高校应用数学学报
2026, 41(1): 65-74

具有指数临界增长的非齐次Schrödinger方程的正规化基态解

张小藏， 许丽萍*

(河南科技大学 数学与统计学院，河南洛阳 471023)

摘 要: 文中研究了非齐次Schrödinger方程

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\lambda u=f(u)+h(x),\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^2, \\ \int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x=c \end{cases}$$

的正规化基态解. 其中$c>0$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $V(x)=\omega|x|^2$是阱位势, $\omega>0$是阱位频率, f满足指数临界增长, h是扰动. 当非线性项f和扰动项h满足一定条件时, 该文可以得到该方程正规化的基态解. 这些解依赖于阱位频率ω和质量c, 并且是轨道稳定的具有正能量的正解. 另外, 文中还分析了当$c\to 0$时解的渐进性质. 这些研究推广了已有文献中的相关结果.

关键词: Schrödinger方程; 扰动; 正规化基态解; 指数临界增长

中图分类号: O175.29

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2026)01-0065-10

§1 引 言

考虑与时间有关的Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi-V(x)\psi+g(|\psi|^2)\psi+h(x)=0,\ x\in\mathbf{R}^2, \tag{1}$$

其中i表示虚数单位, $\psi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{C}$表示复标量场, $V(x)$是阱位势, g表示非线性项, h是一个扰动. 当考虑形如$\psi(t,x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}u(x)$的驻波解时, 这里$\lambda\in\mathbf{R}$, 那么$u$满足方程

$$-\Delta u+V(x)u+\lambda u=f(u)+h(x),\ x\in\mathbf{R}^2, \tag{2}$$

其中$f(u)=g(|u|^2)u$.

问题(2)是一个源于物理学的非齐次Schrödinger方程, 具有广泛的物理应用, 它可以用来描述量子力学中粒子在非齐次势场中的运动, 以及揭示势场对粒子运动和能量的影响. 文献[1]介绍了具有位势的非齐次Schrödinger方程的物理意义, 提供了对量子力学基本概念和数学工具的

收稿日期: 2024-04-08　　修回日期: 2024-08-26
*通讯作者, E-mail: x.liping@126.com
基金项目: 国家自然科学基金(11671403; 11671236); 河南省自然科学基金(232300420113)

全面介绍, 并且讨论了非齐次势场中的粒子行为和能谱性质. 文献[2]讨论了具有位势的非齐次Schrödinger方程在纳米材料中的物理意义, 包括能带结构、载流子传输和光学性质等方面. 关于进一步的物理应用, 参见文献[3-4].

当λ作为一个固定参数出现, 特别是当$\lambda=1$时, 许多学者研究了带扰动项的Schrödinger方程非平凡解的存在性和多重性. 例如, 文献[5]研究了椭圆方程

$$\begin{cases}-\Delta u+u=k(x)f(u)+h(x),\ x\in\mathbf{R}^N,\\ u\in H^1(\mathbf{R}^N),\ u>0,\ N\geqslant 3,\end{cases}$$

通过对k, h和f进行合理的假设, 文献[5]证明了方程至少有两个正解. 随后, 文献[6]研究了分数阶的带扰动项的Schrödinger方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+u=k(x)f(u)+h(x),\ x\in\mathbf{R}^N,\\ u\in H^s(\mathbf{R}^N),\ u>0,\end{cases}$$

其中$s\in(0,1)$, $N>2s$, $(-\Delta)^s$是分数阶Laplacian算子, k是一个有界的正函数, $h\in L^2(\mathbf{R}^N)$, $h\geqslant 0$, $h\not\equiv 0$, f是非线性项, 当$|h|_2$足够小时, 他们通过s调和延拓技术和变分方法证明了上述方程至少有两个正解. 关于更多此类研究, 参见文献[7-8].

然而, 物理学家更关心的是当参数λ不再固定, 作为Lagrange乘子出现时的情况. 确切地说, 对于给定的$c>0$, 需要找到满足约束条件$\|u\|_2^2=c$的Schrödinger方程的解(u,λ), 这种解通常被称为正规化解, 其存在性获得了许多研究, 例如, 文献[9]研究了

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+g(u),\ x\in\mathbf{R}^N,\\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=a\end{cases}$$

的正规化解的存在性. 此外, 文献[10]研究了非线性Schrödinger方程

$$\begin{cases}-\Delta u+\lambda u=f(u),\ x\in\mathbf{R}^2,\\ u\in H^1(\mathbf{R}^2),\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}u^2\mathrm{d}x=\rho,\end{cases}$$

其中$\rho>0$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 文献[10]通过约束极小化方法和Trudinger-Moser不等式证明了上述方程存在正规化基态解. 关于正规化解的更多研究, 可以参见文献[11-12].

一些文献还研究了带有位势$V(x)$的Schrödinger方程正规化解的存在性, 例如, 文献[13]研究了在一般的阱位势下非线性Schrödinger方程的基态. 近年来, 在对$V(x)$的合理假设下, 多篇文献研究了带有位势的Schrödinger方程

$$\begin{cases}-\Delta u+(V(x)+\lambda)u=f(u),\ x\in\mathbf{R}^N,\\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=a\end{cases}$$

的正规化解的存在性, 其中文献[14]在对$V(x)$和f的假设下得到了方程的基态解. 另外, 文献[15]研究了带有位势的非自治非线性Schrödinger方程

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\lambda u=f(x,u),\ x\in\mathbf{R}^N,\\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N}|u(x)|^2\mathrm{d}x=a,\ u\in H^1(\mathbf{R}^N),\end{cases}$$

其中$V(x)\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}V(x):=V_\infty\in(-\infty,+\infty]$, $f(x,s)$满足质量次临界增长的Berestycki-Lions条件, 文献[15]得到了上述方程正规化解的存在性和多重性, 并且在$V_\infty=+\infty$的情况下, 证明了对

于所有$a>0$, 方程都有基态解. 另外, 文献[16]研究了带有扰动的Schrödinger方程

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda u=|u|^{p-2}u+h(x),\ x\in\mathbf{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x=a,\ u\in H^1(\mathbf{R}^N), \end{cases}$$

得到了上述方程具有正规化正解的结果. 此外, 在有关局部极小化方法的文章中, 文献[17]研究了一类非临界旋转Choquard方程

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\Delta\psi+\dfrac{1}{2}|x|^2\psi-L_\Omega\psi=(I_\alpha*|\psi|^p)|\psi|^{p-2}\psi,\ (t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3, \\ \psi(0,x)=\psi_0(x), \end{cases}$$

文献[17]使用变分方法和极小化方法讨论了该方程驻波的存在性, 稳定性和质量坍塌行为.

在上述文献中, 文献[13-15]研究了带有位势但不含扰动项的Schrödinger方程解的存在性, 而文献[16]研究了带有扰动但不含位势的Schrödinger方程解的存在性. 据笔者所知, 目前还没有论文讨论同时具有阱位势、扰动项和指数临界增长的Schrödinger方程的正规化解. 因此, 本文为研究同时含有阱位势、扰动项和指数临界增长的Schrödinger方程正规化基态解的存在性提供了一些新的方法. 由于方程(3)(具体表达式见下方)中存在阱位势、扰动项以及具有指数临界增长的非线性项, 故讨论方程(3)的正规化解的存在性比求解一般的Schrödinger方程更具有挑战性. 为了克服这一困难, 本文运用文献[18]给出的Trudinger-Moser不等式讨论方程(3)的解. 回顾在$\mathbf{R}^2$下, 函数f的自然增长限制由文献[19-20]的Trudinger-Moser不等式给出, 具体来说, 本文定义了一个函数f具有指数临界增长, 如果存在$\alpha_0>0$, 使得

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{\alpha t^2}}=\begin{cases} 0, & \alpha>\alpha_0, \\ +\infty, & 0<\alpha<\alpha_0. \end{cases}$$

本文目的是寻找非齐次Schrödinger方程

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\lambda u=f(u)+h(x),\ u>0,\ x\in\mathbf{R}^2, \\ \int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x=c \end{cases} \tag{3}$$

的正规化基态解, 其中$c>0$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $V(x)=\omega|x|^2$是阱位势, $\omega>0$表示阱位频率, f满足指数临界增长, $h>0$是扰动. 另外, f和h满足以下条件.

(f_1) $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $f(0)=0$, f在$\alpha_0=4\pi$处具有指数临界增长;

(f_2) $\lim\limits_{t\to0}\frac{|f(t)|}{|t|}=0$;

(h_1) $h\in L^2(\mathbf{R}^2)$, 在正测度集上$h(x)>0$, $3h(x)+\langle\nabla h(x),x\rangle<0$, $\forall x\in\mathbf{R}^2$.

方程(3)的解可以通过寻找能量泛函($J_\omega(u)$: $X\to\mathbf{R}$)

$$J_\omega(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(|\nabla u|^2+\omega|x|^2u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}F(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u\mathrm{d}x$$

在

$$S(c):=\{u\in X\mid\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x=c\}$$

约束下的临界点来获得, 其中$F(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$, X定义为

$$X:=\{u\in H^1(\mathbf{R}^2)|\ \int_{\mathbf{R}^2}|x|^2|u|^2\mathrm{d}x<+\infty\},$$

易知X是一个Hilbert空间, 其内积是

$$(u,v)_X:=\int_{\mathbf{R}^2}(\nabla u\nabla v+\omega|x|^2uv+uv)\mathrm{d}x,$$

对应的范数是

$$\|u\|_X^2 := \|u\|^2 + \|u\|_2^2,$$

这里$\|u\|^2 := \|\nabla u\|_2^2 + \omega\|xu\|_2^2$. 显然, 由下面的引理2.4可知$J_\omega$在$S(c)$上是一个具有良定义的$C^1$泛函. 考虑极小化问题

$$\gamma_c^\rho := \inf_{u\in S(c)\cap B_\rho} J_\omega(u),$$

其中对于任意的$\rho > 0$, 令

$$B_\rho = \{u \in X \;|\|u\|^2 \leqslant \rho\}.$$

本文的主要结果如下.

定理1.1 假设条件(f_1)-(f_2)和(h_1)成立, 对于任意的$t \in \mathbf{R}$, 设$F(t) > 0$, 那么存在一个$0 < c_0 < 1$, 使得对于任意的$0 < \rho < 1$和$0 < c < c_0$, 方程(3)有一对弱解$(u_c^1, \lambda_c^1) \in X \times \mathbf{R}$. 由$u_c^1 \in X$可知, $\gamma_c^\rho > 0$的下确界可达, 并且u_c^1是一个正解.

注1.1 事实上, 有许多函数满足条件(f_1)和(f_2), 例如

$$f(t) = |t|^a(\mathrm{e}^{4\pi|t|^2} - 1),\ t \in \mathbf{R},$$

其中$a > 1$. 也可以找到一些函数满足条件(h_1), 例如

$$h(x) = b\mathrm{e}^{-z|x|},$$

其中$b > 0$, $z > 3$.

注1.2 受文献[21-22]的启发, 定理1.1旨在证明函数γ_c^ρ的极小值属于集合$S(c) \cap B_\rho$. 如果属于, γ_c^ρ的极小值就是$J_\omega|_{S(c)}$的临界点.

注1.3 本文扩展了文献[12]的研究结果, 并且用不同的方法证明了当存在扰动时, 也可以得到Schrödinger方程的弱解.

需要注意的是, 从定理1.1得到的解u_c^1可能不是基态解. 然而, 如果满足条件

(f_3) 存在一个常数$\theta > 4$, 使得

$$0 < \theta F(t) \leqslant tf(t),\ \forall t \neq 0,$$

那么以这种方式得到的解就是方程(3)的基态解.

定理1.2 假设条件(f_1)-(f_3)和(h_1)成立, 设u_c^1是由定理1.1得到的方程(3)的解且$\lambda = \lambda_c^1$, 那么存在$0 < c_1 \leqslant c_0$, 使得对于$0 < c < c_1$, u_c^1是方程(3)的正基态解且$\lambda = \lambda_c^1 \in \mathbf{R}$. 另外当$c \to 0$时, $\|u_c^1\|_X^2 \to 0$.

注1.4 与文献[12]不同的是, 方程(3)含有扰动$h(x)$. 在添加条件(h_1)后, 本文证明了定理1.1的解也是方程(3)的基态解, 并且扰动的存在不影响解的渐近性质.

注1.5 由于$c \to 0$时, $\|u_c^1\|_X^2 \to 0$, 所以短时间的发散是不会发生的. 也就是说, 存在$\delta > 0$, 对于$\|\psi_0\|_X < \delta$, 不存在$\psi_\pm \in X$使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|\psi(t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{\Delta}{2}}\psi_\pm\|_X = 0.$$

根据定理1.2, 集合$M_c^\rho := \{u \in S(c) \cap B_\rho|\ J_\omega(u) = \gamma_c^\rho\}$是非空的. 因此可以得到如下解的稳定性结果.

定理1.3 如果方程(1)在X中是局部适定性的, 由定理1.2的假设可知, 集合

$$M_c^\rho := \{u \in S(c) \cap B_\rho|\ J_\omega(u) = \gamma_c^\rho\} \neq \varnothing$$

在相应于方程(1)的流下是稳定的. 也就是说, 对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在一个$\delta > 0$使得对于$\psi_0 \in X$,

有

$$\mathrm{dist}_X(\psi_0, M_c^\rho) < \delta,$$

方程(1)的解$\psi(t,\cdot)$且$\psi(0,\cdot)=\psi_0$满足

$$\sup_{t\in[0,T)} \mathrm{dist}_X(\psi(t,\cdot), M_c^\rho) < \varepsilon,$$

其中T是$\psi(t,\cdot)$的最大存在时间.

论文的余下部分结构安排如下: §2介绍一些预备知识; §3将给出主要结果的证明.

§2 预备知识

为了证明本文的结果, 需要给出下面的引理.

引理2.1[23] (Gagliardo-Nirenberg不等式) 设$q>2$, 那么存在一个常数$S_q>0$使得

$$\|u\|_q \leqslant S_q^{1/q}\|\nabla u\|_2^{\frac{q-2}{q}}\|u\|_2^{\frac{2}{q}},$$

其中$S_q=\frac{q}{2\|U_q\|_2^{q-2}}$, U_q是方程

$$-\Delta U+\frac{2}{q-2}U=\frac{2}{q-2}|U|^{q-2}U$$

的基态解.

引理2.2[24] 对于$q\geqslant 2$, $X\hookrightarrow L^q(\mathbf{R}^2)$的嵌入是紧的.

引理2.3[25] 设u是方程

$$-\Delta u+\omega|x|^2u+\lambda u=f(u)+h(x)$$

的一个弱解, 那么u满足Pohozaev恒等式

$$Q_\omega(u)=\|\nabla u\|_2^2-\omega\|xu\|_2^2+\int_{\mathbf{R}^2}(2F(u)-f(u)u)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^2}\langle\nabla h(x),x\rangle u\mathrm{d}x=0.$$

Pohozaev恒等式的证明可参考文献[25], 为了简单起见, 这里省略.

引理2.4[18] (Trudinger-Moser不等式) 若$\alpha>0$, $u\in H^1(\mathbf{R}^2)$, 那么

$$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)\mathrm{d}x<+\infty.$$

如果$\|\nabla u\|_2^2\leqslant 1$, $\|u\|_2\leqslant M<+\infty$, $0<\alpha<4\pi$, 那么存在一个与M和α相关的正常数$C(M,\alpha)$, 使得

$$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)\mathrm{d}x\leqslant C(M,\alpha).$$

引理2.5[11, 推论4.2] 假设条件(f_1)-(f_2)成立, 设$\{u_n\}\subset S(c)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\|\nabla u_n\|_2^2<1-c$. 如果$u_n$在$X$上弱收敛于$u$, u_n在$\mathbf{R}^2$上几乎处处收敛于u, 那么在$L^1(\mathbf{R}^2)$上, 当$n\to\infty$时, 有

$$F(u_n)\to F(u),\ f(u_n)u_n\to f(u)u.$$

§3 主要结果的证明

引理3.1 假设条件(f_1)-(f_2)和(h_1)成立. 对于$0<\rho<1$, 有$c_0=c_0(\rho)<1-\rho$, 使得对于$c<c_0$有以下结论成立.

(i) $S(c)\cap B_\rho\neq\varnothing$;

(ii) 如果$u\in S(c)\cap B_\rho$, 存在$t>1$趋于1和一个正常数C使得$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)^t\mathrm{d}x\leqslant C$;

(iii) 如果对于$t\in\mathbf{R}$, $F(t)>0$, 那么

$$\inf_{u\in S(c)\cap B_{b\rho}} J_\omega(u)<\inf_{u\in S(c)\cap(B_\rho\setminus B_{a\rho})} J_\omega(u),$$

其中$0<b<a<1$.

证 (i) 对于$0<\rho<1$, 设$u_0\in X$, $\|u_0\|^2=\|\nabla u_0\|_2^2+\omega\|xu_0\|_2^2=\rho$, $\|u_0\|_2^2=c_0<1-\rho$. 定义$u_c^\rho=\sqrt{\frac{c}{c_0}}u_0$, 由于

$$\int_{\mathbf{R}^2}|u_c^\rho|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^2}\frac{c}{c_0}|u_0|^2\mathrm{d}x=\frac{c}{c_0}c_0=c\quad 和\quad \|u_c^\rho\|^2=\frac{c}{c_0}\|u_0\|^2=\frac{c}{c_0}\rho\leqslant\rho,$$

其中$c\leqslant c_0$, 因此$u_c^\rho\in S(c)\cap B_\rho$成立.

(ii) 由于$u\in S(c)\cap B_\rho$, 有$\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x=c<1$, $\|u\|^2\leqslant\rho<1$. 对于$z>1$, $s\geqslant 0$有

$$(\mathrm{e}^s-1)^z\leqslant\mathrm{e}^{zs}-1.$$

选择$\alpha>4\pi$并且充分趋于4π, $t>1$趋于1, 有

$$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)^t\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha tu^2}-1)\mathrm{d}x.$$

定义$v(x)=\sqrt{\frac{\alpha t}{4\pi\rho}}u$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x=\frac{\alpha t}{4\pi\rho}\int_{\mathbf{R}^2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant 1$$

和

$$\int_{\mathbf{R}^2}|v|^2\mathrm{d}x=\frac{\alpha t}{4\pi\rho}\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{\alpha tc}{4\pi\rho}\leqslant M,$$

那么根据引理2.4, 可以得到

$$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)^t\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha tu^2}-1)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{4\pi\rho(\sqrt{\frac{\alpha t}{4\pi\rho}}u)^2}-1)\mathrm{d}x\leqslant C.$$

(iii) 根据(f_1)和(f_2), 固定$q>2$, 对于$\xi>0$和$\alpha>4\pi$, 存在两个与q, α, ξ相关的常数$K_0>0$和$K_1>0$使得

$$|f(t)|\leqslant\xi|t|+K_0|t|^{q-1}(\mathrm{e}^{\alpha t^2}-1),\forall t\in\mathbf{R}$$

和

$$|F(t)|\leqslant\xi|t|^2+K_1|t|^q(\mathrm{e}^{\alpha t^2}-1),\forall t\in\mathbf{R},$$

那么对于$\sigma>1$趋于1, 使用Hölder不等式和(ii), 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^2}F(u)\mathrm{d}x\leqslant\xi\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x+K_1\int_{\mathbf{R}^2}|u|^q(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)\mathrm{d}x\leqslant\\&\xi\int_{\mathbf{R}^2}|u|^2\mathrm{d}x+K_1(\int_{\mathbf{R}^2}|u|^{q\sigma'}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{\sigma'}}(\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{e}^{\alpha u^2}-1)^\sigma\mathrm{d}x)^{\frac{1}{\sigma}}\leqslant\xi\|u\|_2^2+K_2\|u\|_{q\sigma'}^q,\end{aligned}\tag{4}$$

其中$\sigma'=\frac{\sigma}{\sigma-1}>1$, $K_2>0$ 是一个常数. 对于$0<\rho<1$, 设$u\in S(c)\cap(B_\rho\backslash B_{a\rho})$, 那么由(4), (h_1), Hölder不等式和引理2.1, 可以得到

$$\begin{aligned}J_\omega(u)=&\frac{1}{2}(\|\nabla u\|_2^2+\omega\|xu\|_2^2)-\int_{\mathbf{R}^2}F(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\xi c-K_2\|u\|_{q\sigma'}^q-\|h\|_2\|u\|_2\geqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\xi c-K_2S_{q\sigma'}^{\frac{1}{\sigma'}}\|\nabla u\|_2^{q-\frac{2}{\sigma'}}c^{\frac{1}{\sigma'}}-\|h\|_2c^{\frac{1}{2}}\geqslant\\&\frac{1}{2}a\rho-\xi c-K_2S_{q\sigma'}^{\frac{1}{\sigma'}}\rho^{\frac{q\sigma'-2}{2\sigma'}}c^{\frac{1}{\sigma'}}-\|h\|_2c^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{5}$$

另一方面, 对于$u\in S(c)\cap B_{b\rho}$, $t\in\mathbf{R}$, 由(h_1)和$F(t)>0$, 可以推断

$$\begin{aligned}J_\omega(u)=&\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{\mathbf{R}^2}F(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2+\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|u\|^2+\|h\|_2c^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}b\rho+\|h\|_2c^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{6}$$

由(5)-(6)可知, 对于$0<c<c'$, 存在$c'>0$足够小使得

$$\frac{1}{2}(a-b)\rho>\xi c+K_2S_{q\sigma'}^{\frac{1}{\sigma'}}\rho^{\frac{q\sigma'-2}{2\sigma'}}c^{\frac{1}{\sigma'}}+2\|h\|_2c^{\frac{1}{2}},$$

从而存在$0<c_0<c'$, 使得对于$0<c<c_0$有

$$\inf_{u\in S(c)\cap B_{b\rho}}J_\omega(u)<\inf_{u\in S(c)\cap(B_\rho\setminus B_{a\rho})}J_\omega(u).$$

定理1.1的证明 假设$\{u_n\}\subset S(c)\cap B_\rho$是

$$\gamma_c^\rho=\inf_{u\in S(c)\cap B_\rho}J_\omega(u)$$

的一个极小化序列. 显然$\{u_n\}$在X上是有界的. 根据引理2.2可知, 存在$u_c^1\in X$且$u_c^1>0$, 使得u_n在X上弱收敛于u_c^1, 当$q\geqslant 2$时, u_n在$L^q(\mathbf{R}^2)$上强收敛于u_c^1, u_n在$\mathbf{R}^2$上几乎处处收敛于u_c^1, 这意味着$u_c^1\in S(c)\cap B_\rho$. 对于任意的$0<\rho<1$, 选择$0<c<1-\rho<1$, 由引理2.5, Hölder不等式和(h_1)可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2}F(u_n)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^2}F(u_c^1)\mathrm{d}x$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_n\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_c^1\mathrm{d}x.$$

根据X范数的弱下半连续性, 有

$$\begin{aligned}&J_\omega(u_c^1)\leqslant\lim_{n\to\infty}J_\omega(u_n)=\\&\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(|\nabla u_n|^2+\omega|x|^2u_n^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}F(u_n)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_n\mathrm{d}x]=\gamma_c^\rho\leqslant J_\omega(u_c^1).\end{aligned}$$

因此在X上有$J_\omega(u_c^1)=\gamma_c^\rho$, $u_n\to u_c^1$, 这意味着$M_c^\rho\neq\varnothing$. 对于任意的$u_c^1\in M_c^\rho$, 由引理3.1知$u_c^1\in B_{a\rho}$, 说明u_c^1远离$S(c)\cap B_\rho$的边界, 那么u_c^1事实上就是J_ω约束在$S(c)$下的临界点. 所以存在$\lambda_c^1\in\mathbf{R}$使得(u_c^1,λ_c^1)是方程(3)的一对弱解.

定理1.2的证明 受文献[21]启发, 采用反证法来证明. 假设存在$u_1\in S(c)$, 且$u_1>0$使得

$$(J_\omega|_{S(c)})'(u_1)=0,\ J_\omega(u_1)<\gamma_c^\rho,$$

那么对于某些$\lambda\in\mathbf{R}$, u_1是方程

$$-\Delta u_1+\omega|x|^2u_1+\lambda u_1=f(u_1)+h(x)$$

的解. 根据引理2.3, (h_1), (f_3)和$u_1>0$可得

$$\begin{aligned}J_\omega(u_1)=&\frac{1}{2}(\|\nabla u_1\|_2^2+\omega\|xu_1\|_2^2)-\int_{\mathbf{R}^2}F(u_1)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_1\mathrm{d}x=\\&\omega\|xu_1\|_2^2-2\int_{\mathbf{R}^2}F(u_1)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}f(u_1)u_1\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_1\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}\langle\nabla h(x),x\rangle u_1\mathrm{d}x\geqslant\\&\omega\|xu_1\|_2^2+\frac{\theta-4}{2}\int_{\mathbf{R}^2}F(u_1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(3h(x)+\langle\nabla h(x),x\rangle)u_1\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{\theta-4}{2}\int_{\mathbf{R}^2}F(u_1)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{7}$$

由(7)和Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\|u_1\|^2 =&\|\nabla u_1\|_2^2+\omega\|xu_1\|_2^2=\\ &2J_\omega(u_1)+2\int_{\mathbf{R}^2}F(u_1)\mathrm{d}x+2\int_{\mathbf{R}^2}h(x)u_1\mathrm{d}x\leqslant\frac{2(\theta-2)}{\theta-4}J_\omega(u_1)+2\|h\|_2c^{\frac12},\end{aligned}$$

这意味着

$$J_\omega(u_1)\geqslant\frac{\theta-4}{2(\theta-2)}\|u_1\|^2-\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}. \tag{8}$$

考虑函数$\phi(x)=\pi^{-\frac12}\mathrm{e}^{-\frac12|x|^2}$, 那么$\|\nabla\phi\|_2^2=\|x\phi\|_2^2=\|\phi\|_2^2=1$. 从而对于任意的$c\leqslant\frac{1}{1+\omega}\rho$, 有$\sqrt{c}\phi\in S(c)\cap B_\rho$. 因此由$F(t)>0$, $t\in\mathbf{R}$和Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\gamma_c^\rho\leqslant&J_\omega(\sqrt{c}\phi)=\\ &\frac12(\|\nabla(\sqrt{c}\phi)\|_2^2+\omega\|x\sqrt{c}\phi\|_2^2)-\int_{\mathbf{R}^2}F(\sqrt{c}\phi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^2}h(x)\sqrt{c}\phi\mathrm{d}x\leqslant\\ &\frac12(\|\nabla(\sqrt{c}\phi)\|_2^2+\omega\|x\sqrt{c}\phi\|_2^2)+\int_{\mathbf{R}^2}h(x)\sqrt{c}\phi\mathrm{d}x\leqslant\\ &\frac12c+\frac{\omega}{2}c+\|h\|_2c^{\frac12}.\end{aligned} \tag{9}$$

接下来, 由(8)-(9)可得

$$\begin{aligned}\frac{\theta-4}{2(\theta-2)}\|u_1\|^2\leqslant&J_\omega(u_1)+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}<\gamma_c^\rho+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}\leqslant\\ &J_\omega(\sqrt{c}\phi)+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}\leqslant\frac12c+\frac{\omega}{2}c+\frac{2(\theta-3)}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}.\end{aligned}$$

因此存在$0<c_1\leqslant c_0$使得对于$0<c<c_1$, 有$u_1\in B_\rho$. 由此可以看出$u_1\in S(c)\cap B_\rho$, 从而$\gamma_c^\rho\leqslant J_\omega(u_1)$, 与假设矛盾. 所以由定理1.1得到的解就是方程(3)的基态. 最后, 根据上面类似计算可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\theta-4}{2(\theta-2)}\|u_c^1\|^2\leqslant&J_\omega(u_c^1)+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}=\gamma_c^\rho+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}\leqslant\\ &J_\omega(\sqrt{c}\phi)+\frac{\theta-4}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12}\leqslant\frac12c+\frac{\omega}{2}c+\frac{2(\theta-3)}{\theta-2}\|h\|_2c^{\frac12},\end{aligned}$$

这说明当$c\to0$时, $\|u_c^1\|^2\to0$. 因此当$c\to0$时, 可得

$$\|u_c^1\|_X^2=\|u_c^1\|^2+\|u_c^1\|_2^2=\|u_c^1\|^2+c\to0.$$

定理1.3的证明 受文献[26]启发, 这里采用反证法证明. 假设存在$\varepsilon_0>0$, $\{u_n^0\}\subset X$, $\{t_n\}\subset\mathbf{R}^+$使得对于$u_n^0=u_n(\cdot,0)$, 方程(1)的特解$u_n$满足

$$\mathrm{dist}_X(u_n^0,M_c^\rho)<\frac1n,\ \mathrm{dist}_X(u_n(\cdot,t_n),M_c^\rho)\geqslant\varepsilon_0.$$

设$\{u_n^0\}\subset S(c)$. 由于当$n\to\infty$时,

$$\mathrm{dist}_X(u_n^0,M_c^\rho)\to0,$$

根据能量和质量守恒可知, 若$u_n(\cdot,t_n)\subset B_\rho$, 那么$u_n(\cdot,t_n)$是$\gamma_c^\rho$的极小化序列. 否则若$u_n(\cdot,t_n)\subset(X\backslash B_\rho)$, 由连续性可知存在$\bar t_n\in[0,t_n)$ 使得$\{u_n(\cdot,\bar t_n)\}\subset\partial B_\rho$, 从而根据引理3.1可得

$$J(u_n(\cdot,\bar t_n))\geqslant\inf_{u\in S(c)\cap\partial B_\rho}J_\omega(u)>\inf_{u\in S(c)\cap\partial B_{b\rho}}J_\omega(u)=\inf_{u\in S(c)\cap B_\rho}J_\omega(u)=\gamma_c^\rho,$$

因此$\{u_n(\cdot,t_n)\}$是γ_c^ρ的极小化序列. 按照集合M_c^ρ的定义, 可以推断存在一个$v_0\in M_c^\rho$, 使得在X上有$u_n(\cdot,t_n)\to v_0$, 这与$\mathrm{dist}_X(u_n(\cdot,t_n),M_c^\rho)\geqslant\varepsilon_0$矛盾.

参考文献:

[1] Merzbacher E. Quantum Mechanics[M]. Now York: John Wiley & Sons, 1998.

[2] Harrison P, Valavanis A. Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures[M]. West Sussex: John Wiley & Sons, 2016.

[3] Landauer R. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices[J]. Philosophical Magazine, 1970, 21(172): 863-867.

[4] Beenakker C W J. Random-matrix theory of quantum transport[J]. Reviews of Modern Physics, 1997, 69(3): 731-808.

[5] Wang Zhengping, Zhou Huansong. Positive solutions for a nonhomogeneous elliptic equation on $\mathbf{R}^N$ without (AR) condition[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 353(1): 470-479.

[6] Ambrosio V, Hajaiej H. Multiple solutions for a class of nonhomogeneous fractional Schrödinger equations in $\mathbf{R}^N$[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2018, 30(3): 1119-1143.

[7] Jiang Yinbin, Wang Zhiping, Zhou Huansong. Multiple solutions for a nonhomogeneous Schrödinger-Maxwell system in $\mathbf{R}^3$[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2013, 83: 50-57.

[8] Bhakta M, Chakraborty S, Ganguly D. Existence and multiplicity of positive solutions of certain nonlocal scalar field equations[J], Mathematische Nachrichten, 2023, 296(9): 3816-3855.

[9] Jeanjean L. Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1997, 28(10): 1633-1659.

[10] Chang Xiaojun, Liu Mingtao, Yan Duokui. Normalized ground state solutions of nonlinear Schrödinger equations involving exponential critical growth[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2023, 33(83): 1-20.

[11] Alves C O, Ji C, Miyagaki O H. Normalized solutions for a Schrödinger equation with critical growth in $\mathbf{R}^N$[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2022, 61(18): 1-24.

[12] Yao Shuai, Chen Haibo, Sun Juntao. Two normalized solutions for the Chern-Simons-Schrödinger system with exponential critical growth[J]. The Journal of Geometic Analysis, 2023, 33(91): 1-26.

[13] Stanislavova M, Stefanov A G. Ground states for the nonlinear Schrödinger equation under a general trapping potential[J]. Journal of Evolution Equations, 2021, 21: 671-697.

[14] Zhong Xuexiu, Zou Wenming. A new deduction of the strict sub-additive inequality and its application: ground state normalized solution to Schrödinger equations with potential[J]. Differential and Integral Equations, 2023, 36(1/2): 133-160.

[15] Yang Zuo, Qi Shijie, Zou Wenming. Normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations with potentials and non-autonomous nonlinearities[J]. The Journal of Geometric Analysis. 2022, 32(159): 1-27.

[16] Chen Zhen, Zou Wenming. Existence of normalized positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2023, 33(147): 1-23.

[17] Mao Yicen, Yang Jie, Su Yu. Standing waves for Choquard equation with noncritical rotation[J]. Advances in Nonlinear Analysis, 2024, 13(1): 20230140.

[18] Cao Daomin. Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbf{R}^2$[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1992, 17(3-4): 407-435.

[19] Moser J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1971, 20(11): 1077-1092.

[20] Trudinger N S. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(5): 473-483.

[21] Bellazzini J, Boussaïd N, Jeanjean L, Visciglia N. Existence and stability of standing waves for supercritical NLS with a partial confinement[J]. Communications in Mathematical Physics, 2017, 353: 229-251.

[22] Bellazzini J, Jeanjean L. On dipolar quantum gases in the unstable regime[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2016, 48(3): 2028-2058.

[23] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates[J]. Communications in Mathematical Physics, 1983, 87(4): 567-576.

[24] Hadj Selem F, Hajaiej H, Markowich P A, et al. Variational approach to the orbital stability of standing waves of the Gross-Pitaevskii equation[J]. Milan Journal of Mathematics, 2014, 82: 273-295.

[25] Carriao P C, Lehrer R, Vicente A. Existence and nonexistence of solutions of asymptotically linear Klein-Gordon equation[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2016, 2016(149): 1-15.

[26] Cazenave T, Lions P L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations[J]. Communications in Mathematical Physics, 1982, 85: 549-561.

Normalized ground state solutions for the nonhomogeneous Schrödinger equations with exponential critical growth

ZHANG Xiao-cang, XU Li-ping

(School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China)

Abstract: This paper studies normalized ground state solutions for the following nonlinear Schrödinger equation

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda u = f(u) + h(x),\ u > 0 \text{ in } \mathbf{R}^2, \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |u|^2 \mathrm{d}x = c, \end{cases}$$

where $c > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $V(x) = \omega|x|^2$ is a trapping potential, $\omega > 0$ is the trapping frequency, f satisfies exponential critical growth, and h is a perturbation. When f and h satisfy certain conditions, this paper can obtain normalized ground state solutions for this equation, which are highly dependent on the trapping frequency ω and the mass c. Furthermore, these solutions are positive solutions with orbitally stable and positive energy. Additionally, this paper also analyzes the asymptotic behavior of the solutions as $c \to 0$. This research expands upon the existing results in the relevant literature.

Keywords: Schrödinger equation; perturbation; normalized ground state solutions; exponential critical growth

MR Subject Classification: 35J20; 35J65; 35J60