

# Archimedean Copula相依结构下带随机缺失的 极值次序统计量的极限定理

陶颖<sup>1,2</sup>, 谭中权<sup>1\*</sup>

(1. 嘉兴大学 数据科学学院, 浙江嘉兴 314001;

2. 浙江师范大学 数学科学学院, 浙江金华 321004)

**摘要:** 设  $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$  为一列满足 Archimedean Copula 相依结构的随机变量, 并假设  $\mathbf{X}$  中仅有部分样本能够被观测到. 在随机缺失情形下, 研究了完全样本与非完全样本极值次序统计量的分布极限定理和几乎处处中心极限定理, 同时通过几类典型的例子对主要结论进行解释. 该文的主要结论修正并推广了文献中已存在的一些结果.

**关键词:** 随机缺失; Archimedean Copula; 极值次序统计量; 几乎处处中心极限定理

**中图分类号:** O211.4

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4424(2026)01-0023-14

## §1 引言

经典的极值理论是研究社会生活中极端现象的一门学科, 它主要研究一系列随机变量极大值的相关极限理论. 设  $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$  是一列独立同分布的实值随机变量, 具有边际分布函数  $F(x)$ . 若存在常数序列  $a_n > 0, b_n \in \mathbf{R}$  和非退化分布函数  $G(x)$ , 使得对  $G(x)$  的任意连续点处有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x),$$

则称分布函数  $F$  属于非退化函数  $G(x)$  的最大吸引场, 简记为  $F \in D(G)$ . 注意到  $G(x)$  必为如下三大极值分布之一.

$$\text{Gumbel: } A(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{Fréchet: } \Phi_\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\beta}), & x > 0, \end{cases} \quad \beta > 0;$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\beta(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\beta), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \beta > 0.$$

上述的经典结果及其相关推广见专著[1].

收稿日期: 2023-12-26 修回日期: 2024-04-01

\*通讯作者, Email: tzq728@163.com

基金项目: 嘉兴市级科技计划项目(2025CGZ014); “创新嘉兴·优才支持计划”科技创新拔尖人才项目

在实际应用中,有些数据可能因不同的原因以非常不规则的方式丢失.在许多领域(例如金融、水文、气象等),不同的研究者可能对不同观测频率的样本感兴趣.在这些情况下,研究完全样本极值和非完全样本极值的渐近理论以及它们之间的渐近关系变得很重要.

假设随机序列 $\mathbf{X}$ 中仅有部分随机变量能够被观测到.令 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ 为一个Bernoulli随机序列,用其刻画随机序列 $\mathbf{X}$ 中各随机变量 $X_n$ 是否被观测到,且 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ 独立.在 $\mathbf{X}$ 的前 $n$ 个样本中,记 $M_n = \max\{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ 和 $\widetilde{M}_n = \max\{X_k, \varepsilon_k = 1, 1 \leq k \leq n\}$ .令 $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ 并假设其满足当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \lambda$ , 其中 $\lambda \in [0, 1]$ 为常数.

文[2]研究了独立同分布随机序列完全样本和非完全样本极值之间的渐近关系,获得了如下结论:对任意 $x < y \in \mathbf{R}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a_n(\widetilde{M}_n - b_n) \leq x, a_n(M_n - b_n) \leq y\right) = H(x, y, \lambda), \quad (1.1)$$

其中

$$H(x, y, \lambda) = G^\lambda(x)G^{1-\lambda}(y).$$

文[2]还研究了一类平稳相依情形,即在极值理论领域中非常经典的相依条件 $D(u_n, v_n)$ 和 $D'(u_n)$ (其定义见专著[1])下研究了完全样本和非完全样本极值之间的渐近关系,证明了(1.1)仍然成立.此后,该问题逐渐成为极值领域的一个研究热点,被众多研究者所关注.如文[3-6]考虑了该问题在平稳Gauss情形下的推广;文[7-8]考虑了该问题在自回归过程和线性过程下的推广;该问题在随机场下的推广见文[9-10];在几乎处处极限定理方面的推广见文[11-13].关于该问题的相关研究可以参考文[14-19]及其参考文献.

上述的研究中考虑了一些相依情形,如文[2, 14]在 $D(u_n, v_n)$ 和 $D'(u_n)$ 条件下考虑该问题,文[3-6]则在相依Gauss背景下考虑了该问题,文[7-8]在自回归过程和线性过程下考虑了该问题.除文[3-6]中的Gauss情形之外,其他研究中考虑的相依性都是很弱的,这种弱相依基本不影响极限分布 $H(x, y, \lambda)$ 的形式.因此,非常有必要在强相依背景下研究非Gauss随机序列完全样本和非完全样本极值之间的渐近关系.

本文探讨随机序列满足一类Copula相依结构时,完全样本和非完全样本极值之间的渐近关系.在过去的数年里, Copula及其相关的研究主题引起了人们的极大兴趣. Copula被广泛地用来描述随机变量之间的尺度不变的相依关系.对这种相依结构的理解在概率论的各个领域都是非常重要的,特别是在精算领域和金融领域, Copula已经证明了它们在构建适当的多元模型方面的有效性.关于Copula的相关理论介绍,可参考专著[20].

## §2 多维Copula

本节介绍一些关于Copula的定义、性质及相关定理,它们均来自[17]. Copula是一个自变量为边际分布函数的多元函数,它能够将由多维分布函数与其边际分布函数进行有效的连接,从而清晰地反映两个边际分布函数之间的联系.

**定义2.1** (Copula) 令 $d \geq 2$ . 一个 $d$ 维Copula函数是一个定义在 $[0, 1]^d$ 上的 $d$ 维分布函数,其边际分布函数服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

下面的Sklar定理是研究Copula的重要工具,其证明见[17].

**定理2.1** (Sklar定理) 对给定的Copula函数 $C$ 和边际分布函数 $F_1, \dots, F_d$ ,

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (2.1)$$

是一个分布函数. 反之, 对给定的具有边际分布函数 $F_1, \dots, F_d$ 的多维分布函数 $F$ , 存在一个满足(2.1)的Copula函数 $C$ . 这个Copula函数 $C$ 不是唯一的, 如果 $F_1, \dots, F_d$ 是连续函数, 则有

$$C(x_1, \dots, x_d) = F(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_d^{-1}(x_d)), \quad (2.2)$$

其中 $F_i^{-1}$ 表示分布函数 $F_i$ 的广义逆函数.

本文主要考虑Archimedean Copula, 在介绍其定义之前, 先给出几个辅助结果.

**定义2.2** 令 $d \geq 2$ . 设 $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ 是严格递减的、凸的函数, 并且使得 $\psi(0) = \infty$ ,  $\psi(1) = 0$ . 对于 $x_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, d$ , 有 $C_n^\psi(x_1, \dots, x_d) = \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^d \psi(x_i)\right)$ , 其中 $\psi$ 称为 $C_n^\psi$ 的生成元.

**定义2.3** 一个定义在 $I$ 上的函数 $g$ 被称为在 $I$ 上是完全单调的, 如果它是连续的并且具有交替符号的所有阶导数, 即 $(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} g(x) \geq 0$ , 对所有 $k \geq 0$ 和所有 $x \in I$ 成立.

**定理2.2** 对所有 $d \geq 2$ ,  $C_d^\psi$ 是一个Copula函数当且仅当生成元 $\psi(t)$ 具有逆函数 $\psi^{-1}(t)$ 并且 $\psi^{-1}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上完全单调.

**定义2.4** (Archimedean Copula) 如果 $\psi^{-1}$ 在 $[0, \infty)$ 上完全单调, 则称 $C_d^\psi$ 是Archimedean Copula.

Archimedean Copula在实践中很有趣, 通常它们只有一个参数, 进而它们很容易被构造. 下面介绍几类常见的Archimedean Copula.

**定义2.5** (Gumbel Copula) 若 $C_d^{Gu, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ 具有形式

$$C_d^{Gu, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \exp \left\{ - \left[ \sum_{i=1}^d (-\log x_i)^\alpha \right] \right\},$$

则称其为Gumbel Copula, 其生成元 $\psi(t) = (-\log t)^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ .

**定义2.6** (Clayton Copula) 若 $C_d^{Cl, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ 具有形式

$$C_d^{Cl, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1^{-\alpha} + \dots + x_d^{-\alpha} - d + 1)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

则称其为Clayton Copula, 其生成元 $\psi(t) = t^{-\alpha} - 1$ ,  $\alpha \geq 0$ .

**定义2.7** (Joe Copula) 若 $C_d^{Jo, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ 具有形式

$$C_d^{Jo, \alpha}(x_1, x_2, \dots, x_d) = 1 - \left[ \sum_{i=1}^d (1 - x_i)^\alpha - \prod_{i=1}^d (1 - x_i)^\alpha \right]^{1/\alpha},$$

则称其为Joe Copula, 其生成元 $\psi(t) = -\log(1 - (1 - t)^\alpha)$ ,  $\alpha \geq 1$ .

设随机变量序列满足上述Archimedean Copula结构, 若其共同分布函数 $F$ 满足 $\exp(-\psi(F)) \in D(G)$ , 文[21]研究了该随机序列极值的极限分布问题, 并探讨了其结果在精算领域中的应用; 如果其共同分布函数 $F$ 满足 $F \in D(G)$ , 文[22-24]则获得了该随机序列极值次序统计量的分布极限定理和几乎处处中心极限定理. 然而, 文[22-24]中的证明中出现了致命的错误, 导致其主要结论也存在问题. 本文将进一步研究该问题并有两个目的: 其一, 纠正文[22-24]中的错误; 其二, 进一步将相关结论推广到随机缺失情形.

### §3 主要结论及证明

在本文中, 设 $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ 是一列随机变量, 并设 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ 是一列Bernoulli随机变量且与 $\mathbf{X}$ 独立, 其中 $\varepsilon_n$ 表示随机变量 $X_n$ 被观测到的事件的指标且与 $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$ 独立. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ . 记 $M_n = \max\{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $\widetilde{M}_n = \max\{X_k, \varepsilon_k = 1, 1 \leq k \leq n\}$ .

以下阐述主要结论.

**定理3.1** 设  $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$  是一列同分布的随机变量, 具有连续的边际分布函数  $F(x)$ , 满足以下条件.

- (i) 对所有的  $n \geq 1$ , 随机向量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  具有 Archimedean Copula  $C_n^\psi$  结构;  
(ii) 当  $t \rightarrow 1$  时, Archimedean Copula 函数  $C_n^\psi$  的生成元满足  $\psi(t) \sim K(1-t)^\theta$ , 其中  $\theta \geq 1, K > 0$  为常数;  
(iii)  $F \in D(G)$ , 即存在常数序列  $c_n > 0, d_n \in \mathbf{R}$ , 使得对  $G(x)$  的任意连续点处, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = G(x). \quad (3.1)$$

进一步, 假设  $S_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$  满足当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} \lambda, \quad (3.2)$$

其中  $\lambda \in [0, 1]$  为一个常数. 则对  $x < y \in \mathbf{R}$ , 有

1) 当  $\theta = 1$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \psi^{-1}\left(-K \log(G^\lambda(x)G^{1-\lambda}(y))\right). \quad (3.3)$$

2) 当  $\theta > 1$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = 1. \quad (3.4)$$

令  $M_n^{(k)}$  表示  $\{X_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  的第  $k$  个最大值,  $\widetilde{M}_n^{(k)}$  表示  $\{X_j, \varepsilon_j = 1, j = 1, 2, \dots, n\}$  的第  $k$  个最大值. 由定理3.1可得极值次序统计量的极限分布.

**推论3.1** 在定理3.1的条件下, 当  $\theta > 1$  时, 对于固定的  $k = 1, 2, \dots$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) = 1 \quad (3.5)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(M_n^{(k)} \leq c_n x + d_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n\right) = 1. \quad (3.6)$$

**注记3.1** (i) 当  $\theta = 1$  时, Archimedean Copula 结构可能是独立的或者强相依的; 当  $\theta > 1$  时, Archimedean Copula 结构是强相依的, 满足 Archimedean Copula 结构的随机序列的极值聚集现象非常严重, 导致极值指数为 0, 进而, 其极值次序统计量的极限分布是退化的. 例如, 对于 Gumbel Copula, 当  $t \rightarrow 1$  时,  $\psi(t) = (-\log t)^\alpha \sim \alpha(1-t)^\alpha$ , 当  $\alpha = 1$  时, Archimedean Copula 结构是独立的; 当  $\alpha > 1$  时, Archimedean Copula 结构是相依的. 事实上, 表3.1中第6, 7, 13号 Copula 都具有类似的性质.

(ii) 结果(1.1)表明了弱相依情形下, 非完全样本极值与完全样本极值之间是渐近独立; 而定理3.1表明非完全样本极值与完全样本极值之间的渐近关系取决于生成元  $\psi$ . 例如, 对于 Gumbel Copula  $\psi(t) = (-\log t)^\alpha$ , 如果  $\alpha = 1$ , 则非完全样本极值与完全样本极值之间是渐近独立的, 否则是渐近相依的. 详细情况可见下节中的例子.

(iii) 当  $\theta > 1$  时, 推论3.1给出了完全样本和非完全样本极值次序统计量的联合极限分布. 当  $\theta = 1$  时, 也可以给出完全样本和非完全样本极值次序统计量的联合极限分布, 但是其证明方法与本文完全不一样. 由于篇幅所限, 本文没有陈述这种情形, 将在另文解决这个问题.

(iv) 在定理3.1的条件(i)-(iii)以及其他相关条件下, 当  $\theta \geq 2k$  时, 文[22]中的(151), 文[23]中的引理3.3和文[24]中的引理3.3证明了  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(M_n^{(k)} \leq c_n x + d_n\right) = G(x) \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-\log G(x)}{l!}$ . 由(3.6)可知, 该结果是错误的. 定理3.1修正并推广文[22-24]中的相关结论.

(v) 许多经典的生成元都满足定理3.1的条件(ii), 即当  $t \rightarrow 1$  时, Archimedean Copula  $C_n^\psi$  的

生成元满足 $\psi(t) \sim K(1-t)^\theta$ , 其中 $\theta \geq 1$ ,  $K > 0$ 为一常数. 如果当 $t \rightarrow 1$ 时,  $\psi(t) = o(1-t)$ , 则将其表示为 $\psi(t) \sim (1-t)^\infty$ . 文[20]中的表4.1列举了22类常见的Copula函数, 它们均满足定理3.1的条件(ii), 表3.1给出了其生成元 $\psi(t)$ 及其等价表示中的参数 $\theta$ 和 $K$ .

表 3.1 满足定理3.1条件的生成元

序号	生成元 $\psi(t)$	参数 $\alpha$ 的范围	$\theta$ 和 $K$
1	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta = 1, K = 1$
2	$(1-t)^\alpha$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = 1$
3	$\log \frac{1-\alpha(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$	$\theta = 1, K = 1 - \alpha$
4	$(-\log t)^\alpha$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = 1$
5	$-\log [(e^{-\alpha t} - 1)/(e^{-\alpha} - 1)]$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta = 1, K = \alpha/(e^\alpha - 1)$
6	$-\log (1 - (1-t)^\alpha)$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = 1$
7	$-\log (\alpha t + (1-\alpha))$	$(0, 1]$	$\theta = 1, K = \alpha$
8	$(1-t)/(1 + (\alpha-1)t)$	$[1, \infty)$	$\theta = 1, K = \alpha^{-1}$
9	$\log(1 - \alpha \log t)$	$(0, 1]$	$\theta = 1, K = \alpha$
10	$\log(2t^{-\alpha} - 1)$	$(0, 1]$	$\theta = 1, K = 2\alpha$
11	$\log(2 - t^\alpha)$	$(0, 1/2]$	$\theta = 1, K = \alpha$
12	$(1/t - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = 1$
13	$(1 - \log t)^\alpha - 1$	$(0, \infty)$	$\theta = 1, K = \alpha$
14	$(t^{-1/\alpha} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = \alpha^{-\alpha}$
15	$(1 - t^{1/\alpha})^\alpha$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = \alpha^{-\alpha}$
16	$(\alpha/t + 1)(1-t)$	$[0, \infty)$	$\theta = 1, K = \alpha + 1$
17	$-\log [(1+t)^{-\alpha} - 1]/(2^{-\alpha} - 1)$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	$\theta = 1, K = \alpha/2(2^\alpha - 1)$
18	$e^{\alpha/(t-1)}$	$[2, \infty)$	$\theta = \infty, K = 1$
19	$e^{\alpha/t} - e^\alpha$	$(0, \infty)$	$\theta = 1, K = \alpha e^\alpha$
20	$e^{t^{-\alpha}} - e$	$(0, \infty)$	$\theta = 1, K = e\alpha$
21	$1 - (1 - (1-t)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$	$[1, \infty)$	$\theta = \alpha, K = \alpha^{-1}$
22	$\arcsin(1 - t^\alpha)$	$(0, 1]$	$\theta = 1, K = \alpha$

在Archimedean Copula相依结构下, 定理3.1研究了非完全样本与完全样本极值的联合极限分布问题, 下面的定理3.2将考虑其几乎处处中心极限定理.

**定理3.2** 在定理3.1的条件下, 当 $\theta > 1$ 时, 对 $x < y \in \mathbf{R}$ 和固定的 $k = 1, 2, \dots$ , 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n) = 1, \text{ a.s.}$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(M_n^{(k)} \leq c_n x + d_n) = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n) = 1, \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $I(\cdot)$ 表示示性函数.

**注记3.2** (i) 在定理3.1的条件(i)-(iii)下, 当 $\theta \geq 2k$ 时, 文[22]中的定理3.1和推论3.1, 文[23]中

的定理2.1和文[24]中的定理2.1证明了

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(M_n^{(k)} \leq c_n x + d_n) = G(x) \sum_{l=1}^{k-1} \frac{-\log G(x)}{l!} \quad \text{a.s.}$$

由(3.7)可知, 该结果是错误的. 定理3.2修正并推广了文[22-24]中的主要结论.

(ii) 定理3.2只证明了 $\theta > 1$ 时, 极值次序统计量的几乎处处中心极限定理; 对于 $\theta = 1$ 的情形, 其几乎处处中心极限定理是否成立仍然是未知的. 但是, 对于表3.1中第4和6号Copula以及第7号Copula( $\alpha = 1$ ), 当 $\theta = 1$ 时, 它们所表示的相依结构实际上是独立的, 因此, 其相应的极值次序统计量的几乎处处中心极限定理是成立的, 其证明可参考文[10, 13], 也可参考例4.1-例4.3.

**定理3.1的证明** 设 $x < y \in \mathbf{R}$ , 记 $u_n(x) = c_n x + d_n, u_n(y) = c_n y + d_n$ , 由全概率公式, 以及(2.1)和(2.2)有

$$\begin{aligned} & P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) = \\ & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y) \mid S_n = k\right) = \\ & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) P(X_1 \leq u_n(x), \dots, X_k \leq u_n(x), X_{k+1} \leq u_n(y), \dots, X_n \leq u_n(y)) = \\ & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) P(F(X_1) \leq F(u_n(x)), \dots, F(X_k) \leq F(u_n(x)), \\ & \quad F(X_{k+1}) \leq F(u_n(y)), \dots, F(X_n) \leq F(u_n(y))) = \\ & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) C_n^\psi(F(u_n(x)), \dots, F(u_n(x)), F(u_n(y)), \dots, F(u_n(y))) = \\ & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \psi^{-1}(k\psi(F(u_n(x))) + (n-k)\psi(F(u_n(y))))). \end{aligned} \quad (3.8)$$

设 $0 < \varepsilon < \lambda$ , 则可将(3.8)右端改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \psi^{-1}(k\psi(F(u_n(x))) + (n-k)\psi(F(u_n(y)))) = \\ & \sum_{k: |\frac{k}{n} - \lambda| > \varepsilon} P(S_n = k) \psi^{-1}(k\psi(F(u_n(x))) + (n-k)\psi(F(u_n(y)))) + \\ & \sum_{k: |\frac{k}{n} - \lambda| \leq \varepsilon} P(S_n = k) \psi^{-1}(k\psi(F(u_n(x))) + (n-k)\psi(F(u_n(y)))) := \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

对第一项 $\Sigma_1$ , 注意到对任意 $x \in [0, \infty)$ ,  $|\psi^{-1}(x)| \leq 1$ , 进而利用条件(3.2)可得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\Sigma_1 \leq \sum_{k: |\frac{k}{n} - \lambda| > \varepsilon} P(S_n = k) \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

对第二项 $\Sigma_2$ , 利用 $\psi^{-1}$ 的单调性可得

$$\Sigma_2 \leq \psi^{-1}(n(\lambda - \varepsilon)\psi(F(u_n(x))) + n(1 - (\lambda + \varepsilon))\psi(F(u_n(y)))) \sum_{k: |\frac{k}{n} - \lambda| \leq \varepsilon} P(S_n = k) \quad (3.11)$$

和

$$\Sigma_2 \geq \psi^{-1}(n(\lambda + \varepsilon)\psi(F(u_n(x))) + n(1 - (\lambda - \varepsilon))\psi(F(u_n(y)))) \sum_{k: |\frac{k}{n} - \lambda| \leq \varepsilon} P(S_n = k). \quad (3.12)$$

结合(3.8)-(3.12), 对于任意 $\varepsilon \in (0, \lambda)$ , 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}\left(n(\lambda - \varepsilon)\psi(F(u_n(x))) + n[1 - (\lambda + \varepsilon)\psi(F(u_n(y)))]\right)$$

和

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}\left(n(\lambda + \varepsilon)\psi(F(u_n(x))) + n[1 - (\lambda - \varepsilon)\psi(F(u_n(y)))]\right).$$

注意到 $\varepsilon$ 与 $n$ 无关, 令 $\varepsilon \downarrow 0$ 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq v_n(y)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}\left(n\lambda\psi(F(u_n(x))) + n(1 - \lambda)\psi(F(u_n(y)))\right).$$

注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $F(u_n(x)) \rightarrow 1$ , 进而结合定理3.1条件: 当 $t \rightarrow 1$ 时,  $\psi(t) \sim K(1 - t)^\theta$ , 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq v_n(y)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}\left(nK\lambda(1 - F(u_n(x)))^\theta + nK(1 - \lambda)(1 - F(u_n(y)))^\theta\right).$$

由(3.1)可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n(x))) = -\log G(x), \quad (3.13)$$

进而当 $\theta = 1$ 时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \psi^{-1}\left(-K \log(G^\lambda(x)G^{1-\lambda}(y))\right)$ , 即(3.3)成立; 当 $\theta > 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{-1}\left(nK\lambda\left(\frac{-\log G(x)}{n}\right)^\theta + nK(1 - \lambda)\left(\frac{-\log G(y)}{n}\right)^\theta\right) = \psi^{-1}(0) = 1,$$

即(3.4)成立.

**推论3.1的证明** 注意到

$$P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) \leq P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) \leq 1,$$

进而由(3.4)可得(3.5)成立. 类似可证(3.6)成立.

在证明定理3.2之前, 先证明两个辅助结果. 在下文中 $K_i, i \geq 0$ 表示正值常数. 对 $1 \leq m < n$ , 令 $M_{m,n} = \max\{X_k, k = m+1, m+2, \dots, n\}$ ,  $\widetilde{M}_{m,n} = \max\{X_k, \varepsilon_k = 1, k = m+1, m+2, \dots, n\}$ .

**引理3.1** 在定理3.2的条件下, 对 $\log N < m < n$ 和充分大的 $N$ , 有

$$E \left| I\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) - I\left(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)\right) \right| \leq \frac{K_0 m}{n}. \quad (3.14)$$

**证** 观察到

$$\begin{aligned} & E \left| I\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) - I\left(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)\right) \right| = \\ & P\left(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)\right) - P\left(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)\right) \leq \\ & P\left(\widetilde{M}_m > u_n(x)\right) + P\left(M_m > u_n(y)\right) := A_1 + A_2. \end{aligned}$$

显然 $A_2 \leq m(1 - F(u_n(y)))$ . 由全概率公式可得

$$A_1 = \sum_{k=0}^m P(S_m = k)P\left(\widetilde{M}_m > u_n(x) \mid S_m = k\right) \leq$$

$$\sum_{k=0}^m P(S_m = k)k(1 - F(u_n(x))) = (1 - F(u_n(x)))E(S_m).$$

由(3.2)可知, 对充分大的 $m$ , 存在 $K_1 > 0$ 使得 $E(S_m) \leq K_1 \lambda m$ , 因此, 对充分大的 $m$ ,

$$A_1 \leq (1 - F(u_n(x)))E(S_m) \leq K_1 \lambda m(1 - F(u_n(x))).$$

由(3.13)可知, 对充分大的 $n$ , 存在 $K_2 > 0$ 使得 $n(1 - F(u_n(x))) \leq K_2$ . 进而存在 $K_0 > 0$ 使得对充分大的 $N$ , 有 $A_1 + A_2 \leq \frac{K_0 m}{n}$ . 故(3.14)得证.

**引理3.2** 在定理3.2的条件下, 对 $\log N < m < n$ 和充分大的 $N$ , 有

$$\left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right) \right| \leq \frac{K_3}{m^\epsilon}. \quad (3.15)$$

其中 $\epsilon > 0$ 是常数.

**证** 显然有

$$P := \left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right) \right| = \left| P \left( \widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y), \widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y) \right) - P \left( \widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y) \right) P \left( \widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y) \right) \right|.$$

记 $\mathcal{A} = \{ \widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y), \widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y) \}$ ,

$\mathcal{B} = \{ \widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y) \}$ ,  $\mathcal{C} = \{ \widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y) \}$ , 利用全概率公式, 有

$$P = \left| \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k)P(S_{m,n} = l) \left[ P(\mathcal{A}|S_m = k, S_{m,n} = l) - P(\mathcal{B}|S_m = k)P(\mathcal{C}|S_{m,n} = l) \right] \right| = \left| \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k)P(S_{m,n} = l) \left[ \psi^{-1}(k\psi(F(u_m(x))) + (m-k)\psi(F(u_m(y)))) + l\psi(F(u_n(x))) + (n-m-l)\psi(F(u_n(y))) - \psi^{-1}(k\psi(F(u_m(x))) + (m-k)\psi(F(u_m(y)))) \times \psi^{-1}(l\psi(F(u_n(x))) + (n-m-l)\psi(F(u_n(y)))) \right] \right|.$$

为了简便起见, 记

$$I_1 = k\psi(F(u_m(x))) + (m-k)\psi(F(u_m(y))) + l\psi(F(u_n(x))) + (n-m-l)\psi(F(u_n(y))),$$

$$I_2 = k\psi(F(u_m(x))) + (m-k)\psi(F(u_m(y))),$$

$$I_3 = l\psi(F(u_n(x))) + (n-m-l)\psi(F(u_n(y))).$$

注意到 $m, n$ 满足 $\log N < m < n$ , 因此, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,  $F(u_m(x)) \rightarrow 1$ ,  $F(u_m(y)) \rightarrow 1$ ,  $F(u_n(x)) \rightarrow 1$ ,  $F(u_n(y)) \rightarrow 1$ , 进而利用定理3.2的假设, 当 $t \rightarrow 1$ 时,  $\psi(t) \sim K(1-t)^\theta$ , 有

$$I_1 \sim Kk(1 - F(u_m(x)))^\theta + K(m-k)(1 - F(u_m(y)))^\theta + Kl(1 - F(u_n(x)))^\theta + K(n-m-l)(1 - F(u_n(y)))^\theta.$$

再次利用(3.13)可得

$$I_1 \sim Kk \left( \frac{-\log G(x)}{m} \right)^\theta + K(m-k) \left( \frac{-\log G(y)}{m} \right)^\theta + Kl \left( \frac{-\log G(x)}{n} \right)^\theta + K(n-m-l) \left( \frac{-\log G(y)}{n} \right)^\theta.$$

注意到,  $I_1 = I_2 + I_3$ , 同理可证

$$\begin{aligned} I_2 &\sim Kk \left( \frac{-\log G(x)}{m} \right)^\theta + K(m-k) \left( \frac{-\log G(y)}{m} \right)^\theta, \\ I_3 &\sim Kl \left( \frac{-\log G(x)}{n} \right)^\theta + K(n-m-l) \left( \frac{-\log G(y)}{n} \right)^\theta. \end{aligned}$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 进一步可得

$$I_2 \leq K_4 \frac{k}{m^\theta} + K_5 \frac{m-k}{m^\theta} \leq K_6 m^{1-\theta} \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

$$I_3 \leq K_7 \frac{l}{n^\theta} + K_8 \frac{n-m-l}{n^\theta} \leq K_9 n^{1-\theta} \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

$$I_1 \leq K_{10} m^{1-\theta} \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

再次利用定理3.2的假设, 当  $t \rightarrow 1$  时,  $\psi(t) \sim K(1-t)^\theta$ , 易知  $t \rightarrow 0$  时,  $\psi^{-1}(t) \sim 1 - K^{-\frac{1}{\theta}} t^{\frac{1}{\theta}}$ . 因此, 对充分大的  $N$ , 有

$$\begin{aligned} P &= \left| \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k) P(S_{m,n} = l) (\psi^{-1}(I_1) - \psi^{-1}(I_2) \psi^{-1}(I_3)) \right| \leq \\ &\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k) P(S_{m,n} = l) \left| \psi^{-1}(I_1) - \psi^{-1}(I_2) \psi^{-1}(I_3) \right| \leq \\ &K_{11} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k) P(S_{m,n} = l) \left| (1 - K^{-\frac{1}{\theta}} I_1^{\frac{1}{\theta}}) - (1 - K^{-\frac{1}{\theta}} I_2^{\frac{1}{\theta}}) (1 - K^{-\frac{1}{\theta}} I_3^{\frac{1}{\theta}}) \right| \leq \\ &K_{12} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{n-m} P(S_m = k) P(S_{m,n} = l) K^{-\frac{1}{\theta}} \left| I_1^{\frac{1}{\theta}} + I_2^{\frac{1}{\theta}} + I_3^{\frac{1}{\theta}} \right|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

注意到, 利用(3.16)-(3.18)有

$$I_1^{\frac{1}{\theta}} + I_2^{\frac{1}{\theta}} + I_3^{\frac{1}{\theta}} \leq (K_6 m^{1-\theta})^{\frac{1}{\theta}} + (K_9 n^{1-\theta})^{\frac{1}{\theta}} + (K_{10} m^{1-\theta})^{\frac{1}{\theta}} \leq K_{13} m^{\frac{1-\theta}{\theta}}. \quad (3.20)$$

将(3.20)代入(3.19), 并注意到  $\theta > 1$ , 即可完成(3.15)的证明.

为了简便, 引入记号  $x \ll y$ , 表示  $x = O(y)$ .

**引理3.3** 设  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  是一列一致有界的随机变量, 即存在某个  $M \in (0, \infty)$  使得对所有的  $k \in \mathbf{N}$  有  $|\xi_k| \leq M$  几乎处处成立. 如果对某个  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\text{Var} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xi_n \right) \ll (\log N)^2 (\log \log N)^{-(1+\varepsilon)},$$

则  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (\xi_n - E\xi_n) = 0$ , a.s.

**证** 见文[25]中引理3.1.

**定理3.2的证明** 类似于推论3.1的证明, 只需要证明情形  $k = 1$ , 即证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left( I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) - P(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) \right) = 1, \text{ a.s.} \quad (3.21)$$

由引理3.3可知, 为证(3.21)只需要证当  $N \rightarrow \infty$  时, 对于某个  $\varepsilon > 0$  有

$$\text{Var} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) \right) \leq O \left( \frac{(\log N)^2}{(\log \log N)^{1+\varepsilon}} \right). \quad (3.22)$$

令  $\xi_{m,n} = I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y))$  和  $\xi_n = \xi_{0,n}$ . 有

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) \right) &\leq \\ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \text{Var}(\xi_n) + 2 \sum_{1 \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| &:= \Sigma_3 + 2\Sigma_4. \end{aligned}$$

显然有  $\Sigma_3 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} < \infty$ . 将  $\Sigma_4$  分成三项

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &= \sum_{1 \leq m < n \leq \log N} \frac{1}{mn} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| + \sum_{1 \leq m < \log N < n \leq N} \frac{1}{mn} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| + \\ &\quad \sum_{\log N \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| := \Sigma_{41} + \Sigma_{42} + \Sigma_{43}, \end{aligned}$$

由于  $|\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| \leq 1$ , 所以有

$$\begin{aligned} \Sigma_{41} &\ll \sum_{1 \leq m < n \leq \log N} \frac{1}{mn} \leq \sum_{n=1}^{\log N} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \ll \log N (\log \log N), \\ \Sigma_{42} &\ll \sum_{1 \leq m < \log N < n \leq N} \frac{1}{mn} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\log N} \frac{1}{m} \ll (\log \log N)^2. \end{aligned}$$

下面估计  $\Sigma_{43}$ , 观察到

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_n)| &= \left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) \right) \right| \leq \\ &\left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right) \right| + \\ &\left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right) \right| \leq \\ &2E \left| I(\widetilde{M}_n \leq u_n(x), M_n \leq u_n(y)) - I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right| + \\ &\left| \text{Cov} \left( I(\widetilde{M}_m \leq u_m(x), M_m \leq u_m(y)), I(\widetilde{M}_{m,n} \leq u_n(x), M_{m,n} \leq u_n(y)) \right) \right|. \end{aligned}$$

进而由引理3.1和引理3.2知

$$\begin{aligned} \Sigma_{43} &\leq 2 \sum_{\log N \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} E|\xi_n - \xi_{m,n}| + \sum_{\log N \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} |\text{Cov}(\xi_m, \xi_{m,n})| \ll \\ &\sum_{1 \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} \frac{m}{n} + \sum_{1 \leq m < n \leq N} \frac{1}{mn} \frac{1}{m^\epsilon} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^{1+\epsilon}} \ll \log N. \end{aligned}$$

综上所述(3.22)成立. 定理3.2证毕.

## §4 例子

本节给出满足定理3.1和定理3.2条件的例子, 部分例子可修正文[22-24]中相关定理的结果.

### 4.1 Weibull吸引场情形

首先, 给出  $F$  被吸引到 Weibull 分布的情形.

**例4.1** 假设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 满足定理3.1中的条件. 进一步假设其服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

(i) 在Gumbel Copula条件下, 其中 $\psi(t) = (-\log t)^\alpha, \alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = \exp(-(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \quad (4.23)$$

和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = \exp(-(\lambda x + (1 - \lambda)y)), \text{ a.s.} \quad (4.24)$$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = 1 \quad (4.25)$$

和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = 1, \text{ a.s.} \quad (4.26)$$

(ii) 在Clayton Copula条件下, 其中 $\psi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1), \alpha > 0$ . 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = (1 + \alpha\lambda x + \alpha(1 - \lambda)y)^{-1/\alpha}. \quad (4.27)$$

(iii) 在Joe Copula条件下, 其中 $\psi(t) = -\log(1 - (1 - t)^\alpha), \alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = \exp(-(\lambda x + (1 - \lambda)y))$$

和  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = \exp(-(\lambda x + (1 - \lambda)y)), \text{ a.s.}$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = 1$ 和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}x, M_n^{(k)} \leq 1 - \frac{1}{n}y\right) = 1, \text{ a.s.}$$

**证** 情形(i)的证明. 首先由表3.1可知Gumbel Copula满足定理3.1中的条件(ii), 其中 $\theta = \alpha$ .  
1). 当 $\alpha = 1$ 时, 利用定理3.1并注意到此时极值分布是Weibull分布可得(4.23)成立. 当 $\alpha = 1$ 时, 注意到此时Gumbel Copula相依实际上表示的是独立, 因此, 由文[10, 13]中的定理2.1可知(4.24)成立. 2). 当 $\alpha > 1$ 时, (4.25)和(4.26)直接由定理3.2可得.

情形(ii)的证明. 首先由表3.1可知Clayton Copula满足定理3.1中的条件(ii), 其中 $\theta = 1$ . 因此, 由定理2.1, 经过简单计算可知(4.27)成立.

情形(iii)的证明. 首先由表3.1可知Joe Copula满足定理3.1中的条件(ii), 其中 $\theta = \alpha$ . 同时注意到, 当 $\alpha = 1$ 时, Joe Copula相依实际上表示的也是独立. 因此, 情形(iii)的证明与情形(i)的证明是类似的, 故略去.

## 4.2 Fréchet吸引场情形

其次, 给出 $F$ 被吸引到Fréchet分布的情形.

**例4.2** 假设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 满足定理3.1中的条件. 进一步假设其边际分布

为Pareto分布, 即对于 $L, \gamma > 0$ , 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $1 - F(x) \sim Lx^{-\gamma}$ .

(i) 在Gumbel Copula条件下, 其中 $\psi(t) = (-\log t)^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = \exp(-(\lambda x^{-\gamma} + (1-\lambda)y^{-\gamma}))$$

$$\text{和 } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = \exp(-(\lambda x^{-\gamma} + (1-\lambda)y^{-\gamma})), \text{ a.s.}$$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = 1$ 和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = 1, \text{ a.s.}$$

(ii) 在Clayton Copula条件下, 其中 $\psi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$ ,  $\alpha > 0$ . 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = (1 + \alpha\lambda x^{-\gamma} + \alpha(1-\lambda)y^{-\gamma})^{-1/\alpha}.$$

(iii) 在Joe Copula条件下, 其中 $\psi(t) = -\log(1 - (1-t)^\alpha)$ ,  $\alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = \exp(-(\lambda x^{-\gamma} + (1-\lambda)y^{-\gamma}))$$

$$\text{和 } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = \exp(-(\lambda x^{-\gamma} + (1-\lambda)y^{-\gamma})), \text{ a.s.}$$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $0 < x < y < \infty$ , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = 1$ 和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}x, M_n^{(k)} \leq (Ln)^{\frac{1}{\gamma}}y\right) = 1, \text{ a.s.}$$

证 例4.2的证明与例4.1类似, 故略去.

### 4.3 Gumbel吸引场情形

最后给出 $F$ 被吸引到Gumbel分布的情形. 在本节中

$$c_n = (2 \log n)^{-\frac{1}{2}}, d_n = (2 \log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2 \log n)^{-\frac{1}{2}}(\log 4\pi + \log \log n).$$

**例4.3** 假设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 满足定理3.1中的条件. 进一步假设其边际分布为标准正态分布.

(i) 在Gumbel Copula条件下, 其中 $\psi(t) = (-\log t)^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $x < y \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \exp(-(\lambda e^{-x} + (1-\lambda)e^{-y}))$$

$$\text{和 } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \exp(-(\lambda e^{-x} + (1-\lambda)e^{-y})), \text{ a.s.}$$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $x < y \in \mathbf{R}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) = 1$ 和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) = 1, \text{ a.s.} \quad (4.28)$$

(ii) 在Clayton Copula条件下, 其中 $\psi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$ ,  $\alpha > 0$ . 则对 $x < y \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = (1 + \alpha\lambda e^{-x} + \alpha(1-\lambda)e^{-y})^{-1/\alpha}.$$

(iii) 在Joe Copula条件下, 其中 $\psi(t) = -\log(1 - (1-t)^\alpha)$ ,  $\alpha \geq 1$ .

1) 当 $\alpha = 1$ 时, 则对 $x < y \in \mathbf{R}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \exp\left(-(\lambda e^{-x} + (1-\lambda)e^{-y})\right)$$

和  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n \leq c_n x + d_n, M_n \leq c_n y + d_n\right) = \exp\left(-(\lambda e^{-x} + (1-\lambda)e^{-y})\right)$ , a.s.

2) 当 $\alpha > 1$ 时, 则对 $x < y \in \mathbf{R}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) = 1$ 和

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} I\left(\widetilde{M}_n^{(k)} \leq c_n x + d_n, M_n^{(k)} \leq c_n y + d_n\right) = 1, \text{ a.s.}$$

**证** 例4.3的证明与例4.1类似, 故略去.

**注记4.1** 例4.3中的(4.28)修正并推广了文[22-24]中的定理5.1.

**致谢** 感谢审稿专家给出的宝贵的修改建议.

#### 参考文献:

- [1] Leadbetter M R, Lindgren G, Rootzén H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [2] Mladenović P, Piterbarg V. On asymptotic distribution of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences[J]. Stoch Proc Appl, 2006, 116(12): 1977-1991.
- [3] Cao Lunfeng, Peng Zuoxiang. Asymptotic distributions of maxima of complete and incomplete samples from strongly dependent stationary Gaussian sequences[J]. Appl Math Lett, 2011, 24(2): 243-247.
- [4] Hashorva E, Peng Zuoxiang, Weng Zhichao. On Piterbarg theorem for the maxima of stationary Gaussian sequences[J]. Lithuan Math J, 2013, 53(3): 280-292.
- [5] Peng Zuoxiang, Cao Lunfeng, Nadarajah S. Asymptotic distributions of maxima of complete and incomplete samples from multivariate stationary Gaussian sequences[J]. J Multi Anal, 2010, 101(10): 2641-2647.
- [6] Peng Zuo, Tong Jingjun, Weng Zhichao. Exceedances point processes in the plane of stationary Gaussian sequences with data missing[J]. Statist Probab Lett, 2019, 149: 73-79.
- [7] Glavaš L, Mladenović P, Samorodnitsky G. Extreme values of the uniform order 1 autoregressive processes and missing observations[J]. Extremes, 2017, 20(3): 671-690.
- [8] Glavaš L, Mladenović P. Extreme values of linear processes with heavy-tailed innovations and missing observations[J]. Extremes, 2020, 23(4): 547-567.
- [9] Panga Z, Pereira L. On the maxima and minima of complete and incomplete samples from nonstationary random fields[J]. Statist Probab Lett, 2018, 137: 124-134.
- [10] Zheng Shengchao, Tan Zhongquan. On the maxima of nonstationary random fields subject to missing observations[J]. Communications in Statistics-Theory and methods, 2024, 53(18): 6339-6361.
- [11] Peng Zuoxiang, Wang Ping, Nadarajah S. Limiting distributions and almost sure limit theorems for the normalized maxima of complete and incomplete samples from Gaussian sequence[J]. Electron J Statist, 2009(3): 851-864.
- [12] Tan Zhongquan, Wang, Yuebao. Some asymptotic results on extremes of incomplete samples[J]. Extremes, 2012, 15, 319-332.

- [13] Tong Bin, Peng Zuoxiang. On almost sure max-limit theorems of complete and incomplete samples from stationary sequences[J]. Acta Math Sinica (English Ser), 2011, 27(7): 1323-1332.
- [14] Krajka T. The asymptotic behaviour of maxima of complete and incomplete samples from stationary sequences[J]. Stoch Proc Appl, 2011, 121(8): 1705-1719.
- [15] Tan Zhongquan, Yang Yang. The maxima and sums of multivariate non-stationary Gaussian sequences[J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2015, 30(2): 197-209.
- [16] 谭中权. 离散与连续时间强相依高斯过程最大值与和的渐近关系[J]. 应用数学学报, 2015, 38(1): 27-36.
- [17] 谭中权. 连续与离散时间Gauss次序统计过程的极值[J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(5): 623-642.
- [18] 宋欣潼, 钱程, 谭中权. 随机波动模型最大值的极限定理[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(3): 277-289.
- [19] 刘慧燕, 谭中权. 随机缺失情形下平稳随机场超过数点过程的极限性质[J]. 数学学报, 2025, 68(1): 145-164.
- [20] Nelsen R B. An Introduction to Copula[M]. New York: Springer, 2000.
- [21] Wüthrich M V. Extreme value theory and Archimedean Copula[J]. Scand Actuarial J, 2004, 104, 211-228.
- [22] Dudziński M, Furmańczyk K. On some applications of the Archimedean Copula in the proofs of the almost sure central limit theorems for certain order statistics[J]. Bull Korean Math Soc, 2017, 54(3): 839-874.
- [23] Dudziński M, Furmańczyk K. Some applications of the Archimedean Copula in the proof of the almost sure central limit theorem for ordinary maxima[J]. Open Math, 2017, 15(1): 1024-1034.
- [24] Dudziński M, Furmańczyk K. Application of Copula in the proof of the almost sure central limit theorem for the  $k$ th largest maxima of some random variables[J]. Appl Math, 2018, 45(1): 1-21.
- [25] Csáki E, Gonchigdanzan K. Almost sure limit theorem for the maximum of stationary Gaussian sequences[J]. Stat Probab Lett, 2002, 58: 195-203.

## The limit theorems of extreme order statistics with random missing under Archimedean Copula

TAO Ying<sup>1,2</sup>, TAN Zhong-quan<sup>1</sup>

(1. College of Data Science, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

2. School of Mathematic Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

**Abstract:** Let  $\mathbf{X} = \{X_n, n \geq 1\}$  be a sequence of random variables satisfying some Archimedean Copula and suppose that only part of  $\mathbf{X}$  can be observed. This paper studies the weak limit theorems and almost sure limit theorems for extreme order statistics of complete and incomplete samples under random missing. Some examples are also given to illustrate the main results. The main results correct and improve some existing results in the literatures.

**Keywords:** random missing; Archimedean Copula; extreme order statistics; almost sure central limit theorems

**MR Subject Classification:** 60G70; 62H05