

# 具有进化效应的SIS模型的稳定性和Hopf分支分析

马秋敏, 管俊彪\*

(杭州电子科技大学 理学院, 浙江杭州 310018)

**摘要:** 研究了一类具有种群Logistic增长特性及进化效应的SIS模型的动力学行为. 首先, 建立数学模型, 并对解的存在性、非负性和有界性等基本性质进行了证明; 其次, 讨论了系统平衡点的稳定性问题, 分析了Hopf分支周期解存在的充分条件, 并利用中心流形定理讨论Hopf分支的性质; 最后, 为了验证理论结果的准确性, 选取了合适的参数对系统进行了数值模拟.

**关键词:** SIS模型; 进化效应; 稳定性; Hopf分支

**中图分类号:** O175.14

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4424(2026)01-0108-09

## §1 引言

传染病模型作为生物数学研究的重要内容, 一直受到广泛关注. 其中SIS模型为传染病模型中较为典型的一类模型<sup>[1-4]</sup>. 传统SIS模型通常聚焦于接触率、恢复率等核心参数对传染病传播的影响, 为理解疾病传播的基本动态特性奠定了坚实的基础.

然而, 现有研究在模拟传染病传播的适应性变化过程中存在显著局限性. 具体表现为: 1. 参数静态假设的不足: 传统SIS模型(比如说文献[5])通常假设易感人群的防御能力和已感染人群的感染能力是固定不变的, 未能充分考虑二者在传播过程中的动态协同演化效应; 2. 模型适用性局限: 虽然现有研究多聚焦于在传染病模型中引入时滞和进化效应, 但这些研究多集中于具有持久免疫力的SIR模型或复杂网络/空间环境, 其动力学行为分析也往往侧重于全局稳定性或复杂环境下的模式形成<sup>[6-8]</sup>; 3. 短期动态研究的缺失: 文献[8]的SIR模型虽引入了进化机制, 但其未能充分反映易感人群和已感染人群在短期内的反复感染现象, 且对进化效应诱导的振荡行为及其稳定性缺乏深入探讨.

基于上述分析, 本文提出了一种具有易感人群对传染病的防御和传染病对易感人群攻击作用的扩散传染病模型. 与现有文献中的SIS模型相比, 本文提出的模型将易感人群的防御能力和

收稿日期: 2024-03-28 修回日期: 2025-08-12

\*通讯作者, E-mail: jbguan@hdu.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY21G010004)

已感染人群的感染能力纳入动力学分析框架中, 通过耦合防御能力与感染能力的动态变化, 构建了描述易感人群防御-已感染人群感染能力协同进化的反馈机制. 在该模型中, 易感人群的内禀自然增长率不仅受到其固有生物学特性的影响, 还取决于其对病毒的防御能力. 而传染病对易感人群的感染率并非单一因素所决定, 而是由易感人群自身的防御能力与已感染人群的感染能力共同影响、相互作用而得出的结果. 因此考虑模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = m(u) \left(1 - \frac{S}{K}\right) S - \frac{\beta(u, v)SI}{1 + \alpha S} + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta(u, v)SI}{1 + \alpha S} - (\gamma + \mu)I. \end{cases} \quad (1)$$

模型参数的含义, 见表1中的详细说明. 函数 $m(u)$ ,  $\beta(u, v)$ 的假设如下.

1) 防御能力 $u$ 和易感人群的内禀自然增长率 $m$ 之间的关系假设为 $m(u) = m_0 e^{-c_1 u^2}$ . (可参考文献[6])

2) 易感人群的感染率为 $\beta(u, v) = \frac{\beta_0}{1 + e^{\theta(u-v)}}$ , 它直接反映了传染病在易感人群中的传播速度, 且这一感染率并非固定不变, 而是由易感人群自身的防御能力和已感染人群的感染能力共同决定的[7].

表1 模型(1)参数的含义

参数	含义
$S$	易感染人群的数量
$I$	已感染人群的数量
$u$	易感人群自身的防御能力
$v$	已感染人群的感染能力
$m(u)$	内禀自然增长率
$K$	环境负荷量
$\beta(u, v)$	感染率
$\gamma$	移出率
$\mu$	疾病死亡率
$\alpha$	饱和参数
$m_0$	最大自然增长率
$c_1$	防御成本
$\beta_0$	最大感染率
$\theta$	感染率在不同人群之间差异的敏感度

这里系统(1)的初始条件为 $S(0) = S_0 \geq 0$ ,  $I(0) = I_0 \geq 0$ 且 $S(0) + I(0) < K$ .

## §2 模型的基本性质

基于生物模型的实际意义, 首先需要验证系统(1)解的非负性、有界性及一致有界性<sup>[9-10]</sup>. 为此引入以下定理.

**定理2.1** 在给定的初始条件下, 系统(1)的解对任意 $t > 0$ 是唯一存在的, 且非负有界.

**证** 由于系统(1)满足局部Lipschitz条件, 即存在某个 $c > 0$ , 使得其解在区间 $[0, c)$ 内唯一存

在. 下证 $S$ 和 $I$ 的正性. 若 $S(0) = 0$ , 则有 $S(t) \equiv 0$ . 故假设 $S(0) > 0$ , 则

$$S'(t) = S(t) \left[ m(u) \left( 1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \frac{\beta(u, v)I(t)}{1 + \alpha S(t)} \right] + \gamma I(t) \geq S(t) \left[ m(u) \left( 1 - \frac{S(t)}{K} \right) - \frac{\beta(u, v)I(t)}{1 + \alpha S(t)} \right],$$

对于任意 $t > 0$ , 利用常数变易法可得

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t [m(u)(1 - \frac{S(x)}{K}) - \frac{\beta(u, v)I(x)}{1 + \alpha S(x)}] dx} > 0. \quad (2)$$

由此可得 $S$ 的正性. 而对于 $I$ 的正性, 由 $I'(t) = I(t) \left[ \frac{\beta(u, v)I(t)}{1 + \alpha S(t)} - \gamma - \mu \right]$ 有

$$I(t) = I(0)e^{\int_0^t [\frac{\beta(u, v)I(x)}{1 + \alpha S(x)} - \gamma - \mu] dx} > 0. \quad (3)$$

证得 $S$ 和 $I$ 的非负性.

于是 $(S + I)' = m(u) \left( 1 - \frac{S + I}{K} \right) S - \mu I \leq -\frac{m_0}{K} (S + I - K)S$ , 而 $S(0) + I(0) < K$ , 故有

$$S(t) + I(t) \leq K + [S(0) + I(0) - K]e^{-\frac{m_0}{K} \int_0^t S(z) dz} \leq K. \quad (4)$$

从而可证出 $S$ 和 $I$ 的有界性.

此外对任意 $t > 0$ , 由系统(1)的解的非负性可得

$$\dot{S}(t) \leq m(u) \left( 1 - \frac{S}{K} \right) S + \gamma I,$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq K$ . 令 $V(t) = S(t) + I(t)$ , 则有

$$\dot{V}(t) = \dot{S}(t) + \dot{I}(t) = m(u) \left( 1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t) - \mu I(t).$$

不妨取 $\mu$ 为一个非常小的正数, 故有

$$\dot{V}(t) + \mu V(t) = m(u) \left( 1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t) + \mu S(t).$$

因此存在一个正常数 $L$ , 使得 $\dot{V}(t) + \mu V(t) \leq L$ . 从而可得

$$V(t) \leq \left( V(0) - \frac{L}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{L}{\mu}, \quad (5)$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + I(t)] \leq \frac{L}{\mu}$ . 即可证出系统(1)中解是一致有界的.

### §3 稳定性与分支分析

本节主要分析平衡点的稳定性, 并探讨是否存在Hopf分支现象, 进一步推导出分支周期解存在的充分条件. 显然, 系统(1)存在唯一的无病平衡点 $E_1 = (K, 0)$ .

**定理3.1** 无病平衡点 $E_1$ 在 $\beta(u, v) < (\mu + \gamma) \left( \alpha + \frac{1}{K} \right)$ 时是局部渐近稳定的, 在 $\beta(u, v) > (\mu + \gamma) \left( \alpha + \frac{1}{K} \right)$ 时不稳定.

**证** 系统(1)在 $E_1$ 处的Jacobian矩阵为

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -m(u) & -\frac{\beta(u, v)K}{1 + \alpha K} + \gamma \\ 0 & \frac{\beta(u, v)K}{1 + \alpha K} - (\mu + \gamma) \end{pmatrix},$$

在 $E_1$ 处的特征方程为

$$(-m(u) - \lambda) \left( \frac{\beta(u, v)K}{1 + \alpha K} - (\mu + \gamma) - \lambda \right) = 0. \quad (6)$$

显然只需 $\beta(u, v) < (\mu + \gamma) \left( \alpha + \frac{1}{K} \right)$ , 就有 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . 此时 $E_1$ 满足局部渐近稳定条件. 反之则 $E_1$ 不稳定.

**定理3.2** 无病平衡点 $E_1$ 在 $\beta(u, v) \leq (\mu + \gamma)\left(\alpha + \frac{1}{K}\right)$ 时是全局渐近稳定的.

证 构造Lyapunov函数 $V(t) = I(t)$ , 于是

$$\dot{V} = \dot{I} = \frac{\beta(u, v)SI}{1 + \alpha S} - (\mu + \gamma)I < \left[ \frac{\beta(u, v)K}{1 + \alpha K} - (\mu + \gamma) \right] I.$$

当 $\beta(u, v) \leq (\mu + \gamma)\left(\alpha + \frac{1}{K}\right)$ 时,  $\dot{V} \leq 0$ . 而当 $S = K, I = 0$ 时, 有 $\dot{V} = 0$ , 由LaSalle不变集原理<sup>[11]</sup>可知,  $E_1$ 是全局渐近稳定的.

接着, 分析正平衡点 $E_* = (S_*, I_*)$ 的性质. 当 $\beta(u, v) > \alpha(\gamma + \mu)$ 且 $I(0) \neq 0$ 时, 系统(1)的平衡点 $E_* = (S_*, I_*)$ 唯一存在, 即

$$\begin{cases} S_* = \frac{\gamma + \mu}{\beta(u, v) - \alpha(\gamma + \mu)}, \\ I_* = \frac{m(u)S_*(K - S_*)}{\mu K}. \end{cases} \quad (7)$$

$E_*$ 处的Jacobian矩阵为

$$J_{E_*} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{22} & b_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$a_{11} = m(u) \left( 1 - \frac{2S_*}{K} \right) - \frac{\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^2}, \quad a_{22} = \frac{\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^2},$$

$$b_{11} = -\frac{\beta(u, v)S_*}{1 + \alpha S_*} + \gamma, \quad b_{22} = \frac{\beta(u, v)S_*}{1 + \alpha S_*} - (\mu + \gamma).$$

且 $E_*$ 处的Jacobian矩阵对应的特征方程为

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J_{E_*})\lambda + \text{Det}(J_{E_*}) = 0,$$

其中

$$\text{Tr}(J_{E_*}) = a_{11} + b_{22}, \quad \text{Det}(J_{E_*}) = a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}.$$

于是特征方程的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\beta(u, v)) \pm iw(\beta(u, v)) = \frac{\text{Tr}(J_{E_*}) \pm \sqrt{\text{Tr}(J_{E_*})^2 - 4\text{Det}(J_{E_*})}}{2}. \quad (8)$$

当 $a_{11} + b_{22} < 0$   $\left( \beta(u, v) < (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K})) \left( \frac{(1 + \alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2} \right) \right)$  且

$$a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} > 0 \quad (H1)$$

时, 特征方程的根有严格负实部.

此外当 $\beta(u, v) = \beta = (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K})) \left( \frac{(1 + \alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2} \right)$ 时, 可得出 $\text{Tr}(J_{E_*}) = 0$ , 由于 $\text{Det}(J_{E_*}) > 0$ 在(H1)条件下成立, 故 $E_*$ 处的Jacobian矩阵对应的特征方程有一对纯虚根; 选取 $\beta(u, v)$ 作为分支参数, 当 $0 < m(u) < \mu$ 时, 可以得到

$$\left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda(\beta(u, v)))}{d\beta(u, v)} \right\}_{\lambda=iw, \beta(u, v)=\beta} = \frac{(1 + \alpha S_*)S_* - I_*}{(1 + \alpha S_*)^2} > 0. \quad (9)$$

**定理3.3** 假设(H1)成立, 对于系统(1)有下述结论.

- 1) 如果 $a_{11} < 0$ 且 $\gamma\left(\alpha + \frac{1}{S_*}\right) \leq \beta(u, v) \leq (\mu + \gamma)\left(\alpha + \frac{1}{S_*}\right)$ 成立, 则平衡点 $E_*$ 局部渐近稳定.
- 2) 如果 $a_{11} > 0$ 且 $\gamma\left(\alpha + \frac{1}{S_*}\right) < \beta(u, v) < (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K})) \left( \frac{(1 + \alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2} \right)$ 成立, 则平衡点 $E_*$ 局部渐近稳定.
- 3) 如果 $a_{11} > 0$ , 当 $\beta(u, v) = (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K})) \left( \frac{(1 + \alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2} \right)$ 时, 则系统的平衡点 $E_*$ 处产生Hopf分支.

接下来, 将进一步研究分支周期解的稳定性. 为实现这一目标, 采取了特定的坐标变换策略, 通过平移  $\bar{x} = S - S_*$ ,  $\bar{y} = I - I_*$ , 将  $E_*$  平移到原点. 因此系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = m(u) \left(1 - \frac{\bar{x} + S_*}{K}\right) (\bar{x} + S_*) - \frac{\beta(u, v)(\bar{x} + S_*)(\bar{y} + I_*)}{1 + \alpha(\bar{x} + S_*)} + \gamma(\bar{y} + I_*), \\ \dot{\bar{y}} = \frac{\beta(u, v)(\bar{x} + S_*)(\bar{y} + I_*)}{1 + \alpha(\bar{x} + S_*)} - (\mu + \gamma)(\bar{y} + I_*). \end{cases} \quad (10)$$

可写成

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}, \beta(u, v)) \\ h(\bar{x}, \bar{y}, \beta(u, v)) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}, \beta(u, v)) &= \bar{x}^2 \left( \frac{\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} - \frac{m(u)}{K} \right) - \bar{x}\bar{y} \frac{\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} - \\ &\quad \bar{x}^3 \left( \frac{\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4} \right) + \bar{x}^2\bar{y} \left( \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) + O(|(\bar{x}, \bar{y})|^4), \\ h(\bar{x}, \bar{y}, \beta(u, v)) &= -\bar{x}^2 \left( \frac{\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) + \bar{x}\bar{y} \left( \frac{\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} \right) + \\ &\quad \bar{x}^3 \left( \frac{\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4} \right) - \bar{x}^2\bar{y} \left( \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) + O(|(\bar{x}, \bar{y})|^4). \end{aligned}$$

记  $\beta(u, v) = \beta$ , 则  $\lambda_{1,2}(\beta) = \pm iw$ ,  $w = \sqrt{a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}}$  时, 对应于特征值  $\lambda_{1,2}(\beta)$  的一个特征向量是  $\zeta = (-b_{11}, a_{11} - iw)^T$ , 有

$$B = \begin{pmatrix} -b_{11} & 0 \\ a_{11} & -w \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b_{11}} & 0 \\ -\frac{a_{11}}{wb_{11}} & -\frac{1}{w} \end{pmatrix}.$$

通过转换  $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ , 得到

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ h_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

即

$$f_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{1}{b_{11}} f(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}, \beta(u, v)),$$

$$h_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{1}{w} h(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}, \beta(u, v)) - \frac{a_{11}}{wb_{11}} f(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}, \beta(u, v)).$$

其中

$$\begin{aligned} f(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}, \beta(u, v)) &= \\ b_{11}^2 \tilde{x}^2 \left( \frac{\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} - \frac{m(u)}{K} \right) &+ b_{11}\tilde{x} \left( a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y} \right) \left( \frac{\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} \right) + (b_{11}\tilde{x})^3 \left( \frac{\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4} \right) + \\ (b_{11}\tilde{x})^2 (a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}) \left( \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) &+ O(|(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y})|^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}, \beta(u, v)) = \\
& -b_{11}^2\tilde{x}^2 \left( \frac{\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) - b_{11}\tilde{x}(a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}) \left( \frac{\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} \right) - (b_{11}\tilde{x})^3 \left( \frac{\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4} \right) - \\
& (b_{11}\tilde{x})^2 (a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y}) \left( \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) + O(|(-b_{11}\tilde{x}, a_{11}\tilde{x} - w\tilde{y})|^4).
\end{aligned}$$

将关于 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的方程化简为极坐标形式可得

$$\begin{cases} \dot{r} = \chi(\beta(u, v))r + \sigma(\beta(u, v))r^3 + O(|r|^4), \\ \dot{\theta} = w(\beta(u, v)) + c(\beta(u, v))r^2 + O(|r|^4). \end{cases} \quad (13)$$

在 $\beta(u, v) = \beta$ 处Taylor展开可得

$$\begin{cases} \dot{r} = \chi'(\beta)(\beta(u, v) - \beta)r + \sigma(\beta)r^3 + O(|r|^4), \\ \dot{\theta} = w(\beta) + w'(\beta)(\beta(u, v) - \beta) + c(\beta)r^2 + O(|r|^4). \end{cases} \quad (14)$$

周期解的稳定性是由 $\sigma(\beta)$ 决定的, 所以有

$$\sigma(\beta) = \frac{1}{16} (f_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + h_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}}) + \frac{1}{16w(\beta)} (f_{1\tilde{x}\tilde{y}}f_{1\tilde{x}\tilde{x}} - h_{1\tilde{y}\tilde{x}}h_{1\tilde{x}\tilde{x}} - f_{1\tilde{x}\tilde{x}}h_{1\tilde{x}\tilde{x}}), \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}
f_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} &= -\frac{6b_{11}^2\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4} - \frac{6a_{11}b_{11}\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3}, & f_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} &= \frac{2w\alpha b_{11}\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3}, \\
h_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}} &= -\frac{2\alpha b_{11}^2\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} + \frac{a_{11}}{w} f_{1\tilde{x}\tilde{x}\tilde{y}}, & f_{1\tilde{x}\tilde{y}} &= \frac{w\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} + \frac{2w\alpha b_{11}\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3}\tilde{x}, \\
f_{1\tilde{x}\tilde{x}} &= 2b_{11} \left( \frac{m(u)}{K} - \frac{\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} \right) - 2a_{11} \left( \frac{\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} \right) - \frac{6b_{11}^2\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4}\tilde{x} - \\
& b_{11}(6a_{11}\tilde{x} - 2w\tilde{y}) \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3}, \\
h_{1\tilde{x}\tilde{y}} &= -\frac{b_{11}\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} - \frac{2b_{11}^2\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2}\tilde{x} + \frac{a_{11}}{w} f_{1\tilde{x}\tilde{y}},
\end{aligned}$$

$$h_{1\tilde{x}\tilde{x}} =$$

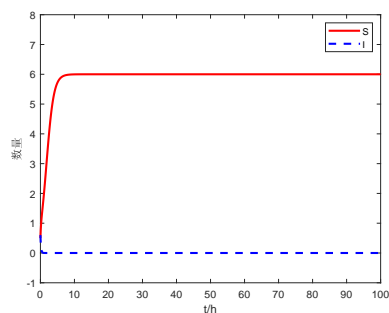
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{w} \left[ \frac{2b_{11}^2\alpha\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^3} + \frac{2a_{11}b_{11}\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^2} + \frac{6b_{11}^3\alpha^2\beta(u, v)I_*}{(1 + \alpha S_*)^4}\tilde{x} + b_{11}^2(6a_{11}\tilde{x} - 2w\tilde{y}) \frac{\alpha\beta(u, v)}{(1 + \alpha S_*)^3} \right] + \\
& \frac{a_{11}}{w} f_{1\tilde{x}\tilde{x}}.
\end{aligned}$$

根据参考文献[12-14]的方法可知, 分支周期解在 $\sigma(\beta) < 0$ 时稳定, 在 $\sigma(\beta) > 0$ 时不稳定.

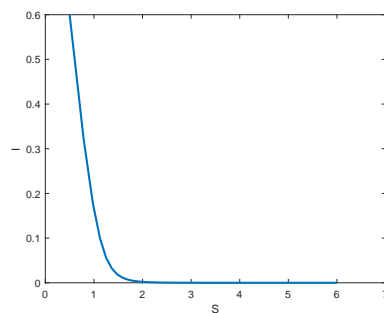
## §4 数值模拟

最后, 通过考虑四组参数值, 验证本文的理论结果.

- (1)  $u = 0.2, v = 0.3, m(u) = 0.93, \beta(u, v) = 1.15, (\mu + \gamma) = 7, \alpha = 0.0001$ ;
- (2)  $u = 0.2, v = 0.3, m(u) = 0.93, \beta(u, v) = 1.15, (\mu + \gamma) = 1.06, \alpha = 0.0001$ ;
- (3)  $u = 0.2, v = 0.6, m(u) = 0.93, \beta(u, v) = 1.62, (\mu + \gamma) = 1.06, \alpha = 0.0001$ ;
- (4)  $u = 0.2, v = 0.6, m(u) = 0.93, \beta(u, v) = 1.62, (\mu + \gamma) = 1.001, \alpha = 1$ .

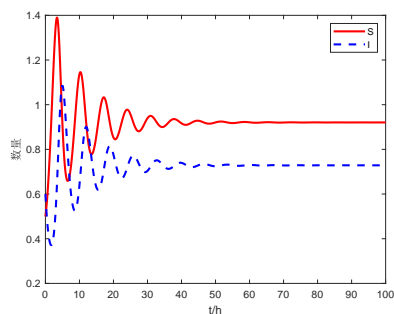


(a)  $S-I$ 时序演化图

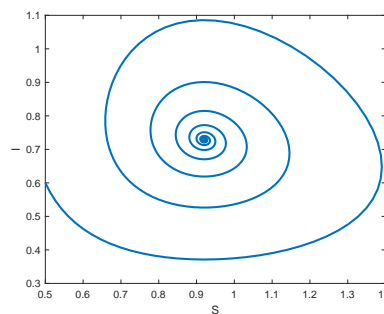


(b)  $S-I$ 相平面轨迹图

图 1 在起始状态为(0.5, 0.6)和 $m_0 = 0.95, c_1 = 0.4, K = 6, \beta_0 = 1.85, \theta = 5$ 的条件下, 满足 $\beta(u, v) \leq (\mu + \gamma) (\alpha + \frac{1}{K})$ 时, 系统(1)平衡点全局渐近稳定的图像

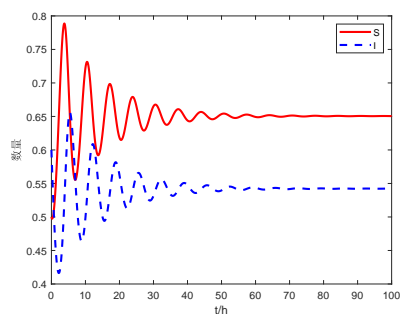


(a)  $S-I$ 时序演化图

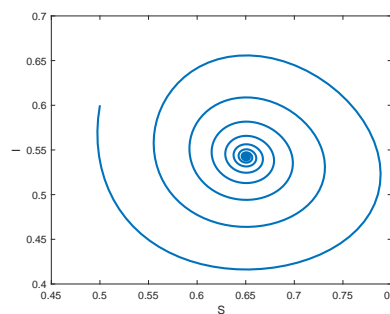


(b)  $S-I$ 相平面轨迹图

图 2 在起始状态为(0.5, 0.6)和 $m_0 = 0.95, c_1 = 0.4, K = 6, \beta_0 = 1.85, \theta = 5$ 的条件下, 满足 $\beta(u, v) > \alpha(\gamma + \mu)$ 时, 系统(1)正平衡点 $E^* = (0.9206, 0.7286)$ 局部渐近稳定的图像



(a)  $S-I$ 时序演化图



(b)  $S-I$ 相平面轨迹图

图 3 在起始状态为(0.5, 0.6)和 $m_0 = 0.95, c_1 = 0.4, K = 6, \beta_0 = 1.85, \theta = 5$ 的条件下, 满足 $\beta(u, v) > \alpha(\gamma + \mu)$ 时, 系统(1)正平衡点 $E^* = (0.6506, 0.5423)$ 局部渐近稳定的图像

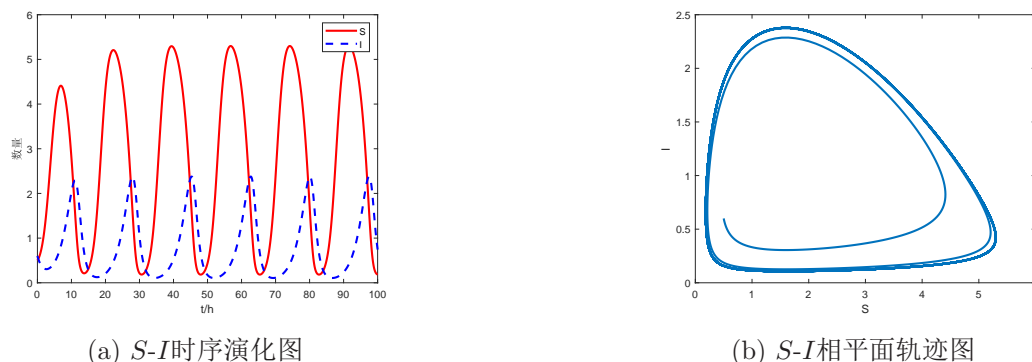


图4 在起始状态为 $(0.5, 0.6)$ 和 $m_0 = 0.95, c_1 = 0.4, K = 6, \beta_0 = 1.85, \theta = 5$ 的条件下, 满足 $a_{11} > 0$ 且 $\beta(u, v) = (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K}))(\frac{(1+\alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2})$ 时, 系统(1)在 $E^*$ 处产生Hopf分支的图像

图1-图4反映了进化效应对系统的影响, 说明易感人群的不同防御能力和已感染人群的不同感染能力影响了传染病传播的稳定性. 图1(对应参数组(1))表明, 当移出率与疾病死亡率之和较高且感染率较低时, 系统趋向于全局渐近稳定的平衡点. 这表明, 在高移出率和低传播效率的条件下, 疾病的传播被有效抑制, 最终导致已感染人群消失; 图2(对应参数组(2))表明, 当移出率与死亡率大幅降低时, 感染率超过阈值, 系统收敛至局部渐近稳定的正平衡点 $E^* = (0.9206, 0.7286)$ ; 图3(对应参数组(3))表明, 当感染能力提升至 $v = 0.6$ 时, 感染率显著增加, 导致正平衡点向更低易感人群( $S^* = 0.6506$ )和更高已感染人群( $I^* = 0.5423$ )偏移; 图4(对应参数组(4))表明, 当饱和参数增至 $\alpha = 1$ 且满足临界条件 $a_{11} > 0$ 且 $\beta(u, v) = (\mu + \gamma - m(u)(1 - \frac{2S_*}{K}))(\frac{(1+\alpha S_*)^2}{S_* - I_* + \alpha S_*^2})$ 时, 系统在平衡点 $E^*$ 处产生Hopf分支, 动态行为由稳定平衡转变为周期性振荡.

综上所述, 从图中可以看出, 随着易感人群防御能力的降低或已感染人群感染能力的增强, 平衡态健康个体数量减少. 这意味着, 在确定性环境中, 适当增加易感人群防御能力, 减少已感染人群感染能力, 在一定情况下可能有利于传染病的控制.

## §5 结语

本文研究了一类具有种群Logistic增长特性及进化效应的SIS模型的动力学行为, 证明了正平衡点的存在性, 并给出了其局部渐近稳定的条件; 同时, 分析了Hopf分支的存在性和分支周期解稳定性条件. 由于易感人群通过其免疫系统的防御作用, 不断适应外部环境, 以抵抗病毒的入侵. 然而, 随着易感人群防御能力的提高, 传染病病毒也会发生变异, 进而增强其对易感人群的感染能力. 因此, 本文提出的模型将易感人群的防御能力和已感染人群的感染能力纳入动力学分析框架, 通过构建数学模型来描述这些因素的相互作用及其对传染病传播的影响, 更符合实际情况, 具有一定的现实意义.

## 参考文献:

- [1] 刘森, 高之茵, 李维德. 基于偶对逼近对SIS传染病模型中治疗阈值的研究[J]. 应用数学学报, 2023, 46(4): 635-648.
- [2] 孙雪莹. 带有饱和发生率和线性源的SIS传染病模型分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨师范大学, 2021.
- [3] 郭禹彤. 一类反应扩散SIS传染病模型的定性性质研究[D]. 哈尔滨: 黑龙江大学, 2023.
- [4] 李得旺. 一类具扩散及对流SIS传染病模型解的渐近性态的若干研究[D]. 金华: 浙江师范大学, 2023.
- [5] 徐为坚. 具有种群Logistic增长及饱和传染率的SIS模型的稳定性和Hopf分支[J]. 数学物理学报, 2008, 28A(3): 578-584.
- [6] Zhao Qiuyue, Liu Shutang, Niu Xinglong. Dynamic behavior analysis of a diffusive plankton model with defensive and offensive effects[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 129: 94-102.
- [7] Velzen E, Gaedke U. Reversed predator-prey cycles are driven by the amplitude of prey oscillations[J]. *Ecology and Evolution*, 2018, 8(12): 6317-6329.
- [8] 杨洪, 马秋敏, 盛江林, 等. 具有进化效应的SIR模型的稳定性和Hopf分支分析[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(1): 27-36.
- [9] Bruce P, Amy E K, Elizabeth T B, et al. Modeling nutrient and disease dynamics in a plant-pathogen system[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, 16(1): 234-264.
- [10] Yang Hong. Stability and Hopf bifurcation for a logistic SIR model with a stage-structure[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2016, 9(1): 1650013.
- [11] La Salle J P. The Stability of Dynamical Systems[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [12] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y. Theory and Applications of Hopf Bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981, 14-35.
- [13] Shu Hongying, Fan Dejun, Wei Junjie. Global stability of multi-group SEIR epidemic models with distributed delays and nonlinear transmission[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13: 1581-1592.
- [14] Jiang Zhichao, Wei Junjie. Stability and bifurcation analysis in a delayed SIR model[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 35: 609-619.

## Stability and Hopf bifurcation analysis of an SIS model with evolutionary effects

MA Qiu-min, GUAN Jun-biao

(School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** The dynamical behavior of a class of SIS models with population logistic growth properties and evolutionary effects is investigated. Firstly, a mathematical model is established and some basic properties such as existence, nonnegativity and boundedness of solutions are proved. Secondly, the stability of the equilibrium point of the system is discussed and sufficient conditions for the existence of Hopf bifurcating periodic solutions are analyzed. Then, the central manifold theorem is used to discuss the properties of the Hopf bifurcation. Finally, in order to verify the accuracy of the theoretical results, suitable parameters are selected to simulate the system numerically.

**Keywords:** SIS model; evolutionary effect; stability; Hopf bifurcation

**MR Subject Classification:** 34K18; 34K20