt = 0. \end{cases} \quad (44)$$

定理4.1 设 $\{u, \mathbf{q}\}$ 和 $\{u^{hk}, \mathbf{q}^{hk}\}$ 分别为(4)和(12)的解. 假设 $\{u, \mathbf{q}\}$ 足够光滑, 空间 Ω 是正则空间, 且 $P_x^u P_t^u u(0) = u^{hk}(0)$, $P_x^q P_t^q \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^{hk}(0)$, 则存在与 h 和 k 无关的常数 $c > 0$ 成立如下估计.

$$\|u - u^{hk}\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} \leq c(h^m (\|u\|_{L^2(J; H^{m+1}(\Omega))} + \|\mathbf{q}\|_{H^2(J; [H^{m+1}(\Omega)]^2)}) + k^{l-1} (\|u\|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} + \|\mathbf{q}\|_{H^{l+1}(J; [H^1(\Omega)]^2)}), \quad (45)$$

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk}\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} + \|\nabla \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk})\|_{L^2(J; L^2(\Omega))} \leq c(h^m (\|u\|_{L^2(J; H^{m+1}(\Omega))} + \|\mathbf{q}\|_{H^2(J; [H^{m+1}(\Omega)]^2)}) + k^{l-1} (\|u\|_{H^{l+1}(J; H^1(\Omega))} + \|\mathbf{q}\|_{H^{l+1}(J; [H^1(\Omega)]^2)}). \quad (46)$$

证 在(44)中的(a), 令 $v^{hk} = \zeta$, 可得

$$\int_{J_n} \|\nabla \zeta\|^2 dt = - \int_{J_n} (\nabla \eta, \nabla \zeta) dt + \int_{J_n} (\rho, \nabla \zeta) dt + \int_{J_n} (\xi, \nabla \zeta) dt, \quad (47)$$

对上式运用Cauchy不等式, 并简化可得

$$\int_{J_n} \|\nabla \zeta\|^2 dt \leq c(\int_{J_n} \|\nabla \eta\|^2 dt + \int_{J_n} \|\rho\|^2 dt + \int_{J_n} \|\xi\|^2 dt). \quad (48)$$

在(44)中的(b), 令 $\omega^{hk} = \xi_t$, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|\xi_t\|^2 dt + \frac{\gamma}{2} \int_{J_n} \frac{d}{dt} \|\nabla \cdot \xi\|^2 dt + \alpha \int_{J_n} \|\xi_t\|^2 dt = \\ & \int_{J_n} [- (\rho_{tt}, \xi_t) - \alpha(\rho_t, \xi_t) - \gamma(\nabla \cdot \rho, \nabla \cdot \xi_t) - \beta(\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \xi_t)] dt = \\ & - \int_{J_n} (\rho_{tt}, \xi_t) dt - \alpha \int_{J_n} (\rho_t, \xi_t) dt - \gamma(\nabla \cdot \rho, \nabla \cdot \xi)|_{t_{n-1}}^{t_n} + \int_{J_n} \gamma(\nabla \cdot \rho_t, \nabla \cdot \xi) dt - \\ & \beta \int_{J_n} (\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q} \cos u^{hk} + \mathbf{q} \cos u^{hk} - \mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \xi_t) dt, \end{aligned} \quad (49)$$

对上式由1到 N 求和整理得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\xi_t(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \xi(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\xi_t\|^2 dt = \\ & - \int_0^T (\rho_{tt}, \xi_t) dt - \alpha \int_0^T (\rho_t, \xi_t) dt - \gamma(\nabla \cdot \rho(t_N), \nabla \cdot \xi(t_N)) + \\ & \gamma(\nabla \cdot \rho(0), \nabla \cdot \xi(0)) + \int_0^T \gamma(\nabla \cdot \rho_t, \nabla \cdot \xi) dt + \frac{1}{2} \|\xi_t(0)\|^2 + \\ & \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \xi(0)\|^2 - \beta \int_0^T (\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q} \cos u^{hk} + \mathbf{q} \cos u^{hk} - \mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \xi_t) dt, \end{aligned} \quad (50)$$

其中

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (\mathbf{q} \cos u - \mathbf{q} \cos u^{hk} + \mathbf{q} \cos u^{hk} - \mathbf{q}^{hk} \cos u^{hk}, \boldsymbol{\xi}_t) dt \leq \\
& \int_0^T (\mathbf{q}(\cos u - \cos u^{hk}), \boldsymbol{\xi}_t) + ((\mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk}) \cos u^{hk}, \boldsymbol{\xi}_t) dt \leq \\
& c \int_0^T \|u - u^{hk}\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{hk}\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt \leq \\
& c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + c \int_0^T \|\zeta\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{51}$$

对(50)运用Cauchy不等式并结合(51)有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\xi}_t(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}(t_N)\|^2 + \alpha \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_{tt}\|^2 dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + c \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}(t_N)\|^2 + \\
& \frac{\gamma}{4} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}(t_N)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}\|^2 dt + c \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \\
& c \int_0^T \|\zeta\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\boldsymbol{\xi}\|^2 dt,
\end{aligned} \tag{52}$$

代入(48)整理, 再结合 $\|\boldsymbol{\xi}(t)\| \leq c \int_0^t \|\boldsymbol{\xi}_t(s)\| ds$ 可得

$$\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{\xi}_t(t_N)\|^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}(t_N)\|^2 \leq c \left(\int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_{tt}\|^2 dt + \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}(t_N)\|^2 + \right. \\
& \left. \int_0^T \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}\|^2 dt + \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \right. \\
& \left. \int_0^T \|\nabla \eta\|^2 dt \right) + c \left(\int_0^T \|\boldsymbol{\xi}_t\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}\|^2 dt \right),
\end{aligned} \tag{53}$$

则由Gronwall引理可得

$$\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{\xi}_t(t_N)\|^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}(t_N)\|^2 \leq c \left(\int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_{tt}\|^2 dt + \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}(t_N)\|^2 + \right. \\
& \left. \int_0^T \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}_t\|^2 dt + \int_0^T \|\boldsymbol{\rho}\|^2 dt + \int_0^T \|\eta\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla \eta\|^2 dt \right),
\end{aligned} \tag{54}$$

可得

$$\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{\xi}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 \leq \\
& c \left(\|\boldsymbol{\rho}_{tt}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\boldsymbol{\rho}_t\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}_t\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \right. \\
& \left. \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\eta\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned} \tag{55}$$

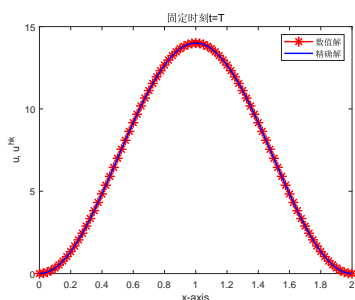
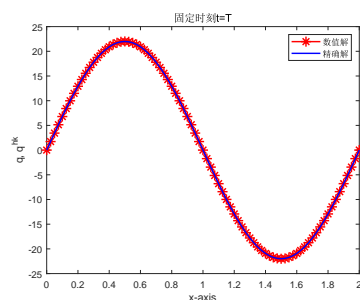
由(55), 结合(48)可得

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \zeta\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 \leq \\
& c \left(\|\boldsymbol{\rho}_{tt}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\boldsymbol{\rho}_t\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}_t\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \right. \\
& \left. \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\eta\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \eta\|_{L^2(J;L^2(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned} \tag{56}$$

将(56)和(55)分别与(33)和(41)结合, 并利用三角不等式, 得到定理结论.

§5 数值算例

下面验证本文构造的 H^1 -Galerkin时空混合有限元格式的有效性和可行性, 以及理论分析结果的合理性. 设空间区间 $\bar{\Omega} = [0, 2]$, 时间区间 $\bar{J} = [0, 2]$, $f(x, t) = (3+2t)(1-\cos(\pi x)) - \pi^2(1+t +$

图1 二次基函数, u 和 u^{hk} 的对比图2 二次基函数, q 和 q^{hk} 的对比

$t^2) \cos(\pi x) + 2 \sin((1+t+t^2)(1-\cos(\pi x)))$, 精确解为 $u(x, t) = (1+t+t^2)(1-\cos(\pi x))$ 和 $q(x, t) = \pi(1+t+t^2) \sin(\pi x)$ 的非线性sine-Gordon方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - u_{xx} + \sin u = f(x, t), & x \in [0, 2], t \in (0, 2], \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, & t \in [0, 2], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, 2]. \end{cases} \quad (57)$$

本文所构造格式统一时间和空间变量, 将一维问题(1)当作时间变量 t 和空间变量 x 的二维问题来处理. 将二维区域 $[0, 2] \times [0, 2]$ 剖分成 $m \times n$ 个矩形单元. 时间和空间方向采用二次多项式作为基函数, 数值求解问题(1).

表1 二次基函数, $t = T$ 时刻的误差和收敛阶

$k(h = 2k)$	$\ q - q^{hk}\ _a$	收敛阶	$\ u - u^{hk}\ _a$	收敛阶
1/10	3.7419e-01		8.1828e-02	
1/20	4.6988e-02	2.9939	7.8585e-03	3.38026
1/30	1.4734e-02	2.8603	2.5617e-03	2.76454
1/40	6.6516e-03	2.7645	1.1649e-03	2.73920

表1中出现的 $\|\cdot\|_a$ 为 $\|\cdot\|_{L^2(I)}$. 取二次基函数和 $h = 2k$ 时分析 $\|q - q^{hk}\|_{L^2(I)}$ 和 $\|u - u^{hk}\|_{L^2(I)}$ 的误差和收敛阶. 从表中数据可以看出, 两项误差的收敛阶均接近三阶收敛. 图1和图2分别给出时空二次基函数并取步长 $h = \frac{1}{40}$, $k = \frac{1}{40}$ 时真解 u , q 和数值解 u^{hk} , q^{hk} 的对比图. 实验数据说明本文所提出时空格式能够有效求解非线性sine-Gordon方程, 且理论分析结果合理.

§6 结束语

本文研究了二维非线性sine-Gordon方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元方法. 通过引进辅助变量 $\mathbf{q} = \nabla u$, 构造了 H^1 -Galerkin时空混合有限元格式, 可以得到时空高阶精度. 通过时空统一处理并引入时空投影算子, 来证明误差分析的理论. 讨论了 H^1 -Galerkin时空混合有限元解的稳定性以及误差估计. 进一步通过数值结果可以看出格式的有效性和可行性以及理论分析结果的合理性. 因此, 该研究的思想可以推广到其他形式.

参考文献:

- [1] 李宏, 黄春霞, 何斯日古楞, 等. Sine-Gordon方程的三次配点法[J]. 工程数学学报, 2014, 31(2): 254-266.
- [2] 许秋滨, 张鲁明. 二维广义非线性sine-Gordon方程的一个ADI格式[J]. 应用数学学报, 2007(5): 836-846.
- [3] Martin-Vergara F, Rus F, Villatoro F R. Padé numerical schemes for the sine-Gordon equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 358: 232-243.
- [4] 郭钰卓, 孙建强, 孔嘉萌. 多辛sine-Gordon方程高阶保能量格式[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2019, 43(4): 343-347.
- [5] Hong Qi, Wang Yushun, Gong Yuezheng. Efficient energy-preserving numerical approximations for the sine-Gordon equation with Neumann boundary conditions[Z]. arXiv preprint arXiv: 2004. 10970, 2020.
- [6] Lai Hulin, Ma Changfeng. An implicit scheme of lattice Boltzmann method for sine-Gordon equation[J]. Chinese Physics Letters, 2008, 25(6): 2118-2121.
- [7] Ma Limin, Wu Zongmin. A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using multiquadric quasi-interpolation[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(8): 3099-3103.
- [8] Hashemi M S. Numerical study of the one-dimensional coupled nonlinear sine-Gordon equations by a novel geometric meshless method[J]. Engineering with Computers, 2021, 37(4): 3397-3407.
- [9] Guo Boling, Wu Xionghua. The spectral method for a perturbed sine-Gordon equation[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1994, 11(2): 161-168.
- [10] 王芬玲, 石东洋. 非线性sine-Gordon方程Hermite型有限元新的超收敛分析及外推[J]. 应用数学学报, 2012, 35(5): 777-788.
- [11] 樊明智, 王芬玲, 石东洋. 非线性sine-Gordon方程的双线性元分析及外推[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(11): 205-213.
- [12] 石东洋, 张斐然. Sine-Gordon方程的一类低阶非协调有限元分析[J]. 计算数学, 2011, 33(3): 289-297.
- [13] Wei Qi, Cheng Rongjun. The improved moving least-square Ritz method for the one-dimensional sine-Gordon equation[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 862915.
- [14] 常晓慧, 李宏, 何斯日古楞. Sobolev方程的 H^1 -Galerkin时空混合有限元分裂格式[J]. 高校应用数学学报, 2020, 35(4): 470-486.
- [15] Shi Dongyang, Wang Fenling, Zhao Yanmin. High accuracy analysis of the lowest order H^1 -Galerkin mixed finite element method for nonlinear sine-Gordon equations[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2017, 33(3): 699-708.

- [16] 陈娟. 双曲类方程时间间断Galerkin TSFE方法[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2020.
- [17] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [18] 张建文, 王旦霞, 吴润衡. 一类广义强阻尼方程的整体解[J]. 物理学报, 2008, 57(4): 1-5.
- [19] 庞乃虹, 李宏. Sobolev方程的混合连续时空有限元解的误差估计[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(8): 834-843.
- [20] 赵智慧. 发展型方程的连续时空有限元方法及其数值模拟[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2017.
- [21] Aziz A K, Monk P. Continuous finite elements in space and time for the heat equation[J]. Mathematics of Computation, 1989, 52(186): 255-274.

H^1 -Galerkin space-time mixed finite element method for nonlinear sine-Gordon equation

WANG Chun-yuan^{1,3}, LI Hong¹, HE Siriguleng²

(1. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China;

2. School of Mathematical Sciences, Hohhot Minzu College, Hohhot 010051, China;

3. Department of Mathematics and Computer Science, Hetao College, Bayannur 015000, China)

Abstract: This method combine the space-time finite element method with the mixed finite element method. The H^1 -Galerkin space-time mixed finite element scheme for the two-dimensional nonlinear sine-Gordon equation is constructed. The scheme unlike the traditional H^1 -Galerkin mixed finite element method. The constructed scheme uses finite element discretization in both time and space directions, which can obtain high order accuracy both in space-time. In theoretical analysis the traditional L^2 projection and Rize projection are extended to the space-time region. The space-time projection operator is defined. The relevant properties of the space-time projection operator are discussed. The stability of the numerical solutions is established. The error estimation results of the time L^2 norm space H^1 norm of u and the time L^2 norm space $H(\text{div}, \Omega)$ norm of \mathbf{q} are proved. Finally, numerical examples are provided to verify the effectiveness and feasibility of the format, as well as the rationality of the theoretical results.

Keywords: Sine-Gordon equation; H^1 -Galerkin space-time mixed finite element method; stability; error estimates

MR Subject Classification: 65M60