高校应用数学学报
2026, 41(1): 117-126

一类三种群捕食-食饵模型正解的稳定性

董 彪

(阿坝师范学院 数学学院, 四川汶川 623002)

摘 要: 该文研究了一类具有三种群食饵-捕食模型在齐次Dirichet边界条件下正解的稳定性. 借助于Fréchet导数, 利用极大值定理和上下解方法、线性算子的不动点指数理论、紧理论以及度的同伦不变性, 运用椭圆型方程的正则理论, 讨论了一类三种群捕食-食饵模型存在正解应满足的条件, 给出了该系统在齐次Dirichet边界条件下存在线性的、非退化的、稳定的正解的条件.

关键词: 反应函数; 不动点指数; 稳定性; 食物链模型

中图分类号: O175.26

文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2026)01-0117-10

§1 引 言

在自然界中, 存在着品种繁多的各类生物物种, 在各种生物种群之间普遍存在着相互依存的食饵-捕食关系, 为了尽可能地让每个种群都能稳定、持续地繁衍生息而不至于灭绝, 越来越多的学者对生物种群之间的食饵-捕食系统展开研究.

近年来, 对于两种生物种群之间的捕食-食饵系统正解的存在性、唯一性、稳定性及分歧等方面的研究, 取得了许多优秀的成果[1-20]. 李梦娜等人在文献[3]中研究了一类两种生物种群捕食- 食饵模型正解的存在唯一性等, 袁海龙等人在文献[4]中研究了一类两种生物种群具有HollingIII型捕食-食饵模型共存解的存在与稳定性. 而对三种生物种群之间的捕食-食饵模型的研究, 相关文献并不多[11-16]. 文献[12-13]研究了抛物型模型在齐次Dirichlet边界条件下的主特征值时正平衡态解的稳定性、唯一性等问题. 陈滨等人[11]利用全局分歧理论讨论了一类在齐次Dirichlet边界条件下的三种生物种群捕食模型的正解的局部稳定性. 李海侠[14]运用不动点理论和椭圆型方程正则理论, 研究了一类带有Leslie-Gower项和Crowley-Martin反应函数的食物链模型的正解存在性、稳定性等. 但是以上学者在所研究的模型中都没有充分考虑捕食者在处理食饵时所需要的时间对捕食者密度的影响, 也没有考虑第一捕食者与第二捕食者相互影响对各自种群密度的影响.

笔者在此基础上, 充分考虑了上述因素, 进一步完善了三种群食饵-捕食模型, 主要利用线性算子的紧理论、不动点指数理论、椭圆型方程的正则理论等, 探讨了一类三种群的捕食-食饵模

收稿日期: 2023-12-20 修回日期: 2024-09-24
基金项目: 四川省教育厅自然科学基金(15ZA0337); 四川省教育厅创新团队资助项目(18TD0047); 阿坝师范学院课题(201909003; 201910132)

型, 当食饵的最大增长率靠近其主特征值时, 得到了该模型存在线性的、非退化的、稳定的正解的条件.

假设在同一生态区域内, 同时栖息着三种生物种群, 这三种生物种群在齐次Dirichlet边界条件下的捕食-食饵模型为

$$\begin{cases} -\Delta x = x(a_1 - x - b_1 y - \dfrac{c_1 z y}{1+ey}), t \in \Omega, \\ -\Delta y = y(a_2 - y + \dfrac{b_2 x}{(1+cx)(1+dz)}), t \in \Omega, \\ -\Delta z = z(a_3 - z + \dfrac{b_3 x}{(1+cx)(1+ey)}), t \in \Omega, \\ x = y = z = 0, t \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界开区域, 边界$\partial\Omega$是光滑有界的, Δ是Laplace算子, x是食饵的密度, y是第一捕食者的密度, z是第二捕食者的密度, a_1表示食饵的最大密度, a_2表示第一捕食者的最大密度, a_3表示第二捕食者的最大密度, b_1, c_1分别是第一和第二捕食者捕获食物的转化率, b_2, b_3分别是第一和第二捕食者的捕获率, d, e分别为第一和第二捕食者之间的干扰度, c为捕食者对食物的处理时间, 函数$\frac{b_2 x}{(1+cx)(1+dz)}$, $\frac{b_3 x}{(1+cx)(1+ey)}$为反应函数, 模型中的所有参数$a_i, b_i, c_1, c, d, e$(其中$i = 1, 2, 3$)均是正实数, 记$R_1 = a_2 + b_2 a_1$, $R_2 = a_3 + b_3 a_1$.

§2 预备知识

设E是一个Banach空间, $E = E_1 \times E_1 \times E_1$, 其中$E_1 = \{x \in C(\overline{\Omega}) : x(t) \geq 0, t \in \overline{\Omega}\}$, $E_0(\overline{\Omega}) = \{x \in C^1(\overline{\Omega}) : x(t) = 0, t \in \overline{\Omega}\}$; $\overline{E} = E_0 \times E_0 \times E_0$; $D_1 = \{x \in C(\overline{\Omega}) : x \leq a_1 + 1\}$, $D_2 = \{y \in C(\overline{\Omega}) : y \leq R_1 + 1\}$, $D_3 = \{z \in C(\overline{\Omega}) : z \leq R_2 + 1\}$, $D = \{(x, y, z) \in D_1 \otimes D_2 \otimes D_3\}$, $S = \{(\overline{x}, \overline{y}, 0) \in D_1 \otimes D_2 \otimes \{0\}\}$, 其中$\overline{x}, \overline{y}$为模型

$$\begin{cases} -\Delta x = x(a_1 - x - b_1 y), t \in \Omega, \\ -\Delta y = y(a_2 - y + \dfrac{b_2 x}{1+cx}), t \in \Omega, \\ x = y = 0, t \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

的正解.

引理1[15] 设$\lambda_1(p(t))$为方程$-\Delta\varphi + p(t)\varphi = \lambda\varphi$, $t \in \Omega$; $\varphi = 0$, $t \in \partial\Omega$的主特征值, 则$\lambda_1(p(t))$为方程的简单特征值, 且特征值$\lambda_1(p(t))$关于$p(t)$是递增的、连续的函数, 记$\lambda_1(0) = \lambda_1$, 该方程对应的特征函数是φ_1, 且$\varphi_1 > 0$, $t \in \Omega$, $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.

引理2[3] 设$p(t) \in C(\overline{\Omega})$, M是正常数, 对$t \in \overline{\Omega}$, $-p(t) + M > 0$, 则

(i) 当$\lambda_1(p(t)) < 0$时, 有$r[(-\Delta + M)^{-1}(-p(t) + M)] > 1$;

(ii) 当$\lambda_1(p(t)) > 0$时, 有$r[(-\Delta + M)^{-1}(-p(t) + M)] < 1$;

(iii) 当$\lambda_1(p(t)) = 0$时, 有$r[(-\Delta + M)^{-1}(-p(t) + M)] = 1$.

引理3[3] 若$I - G'(u)$, 在$\bar{E}_u$上是可逆的, 则

(i) 当$G'(u)$具有α性质时, 则有$\text{index}E(G, u) = 0$;

(ii) 当$G'(u)$没有α性质时, 则有$\text{index}E(G, u) = (-1)^\beta$, 其中$\beta$是$G'(u)$的所有大于1的特征值的代数重数之和.

引理4[16-17]　方程$-\Delta x = x(a-bx)$, $t\in\Omega$; $x=0$, $t\in\partial\Omega$. 若$a\le\lambda_1$, 则该方程只有平凡解$x=0$; 若$a>\lambda_1$, 则该方程存在唯一正解$\theta_{(a,b)}$, 且$0<\theta_{(a,b)}<\frac{a}{b}$. 当$b=1$时, 记$\theta_{(a,1)}=\theta_a$.

因此在一定的条件下, 系统(1)可能存在如下的非负解, 记为① 平凡解$(0,0,0)$; ② 弱半平凡解$(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$; ③ 强半平凡解$(x,y,0)$, $(0,y,z)$, $(x,0,z)$; ④ 正解(x,y,z).

当$a_2>\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$时, 方程$-\Delta z = z(a_3 - z + \frac{b_3\theta_{a_1}}{(1+e\theta_{a_2})(1+c\theta_{a_1})})$, $t\in\Omega$; $z=0$, $t\in\partial\Omega$的唯一的正解, 记为$\hat{z}$. 同理方程$-\Delta y = y(a_2-y+\frac{b_2\theta_{a_1}}{(1+d\hat{z})(1+c\theta_{a_1})})$, $t\in\Omega$; $y=0$, $t\in\partial\Omega$的唯一的正解, 记为$\bar{y}$. 记$\bar{a}_2=\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{(1+c\theta_{a_1})(1+d\hat{z})})$, $\bar{a}_3=\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{(1+c\theta_{a_1})(1+e\theta_{a_2})})$.

由引理4, 易证以下结论.

引理5[4]　当$a_1>\lambda_1$, $a_2>\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$ 时, 则系统(1)存在弱半平凡解$(\theta_{a_1},0,0)$, $(0,\theta_{a_2},0)$, $(0,0,\theta_{a_3})$.

引理6[14]　设(x,y,z)是系统(1)的正解, 则有$a_1>\lambda_1$, $a_2>\bar{a}_2$, $a_3>\bar{a_3}$.

证　已知(x,y,z)是系统(1)的正解, 则由(1)有$-\Delta x<a_1 x$, 方程两边同时乘以x, 再求积分, 由Green公式, 可得$\int_\Omega|\nabla x|^2\mathrm{d}t < a_1\int_\Omega|x|^2\mathrm{d}t$, 又由Poincarè不等式, 得$\int_\Omega|\nabla x|^2\mathrm{d}t\ge\lambda_1\int_\Omega|x|^2\mathrm{d}t$, 即有$a_1>\lambda_1$. 又由(1)得

$$0\le\lambda(a_2-y+\frac{b_2x}{(1+cx)(1+dz)})<\lambda(a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{(1+c\theta_{a_1})(1+d\hat{z})}),$$

即$a_2>\bar{a}_2$. 同理$a_3>\bar{a_3}$.

定理1　设(x,y,z)为系统(1)的任意正解, 则该正解满足$x\le\theta_{a_1}<a_1$, $y\le\bar{y}<R_1$, $\hat{z}<R_2$.

证　由(1)的第一个方程, 因a_1为食饵的最大密度, 所以$a_1>x+b_1y+c_1z>x$. 又θ_{a_1}为方程$-\Delta x=x(a_1-x)$的正解, 由极大值定理、引理4和上下解方法, 可得$x\le\theta_{a_1}<a_1$.

同理$y<a_2+\frac{b_2x}{(1+cx)(1+dz)}<a_2+b_2x<R_1$, 可得$y\le\bar{y}<R_1$. 又$-\Delta z<z(a_3-z+b_3a_1)=z(R_3-z)$, 可得$\hat{z}\le z<R_2$.

§3　主要结论及证明

由定理1知, 设$(x,y,z)\in D$为系统(1)的任意非负解, 若$(x,y,z)\in\overline{D}$, 对充分大的正整数M, 函数$x(a_1-x-b_1y-\frac{c_1yz}{1+ey})+Mx$, $y(a_2-y+\frac{b_2x}{(1+cx)(1+dz)})+My$, $z(a_3-z+\frac{b_3x}{(1+cx)(1+ey)})+Mz$均为非负的.

对$\mu\in[0,1]$, $G_\mu: E\to E$, 定义映射

$$G_\mu=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\mu x(a_1-x-b_1y-\dfrac{c_1yz}{1+ey})+Mx\\ \mu y(a_2-y+\dfrac{b_2x}{(1+cx)(1+dz)})+My\\ \mu z(a_3-z+\dfrac{b_3x}{(1+cx)(1+ey)})+Mz\end{pmatrix},\tag{3}$$

记$G=G_1$, 易知G_μ为紧算子, 则$G:D\to E$为连续可微的算子.

引理7[4, 21]　若$a_1>\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$, 则有

(i) $\mathrm{deg}E(I-G,D)=1$;

(ii) 当$a_2\ne\lambda_1$时, 有$\mathrm{index}E(I-G,(0,0,0))=0$;

(iii) 当$a_2>\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, $a_3>\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$时, 有$\mathrm{index}E(I-G,(\theta_{a_1},0,0))=0$; 当$a_2<\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, $a_3<\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$时, 有$\mathrm{index}E(I-G,(\theta_{a_1},0,0))=1$.

证 (i) 在$\partial\Omega$上, 显然G是没有不动点的. 对任意μ, 若G_μ的不动点是方程

$$\begin{cases} -\Delta x=\mu x(a_1-x-b_1y-\dfrac{c_1zy}{1+ey}),t\in\Omega,\\ -\Delta y=\mu y(a_2-y+\dfrac{b_2x}{(1+cx)(1+dz)}),t\in\Omega,\\ -\Delta z=\mu z(a_3-z+\dfrac{b_3x}{(1+cx)(1+ey)}),t\in\Omega,\\ x=y=z=0,t\in\partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

的解. 由定理1知, 对$\mu\in[0,1]$, G一定满足$x<a_1$, $y<R_1$, $z<R_2$, 则G_μ的不动点必定落在D内, 由度的同伦不变性, $\deg E(I-G_\mu)$不依赖于μ, 根据文献[21]的计算, 因此

$$\deg E(I-G,D)=\deg E(I-G_0,D)=\deg E(I-G_\mu,D).$$

当$\mu=0$时, 方程(4)只有平凡解, 所以$\deg E(I-G_0,D)=\deg E(G_0,(0,0,0))$.

又由(3)在点$(0,0,0)$处的Fréchet导数, 有

$$N=G_0'(0,0,0)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix} M&0&0\\ 0&M&0\\ 0&0&M\end{pmatrix},$$

由引理2-引理3, 可得$r(N)<1$, 所以$I-G$在$E(0,0,0)$上是可逆的, 且N在$E(0,0,0)$上也没有α性质, 故

$$\operatorname{index}E(I-G,D)=\operatorname{index}E(G_0,(0,0,0))=1.$$

(ii) 由(3)在点$(0,0,0)$处的Fréchet导数, 有

$$G'(0,0,0)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix} a_1+M&0&0\\ 0&a_2+M&0\\ 0&0&a_3+M\end{pmatrix},$$

下证算子$I-G'(0,0,0)$在$E(0,0,0)$上是可逆的.

假设$(\xi,\eta,\varsigma)\in E(0,0,0)$, 有$G'(0,0,0)(\xi,\eta,\varsigma)^{\mathrm{T}}=(\xi,\eta,\varsigma)^{\mathrm{T}}$, 则有$-\Delta\xi=a_1\xi$, $t\in\Omega$; $\xi|_{t\in\partial\Omega}=0$. 若$\xi\neq0$, 有$a_1=\lambda_1$, 与$a_1>\lambda_1$矛盾, 所以$\xi=0$. 同理可得$\eta\equiv0$, $\varsigma\equiv0$, 故$I-G'(0,0,0)$在$E(0,0,0)$上是可逆的.

又$a_1>\lambda_1$, 由引理2, 令$r_{a_1}=r[(M-\Delta)^{-1}(a_1+M)]>1$, 且$r_{a_1}$是算子$(M-\Delta)^{-1}(a_1+M)$的主特征值, 该特征值所对应的特征函数记为$\sigma>0$, 取$t_0=\frac{1}{r_{a_1}}$, 则当$0<t_0<1$时, 有$(I-t_0G'(0,0,0))(\sigma,0,0)=(0,0,0)\in S(0,0,0)$, 由引理3, 可得$G'(0,0,0)$具有$\alpha$性质, 故

$$\operatorname{index}E(G,(0,0,0))=0.$$

(iii) 当$a_2>\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, $a_3>\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$时, 由(3)有

$$G'(\theta_{a_1},0,0)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix} a_1-2\theta_{a_1}+M&-b_1\theta_{a_1}&0\\ 0&a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M&0\\ 0&0&a_3+\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M\end{pmatrix}, \tag{5}$$

由引理3, 类似(ii)可得$I-G'(\theta_{a_1},0,0)$在$E(\theta_{a_1},0,0)$上是可逆的, 并且$G'(\theta_{a_1},0,0)$在$E(\theta_{a_1},0,0)$上具有α性质, 故$\operatorname{index}E(G,(\theta_{a_1},0,0))=0$.

假设$a_2<\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, $a_3<\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$. 记$A=(-\Delta+M)^{-1}(a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M)$, 由引理2知, $r(A)<1$, 所以$G'(\theta_{a_1},0,0)$在$E(\theta_{a_1},0,0)$上具有α性质, 故存在$0<\tau<1$, 及$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in$

$E(\theta_{a_1},0,0)$使得$(I-\tau E(\theta_{a_1},0,0)(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3))\in S(\theta_{a_1},0,0)$, 即有$\sigma_2-\tau(-\varDelta+M)^{-1}(a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M)\sigma_2=0$, 则$\frac{1}{\tau}>1$是算子$A$的一个特征值, 则与$r(A)<1$矛盾, 所以$G'(\theta_{a_1},0,0)$在$E(\theta_{a_1},0,0)$上不具有$\alpha$性质, 故index$E(G,(\theta_{a_1},0,0))=(-1)^{\beta}$, 其中$\beta$是$G'(\theta_{a_1},0,0)$的所有大于1的特征值的代数和.

假设$\frac{1}{\tau}$是$G'(\theta_{a_1},0,0)$的一个特征值, 其对应的特征函数为$(\xi,\eta,\varsigma)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$\begin{cases}-\varDelta\xi+M\xi=\tau(a_1-2\theta_{a_1}+M)\xi-\tau b_1\theta_{a_1}\eta, t\in\varOmega,\\ -\varDelta\eta+M\eta=\tau(a_2+\dfrac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M)\eta, t\in\varOmega,\\ -\varDelta\varsigma+M\varsigma=\tau(a_3+\dfrac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}+M)\varsigma, t\in\varOmega,\\ \xi=\eta=\varsigma=0, t\in\partial\varOmega.\end{cases}\tag{6}$$

若$\eta\neq0$, 由(6)可得

$$0\geq\lambda_1(M(1-\tau)-\tau(a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}))>\lambda_1(-(a_2+\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}))=-a_2+\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}),$$

所以$a_2>\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, 与$a_2<\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$矛盾, 所以$\eta=0$. 同理若$\varsigma\neq0$, 由(6)有

$$0\geq\lambda_1(M(1-\tau)-\tau(a_3+\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}))>\lambda_1(-(a_3+\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}))=-a_3+\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}}),$$

所以$a_3>\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, 与$a_3<\lambda_1(-\frac{b_3\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$是矛盾, 从而$\varsigma=0$.

又由定理1知, $\theta_{a_1}<a_1$, 则由(6)得

$$0\geq\lambda_1(M(1-\tau)-\tau(a_1-2\theta_{a_1})>\lambda_1(-\tau(a_1-\theta_{a_1}))>\lambda_1(-(a_1-\theta_{a_1}))=0,$$

矛盾, 故$G'(\theta_{a_1},0,0)$是没有大于1的特征值, 所以index$E(G,(\theta_{a_1},0,0))=1$.

引理8[14] (i) 当$a_1>\lambda_1$或$a_2\neq\lambda_1(-\frac{b_2\theta_{a_1}}{1+c\theta_{a_1}})$, $a_3\neq\lambda_1$时.

如果$a_1>\lambda_1$或$a_3>\lambda_1$, 则有index$E(G,(\theta_{a_1},0,0))=0$;

如果$a_1<\lambda_1$, $a_2<\lambda_1$且$a_3<\lambda_1$, 则有index$E(G,(\theta_{a_1},0,0))=1$.

(ii) 设$a_2>\lambda_1$, $a_1\neq\lambda_1(b_1\theta_{a_2})$, $a_3\neq\lambda_1$.

若$a_1>\lambda_1$或$a_3>\lambda_1$, 则index$E(G,(0,\theta_{a_2},0))=0$;

若$a_1<\lambda_1$, 且$a_3<\lambda_1$, 则index$E(G,(0,\theta_{a_2},0))=1$.

定理2 (i) 如果$a_1>\lambda_1(b_1\theta_{a_2})$, $a_2>\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$, 则模型(1)必存在共存解;

(ii) 如果$a_1>\lambda_1$, $\bar{a}_2<a_2<\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$, 则模型(1)必存在共存解.

证 (i) 假设模型(1)不存在共存解, 则由引理7-引理8可得

$$\begin{aligned}1=\mathrm{index}E(I-G,D)=\mathrm{index}E(G,(0,0,0))+\mathrm{index}E(G,(\theta_{a_1},0,0))+\\ \mathrm{index}E(G,(0,\theta_{a_2},0))+\mathrm{index}E(G,(0,0,\hat{z}))=0,\end{aligned}$$

是矛盾的, 所以模型(1)必定存在共存解.

(ii) 假设模型(1)不存在共存解, 则由引理6-引理7得

$$\begin{aligned}1=\mathrm{index}E(I-G,D)=\mathrm{index}E(G,(0,0,0))+\\ \mathrm{index}E(G,(\theta_{a_1},0,0))+\mathrm{index}E(G,(0,\theta_{a_2},\hat{z}))=0,\end{aligned}$$

是矛盾的, 所以模型(1)必定存在共存解.

定理3 在系统(1)中,

(i) 设$a_1>\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$, $a_2<\bar{a}_2$, 则该系统没有正解.

(ii) 设$a_3>\lambda_1$, $\bar{a}_2<a_2<\lambda_1$, 存在常数$\bar{a}_1$. 当$a_1>\bar{a}_1>\lambda_1$时, 则该系统至少存在一个正

解; 当$a_1<\bar{a}_1<\lambda_1$时, 则该系统没有正解.

证 (ⅰ) 假设系统(1)存在正解, 由引理6可得$a_2>\bar{a}_2$, 与已知$a_2<\bar{a}_2$矛盾, 所以系统(1)没有正解.

(ⅱ) 由已知, 当$a_1>\bar{a}_1>\lambda_1$时, 由定理2可得系统(1)至少存在一个正解.

当$a_1<\bar{a}_1<\lambda_1$时, 假设系统(1)存在正解, 由引理6可得$a_1>\lambda_1$, 与已知$a_1<\bar{a}_1<\lambda_1$矛盾, 所以系统(1)没有正解.

定理4 在系统(1)中, 设$a_2\le\lambda_1$, $a_3>\lambda_1$, 如果存在$\varepsilon>0$, 当$\lambda_1<a_1\le\lambda_1+\varepsilon$, $c\ge 0$时, 则该系统至少存在一个非退化的、线性的、稳定的正解.

证 由定理的条件, 只需证明该系统的任意正解是非退化的、线性的即可. 反之, 假设在系统(1)中存在$a_{1,i}\to\lambda_1^+$, $c_i\to c\ge 0$, $a_{2,i}\le\lambda_1$, 使得$(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)$为退化的或不稳定的正解, 则一定存在$\gamma_i$, $\mathrm{Re}(\gamma_i)\le 0$, 且$(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i,)\ne(0,0,0)$, $\|\xi_i\|_{L^2}^2+\|\eta_i\|_{L^2}^2+\|\varsigma_i\|_{L^2}^2=1$, 有

$$\begin{cases}-\Delta\xi_i-(a_{1,i}-2x_i-b_1y_i-\dfrac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})\xi_i+(b_1x_i+\dfrac{c_1x_iz_i}{(1+ey_i)^2})\eta_i+\dfrac{c_1x_iy_i}{1+ey_i}\varsigma_i=\gamma_i\xi_i,t\in\Omega,\\ -\Delta\eta_i-\dfrac{b_2y_i}{(1+c_ix_i)^2(1+dz_i)}\xi_i-(a_{2,i}-2y_i+\dfrac{b_2x_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)})\eta_i+\\ \dfrac{b_2dx_iy_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)^2}\varsigma_i=\gamma_i\eta_i,t\in\Omega,\\ -\Delta\varsigma_i-\dfrac{b_3z_i}{(1+c_ix_i)^2(1+ey_i)}\xi_i+\dfrac{b_3ez_ix_i}{(1+c_ix_i)(1+ey_i)^2}\eta_i-\\ (a_{3,i}-2z_i+\dfrac{b_3x_i}{(1+c_ix_i)(1+ey_i)})\varsigma_i=\gamma_i\varsigma_i,t\in\Omega,\\ \xi_i=\eta_i=\varsigma_i=0,t\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{7}$$

在L^∞中, 由定理1和引理3可知$0<x_i<\theta_{a_{1,i}}$, 得$x_i\to 0$.

再由(1)可得$y_i<\bar{y}<\theta_{R_4}$, 其中$R_4=a_{2,i}+\frac{b_2\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty}{(1+c\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty)(1+d\|\hat{z}\|_\infty)}$. 由$y_i\ne 0$, 有$a_{2,i}+\frac{b_2\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty}{(1+c\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty)(1+d\|\hat{z}\|_\infty)}>\lambda_1$, 可得$\lambda_1-\frac{b_2\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty}{(1+c\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty)(1+c\|\hat{z}\|_\infty)}<a_{2,i}\le\lambda_1$. 又$a_{1,i}\to\lambda_1^+$, 有$\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty\to 0$, 所以$a_{2,i}\to\lambda_1$, 再由$R_4$得$y_i\to 0$.

同理可得$\hat{z}<z_i<\theta_{R_5}$, $z_i\to\hat{z}$, 其中$R_5=a_{3,i}+\frac{b_3\|\theta_{a_{1,i}}\|_\infty}{(1+c\|x_i\|_\infty)(1+e\|\bar{y}\|_\infty)}$.

令$X_i=\frac{x_i}{\|x_i\|_\infty}$, 则由系统(1)有$-\Delta X_i=X_i(a_{1,i}-x_i-b_1y_i-\frac{c_iz_iy_i}{1+ey_i})$, $t\in\Omega$; $X_i=0$, $t\in\partial\Omega$. 由Sobolev嵌入定理及L^∞估计, 得$X_i\to\bar{X}\ge 0,\ne 0$, 由Harnack不等式, 得$\bar{X}>0$, $t\in\Omega$. 在C^1中, 取极限, 得$\frac{x_i}{\|x_i\|_\infty}\to\upsilon_1$. 同理$\frac{y_i}{\|y_i\|_\infty}\to\upsilon_1$.

令$x_i=n_i(\upsilon_1+s_i)\cos\beta_i$, $y_i=n_i(\upsilon_1+l_i)\sin\beta_i$, 其中$\beta_i\in(0,\frac{\pi}{2})$, $s_i\to 0$, $l_i\to 0$, $(\upsilon_1,s_i)_2=0$, $(\upsilon_1,l_i)_2=0$, 且$n_i=\sqrt{\frac{\|x_i\|_\infty^2}{\|\upsilon_1+s_i\|_\infty^2}+\frac{\|y_i\|_\infty^2}{\|\upsilon_1+l_i\|_\infty^2}}\to 0^+$, 记$\xi_i$, η_i, ς_i的共轭算子分别为$\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$, $\bar{\varsigma}_i$, 则由(7)得

$$\gamma_i=\int_\Omega|\nabla\xi_i|^2\mathrm{d}t-\int_\Omega(a_{1,i}-2x_i-b_1y_i-\frac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})|\xi_i|^2\mathrm{d}t+\int_\Omega(b_1x_i+\frac{c_1x_iz_i}{(1+ey_i)^2})\eta_i\bar{\xi}_i\mathrm{d}t+$$
$$\int_\Omega\frac{c_1x_iy_i}{1+ey_i}\varsigma_i\bar{\xi}_i\mathrm{d}t+\int_\Omega|\nabla\eta_i|^2\mathrm{d}t-\int_\Omega\frac{b_2y_i}{(1+c_ix_i)^2(1+dz_i)}\xi_i\bar{\eta}_i\mathrm{d}t-$$
$$\int_\Omega(a_{2,i}-2y_i+\frac{b_2x_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)})|\eta_i|^2\mathrm{d}t+\int_\Omega\frac{b_2dx_iy_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)^2}\varsigma_i\bar{\eta}_i\mathrm{d}t+\int_\Omega|\Delta\varsigma_i|^2\mathrm{d}t-$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{b_3 z_i}{(1+c_i x_i)^2(1+ey_i)}\xi_i\bar{\varsigma}_i\mathrm{d}t+\int_\Omega \frac{b_3 e x_i z_i}{(1+c_i x_i)(1+ey_i)^2}\eta_i\bar{\varsigma}_i\mathrm{d}t-\\&\int_\Omega (a_{3,i}-2z_i+\frac{b_3 x_i}{(1+c_i x_i)(1+ey_i)})|\varsigma_i|^2\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{8}$$

由于x_i,y_i,z_i均为有界, 故$\mathrm{Re}(\gamma_i),\mathrm{Im}(\gamma_i)$也是有界, 即$\gamma_i$也有界. 所以当$\gamma_i\to\gamma$时, 可知$\mathrm{Re}(\gamma)\le 0$. 由$L^\infty$的估计, 可得$\xi_i,\eta_i,\varsigma_i$均有界, 可设$\xi_i\to\xi,\eta_i\to\eta,\varsigma_i\to\varsigma$, 则对(7)两边取极限, 可得

$$\begin{cases}-\Delta\xi-\lambda_1\xi=\gamma\xi, t\in\Omega,\\ -\Delta\eta-\lambda_1\eta=\gamma\eta, t\in\Omega,\\ -\Delta\varsigma-(a_3-2\hat{z})\varsigma-b_3\bar{z}\xi=\gamma\varsigma, t\in\Omega,\\ \xi=\eta=\varsigma=0, t\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{9}$$

则γ为实的. 若$\xi=0$, 有$-\Delta\varsigma-(a_3-2\hat{z})\varsigma=\gamma\varsigma$, 所以$\gamma>\lambda_1(a_3-2\hat{z})>0$, 与$\mathrm{Re}(\gamma)\le 0$是矛盾的, 所以$\xi\ne 0$. 当$\gamma=0$时, 由(9)可得$\xi=m_1\upsilon_1$, $\eta=m_2\upsilon_1$, $\varsigma=(-\Delta-(a_3-2\hat{z}))^{-1}(b_3\hat{z}m_1\upsilon_1)$, 其中$m_1,m_2$为实数且$(m_1,m_2)\ne(0,0)$.

由(7)及Kato's不等式得

$$\begin{aligned}&-\Delta|\eta_i|\le-\mathrm{Re}(\frac{\bar{\eta}_i}{|\eta_i|}\cdot\Delta\eta_i)\le(a_{2,i}-2y_i+\frac{b_2 x_i}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)})|\eta_i|+\mathrm{Re}(\gamma_i)|\eta_i|+\\&\frac{b_2 y_i}{(1+c_i x_i)^2(1+dz_i)}|\xi_i|-\frac{d b_2 x_i y_i}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)^2}|\varsigma_i|.\end{aligned}\tag{10}$$

对(1)的两边同时乘以$|\eta|$, 再对(10)的两边同时乘以y_i, 并积分得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \Delta|\eta_i|y_i\mathrm{d}t=\int_\Omega (a_{2,i}-y_i+\frac{b_2 x_i}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)})|\eta_i|y_i\mathrm{d}t\le\\&\int_\Omega (a_{2,i}-2y_i+\frac{b_2 x_i}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)})|\eta_i|y_i\mathrm{d}t+\int_\Omega \mathrm{Re}(\gamma_i)|\eta_i|y_i\mathrm{d}t+\\&\int_\Omega \frac{b_2 y_i^2}{(1+c_i x_i)^2(1+dz_i)}|\xi_i|\mathrm{d}t-\int_\Omega \frac{d b_2 x_i y_i^2}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)^2}|\varsigma_i|\mathrm{d}t\le\\&\int_\Omega (a_{2,i}-2y_i+\frac{b_2 x_i}{(1+c_i x_i)(1+dz_i)})|\eta_i|y_i\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathrm{Re}(\gamma_i)|\eta_i|y_i\mathrm{d}t+\int_\Omega b_2 y_i^2|\xi_i|\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{11}$$

即有

$$\int_\Omega y_i^2|\eta_i|\mathrm{d}t\le b_2\int_\Omega y_i^2|\eta_i|\mathrm{d}t+\mathrm{Re}(\gamma_i)\int_\Omega |\eta_i|y_i\mathrm{d}t\le b_2\int_\Omega y_i^2|\xi_i|\mathrm{d}t,\tag{12}$$

即

$$\int_\Omega (\frac{y_i}{\|y_i\|})^2|\eta_i|\mathrm{d}t\le\int_\Omega b_2(\frac{y_i}{\|y_i\|})^2|\xi_i|\mathrm{d}t.$$

两边取极限, 得$\int_\Omega \upsilon_1^2|\eta_i|\mathrm{d}t\le b_2\int_\Omega \upsilon_1^2|\xi_i|\mathrm{d}t$, 当$m_1\ne 0$时, 有$|m_2|\le b_2|m_1|$, 令$m_1=1$, 则$\xi_i=\upsilon_1$, $\eta_i=h\upsilon_1$, $\varsigma_i\to(-\Delta-(a_3-2\hat{z}))^{-1}(b_3\hat{z}\upsilon_1)\triangleq R_3\upsilon_1$. 可令$\xi_i=\upsilon_1+\hat{\xi}_i$, $\eta_i=h_i(\upsilon_1+\hat{\eta}_i)$, 其中$(\upsilon_1,\hat{\xi}_i)_2=0$, $(\upsilon_1,\hat{\eta}_i)_2=0$, $\hat{\xi}_i\to 0$, $\hat{\eta}_i\to 0$, $h_i\to h$.

由(7)的第一个方程两边乘以υ_1, 取积分

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (-\Delta\xi_i)\upsilon_1\mathrm{d}t=\int_\Omega (a_{1,i}-2x_i-b_1 y_i-\frac{c_1 y_i z_i}{1+ey_i})\upsilon_1\xi_i\mathrm{d}t-\\&\int_\Omega (b_1 x_i+\frac{c_1 x_i z_i}{(1+ey_i)^2})\eta_i\upsilon_i\mathrm{d}t-\int_\Omega \frac{c_1 x_i y_i}{1+ey_i}\varsigma_i\upsilon_i\mathrm{d}t+\int_\Omega \gamma_i\xi_i\upsilon_1\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{13}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lambda_1\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=a_{1,i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t+\gamma_i\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t-\\&\int_\Omega(2x_i+b_1y_i+\frac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})\upsilon_1\xi_i\mathrm{d}t-\int_\Omega(b_1x_i+\frac{c_1x_iz_i}{(1+ey_i)^2})\eta_i\upsilon_1\mathrm{d}t-\int_\Omega\frac{c_1x_iy_i}{1+ey_i}\varsigma_i\upsilon_1\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{14}$$

即

$$\begin{aligned}&(a_{1,i}-\lambda_1)\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t+\gamma_i\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=\\&\int_\Omega(2x_i+b_1y_i+\frac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})\upsilon_1\xi_i\mathrm{d}t+\int_\Omega(b_1x_i+\frac{c_1x_iz_i}{(1+ey_i)^2})\eta_i\upsilon_1\mathrm{d}t+\int_\Omega\frac{c_1x_iy_i}{1+ey_i}\varsigma_i\upsilon_1\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{15}$$

将$x_i=n_i(\upsilon_1+s_i)\cos\beta_i$, $y_i=n_i(\upsilon_1+l_i)\sin\beta_i$代入上式, 两边除以$n_i$, 并取极限, $\beta_i\to\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}(\frac{a_{1,i}-\lambda_1}{n_i}+\frac{\gamma_i}{n_i})\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=\int_\Omega(2\cos\beta+b_1\sin\beta+\frac{c_1\hat{z}\sin\beta}{1+en_i\upsilon_1\sin\beta}+\\&b_1h\cos\beta+\frac{c_1h\bar{z}\cos\beta}{(1+en_i\upsilon_1\sin\beta)^2}+\frac{c_1R_3\cos\beta\sin\beta}{(\upsilon_1n_i)^{-1}+e\sin\beta})\upsilon_1^3\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{16}$$

对方程(1)的第一个方程$-\Delta x_i=x_i(a_{1,i}-x_i-b_1y_i-\frac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})$的两边同除以$n_i\cos\beta_i$, 再乘以$\upsilon_1$, 并求积分, 有

$$\lambda_1\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=a_{1,i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t-\int_\Omega(\upsilon_1+s_i)(x_i+b_1y_i+\frac{c_1y_iz_i}{1+ey_i})\upsilon_1\mathrm{d}t.\tag{17}$$

将$x_i=n_i(\upsilon_1+s_i)\cos\beta_i$, $y_i=n_i(\upsilon_1+l_i)\sin\beta_i$, 代入(17), 两边同时除以$n_i$, 取极限得

$$\lim_{i\to\infty}(\frac{a_{1,i}-\lambda_1}{n_i})\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=\int_\Omega(\cos\beta+b_1\sin\beta+\frac{c_1\hat{z}\sin\beta}{1+en_i\upsilon_1\sin\beta})\upsilon_1^3\mathrm{d}t.\tag{18}$$

由(16), (18)得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\gamma_i}{n_i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=\int_\Omega(\cos\beta+b_1h\sin\beta+\frac{c_1h\bar{z}\cos\beta}{(1+en_i\upsilon_1\sin\beta)^2}+\frac{c_1R_3\sin\beta\cos\beta}{(n_i\upsilon_1)^{-1}+e\sin\beta})\upsilon_1^3\mathrm{d}t.\tag{19}$$

同理由(1)的$-\Delta y_i=y_i(a_{2,i}-y_i+\frac{b_2x_i}{(1+cx_i)(1+dz_i)})$的两边同时除以$n_i\sin\beta_i$, 再乘以$\upsilon_1$, 再求积分得

$$\lambda_1\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=a_{2,i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t-\int_\Omega(y_i-\frac{b_2x_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)})\upsilon_1^2\mathrm{d}t.\tag{20}$$

两边同除以n_i, 取极限得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{a_{2,i}-\lambda_1}{n_i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=(\sin\beta-\frac{b_2\cos\beta}{(1+\bar{c}\upsilon_1n_i\cos\beta)(1+d\hat{z})})\int_\Omega \upsilon_1^3\mathrm{d}t.\tag{21}$$

因为$a_{2,i}\le\lambda_1$, 当$\beta\ne0$时, 则$\bar{c}\ne\infty$. 当$h_i\to h=0$时, 由(19)得$\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\gamma_i}{n_i}\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t=\int_\Omega(\cos\beta+\frac{c_1R_3\cos\beta\sin\beta}{(\upsilon_1n_i)^{-1}+e\sin\beta})\upsilon_1^3\mathrm{d}t>0$, 与$\mathrm{Re}(\gamma_i)\le0$矛盾, 所以$h\ne0$.

对(7)的第二个方程的两边乘以y_i, 求积分得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega y_i\Delta\eta_i\mathrm{d}t=\int_\Omega\frac{b_2y_i^2}{(1+c_ix_i)^2(1+dz_i)}\xi_i\mathrm{d}t+\int_\Omega(a_{2,i}-2y_i+\frac{b_2x_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)})y_i\eta_i\mathrm{d}t-\\&\int_\Omega\frac{db_2x_iy_i^2}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)^2}\varsigma_i\mathrm{d}t+\int_\Omega y_i\gamma_i\eta_i\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{22}$$

再由(1), 两边乘以η_i, 求积分得

$$-\int_\Omega y_i\Delta\eta_i\mathrm{d}t=\int_\Omega(a_{2,i}-y_i+\frac{b_2x_i}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)})y_i\eta_i\mathrm{d}t.\tag{23}$$

由(22)-(23)可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega y_i^2\eta_i\mathrm{d}t=&\int_\Omega \frac{b_2y_i^2}{(1+c_ix_i)^2(1+dz_i)}\xi_i\mathrm{d}t-\\ b_2d&\int_\Omega\frac{x_iy_i^2}{(1+c_ix_i)(1+dz_i)^2}\varsigma_i\mathrm{d}t+\gamma_i\int_\Omega y_i\eta_i\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{24}$$

两边同时除以$h_i(n_i\sin\beta_i)^2$, 取实部, 可得

$$\int_\Omega \upsilon_1^2\mathrm{d}t\le \mathrm{Re}(\frac{1}{h})b_2\int_\Omega\frac{\upsilon_i^3}{(1+cn_i\upsilon_1\cos\beta)^2(1+d\hat{z})}\mathrm{d}t+\mathrm{Re}(\frac{\gamma_i}{n_i})\int_\Omega\frac{1}{\sin\beta}\upsilon_1^2\mathrm{d}t.\tag{25}$$

由(19)有$\lim\limits_{i\to\infty}\mathrm{Re}(\frac{\gamma_i}{n_i})\int_\Omega\frac{1}{\sin\beta}\upsilon_1^2\mathrm{d}t>0$, 与矛盾$\mathrm{Re}(\gamma_i)\le 0$. 定理得证.

§5 结束语

为了自然界保持生物种群的丰富多样性, 各种群都能持续生存下去而不至于灭绝, 对于三种群捕食-食饵系统在齐次Dirichlet边值下, 在满足一定的条件下的正解的存在性、唯一性、稳定性、多重性、分歧等问题的研究工作, 是非常必要的. 本文的研究结果表明, 系统(1)在满足必要的条件下, 至少存在一个非退化的、线性的、稳定的正解, 说明三物种种群都能一代一代的持续生存繁衍下去, 而不会灭绝.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见, 同时感谢四川高等学校科研创新团队项目计划(18TD0047)的资助.

参考文献:

[1] 李海侠. 一类带有比率依赖型反应函数的捕食-食饵模型正解的存在性和多重性[J]. 浙江大学学报(理学版), 2016, 43(2): 156-163.

[2] 刘清, 李艳玲, 杨文彬. 一类基于比率的广义Holling-Tanner系统的定性分析[J]. 工程数学学报, 2014, 31(6): 879-888.

[3] 杨梦娜, 李艳玲. 一类捕食-食饵模型正解的存在唯一性与稳定性[J]. 工程数学学报, 2020, 37(3): 281-294.

[4] 袁海龙, 李艳玲. 一类捕食-食饵模型共存解的存在性与稳定性[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(1): 15-18.

[5] 张艳芳, 陈文彦. 一类捕食模型正解的唯一性和稳定性[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2010, 40(4): 882-884.

[6] 代净玉, 李艳玲. 一类带有加法Allee效应的捕食-食饵模型共存解的唯一性和稳定性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(11): 6-17.

[7] 吴建华, 杨文彬. 具有IvIev功能反应的捕食-食饵模型在零解的分歧[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(6): 1-7.

[8] 王治国, 李艳玲. 一类具有催化反应扩散模型共存解的分析[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2011, 39(1): 10-14.

[9] 李大华. 一类食物链模型的周期解的二级分歧[J]. 数学物理学报, 1992, S1: 138-139.

[10] 雒志学, 杜明银. 一类具年龄结构n维食物链模型的最优收获控制[J]. 应用数学和力学, 2008(5): 618-630.

[11] 陈滨, 王明新. 一类三种群捕食模型的正解[J]. 数学物理学报, 2008, 28A(6): 1256-1266.

[12] Ko W, Ryu K. Analysis of diffusive two-competing-prey and one-predator systems with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2009, 71(9): 4185-4202.

[13] Yang Wenbin, Li Yanling, Wu Jianhua, et al. Dynamics of a food chain model with ratio-dependent and modified Leslie-Gower functional responses[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2015, 20(7): 2269-2290.

[14] 李海侠. 一类食物链模型正解的稳定性和唯一性[J]. 数学物理学报, 2017, 37A(6): 1094-1104.

[15] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社, 2011, 106-137.

[16] 王明新. 非线性椭圆方程[M]. 北京: 科学出版社, 2010, 155-169.

[17] 杨文彬, 李艳玲. 一类具有非单调生长率的捕食-食饵系统的动力学[J]. 山东大学学报, 2015, 50(3): 80-94.

[18] 代净玉, 李艳玲. 一类带有加法Allee效应的捕食-食饵模型共存解的唯一性和稳定性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(11): 6-17.

[19] 范示示, 李海侠, 路银豆. 具有捕获项的Beddington-DeAnglis型捕食-食饵扩散模型的动力学分析[J]. 数学物理学报, 2023, 43(6): 1929-1942.

[20] 李海侠. 一类具有非线性捕获项的捕食-食饵扩散模型正解的稳定性和唯一性[J]. 应用数学学报, 2023, 46(4): 673-688.

[21] Dancer E N. On the indices of fixed points of mapping in cones and applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 91(1): 131-151.

Stability of positive solutions for a class of three-species food chain models

DONG Biao

(Department of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan 623002, China)

Abstract: This paper studies the stability of positive solutions for a type of three-species prey-predator model under homogeneous Dirichlet boundary conditions. Utilizing the Fréchet derivative, the maximum principle, the method of upper and lower solutions, the fixed point index theory for linear operators, compactness theory, and the homotopy invariance of degree, the paper discusses the conditions required for the existence of positive solutions for this class of food chain models. It provides the conditions under which the system has a linear, non-degenerate, and stable positive solution under homogeneous Dirichlet boundary conditions.

Keywords: response function; fixed point index; stability; food chain model

MR Subject Classification: 35B35; 35K57