

Fermat型高阶复微分-差分方程的 超越整函数解

刘镡镁, 陈俊凡*

(福建师范大学 数学与统计学院, 福建福州 350117)

摘要: 该文利用Nevanlinna理论, 把复差分方程和复微分方程结合起来, 研究了Fermat型高阶复微分-差分方程

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 + [\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)]^2 = Q(z)e^{r(z)}$$

的有限级超越整函数解的问题, 并给出了方程的有穷级超越整函数解的具体形式. 所得的结果推广了一些近来已有的结果.

关键词: 复微分-差分方程; 超越整函数; Nevanlinna理论

中图分类号: O174.52

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)04-0471-16

§1 引言及主要结果

设 f 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数. 对于亚纯函数 f , 笔者假定读者能够熟练运用Nevanlinna值分布理论的基本记号和结论, 如 $T(r, f)$, $N(r, f)$, $m(r, f)$, $\bar{N}(r, f)$, $\dots$, $S(r, f)$ 以及亚纯函数 f 的增长级 $\rho(f)$ 等^[1-4].

Fermat大定理的研究是非常令人感兴趣的. 如果将Fermat定理改为Fermat型函数方程

$$f^n(z) + g^n(z) = 1,$$

那么Montel^[5]得到了当 $n \geq 3$ 时, 该方程没有超越整函数解. 但当 $n = 2$ 时, Gross^[6]证明了方程 $f^2(z) + g^2(z) = 1$ 有整函数解 $f(z) = \sin(h(z))$, $g(z) = \cos(h(z))$, 其中 $h(z)$ 是任意整函数. 对于更一般形式的函数方程 $f^n(z) + g^m(z) = 1$, Yang^[7]证明了若正整数 m, n 满足 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, 方程不存在非常数整函数解. 如果 $g(z)$ 和 $f(z)$ 存在某种特殊关系, 例如, $g(z)$ 是 $f(z)$ 的一阶导函数, Yang和Li^[8]考虑了方程 $f^2(z) + f'^2(z) = 1$, 得到其具有具体形式 $f(z) = \frac{1}{2}(\lambda e^{\mu z} + \frac{1}{\lambda} e^{-\mu z})$ 的超越亚纯解, 其中 λ, μ 均为非零常数.

近年来, 许多专家学者探讨了有关Fermat型复微分-差分方程的有限级超越整函数解的问题, 并获得了许多重要且有趣的研究成果^[1, 9-21].

收稿日期: 2023-04-13 修回日期: 2025-10-13

*通讯作者, Email: junfanchen@163.com

文献[15]考虑了如下两类复微分-差分方程的有限级超越整函数解的问题, 证明了下述定理.

定理1.1^[15] 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$f'(z)^2 + f(z+c)^2 = 1$$

的有限级超越整函数解, 则 $f(z) = \sin(z \pm Bi)$, 其中 B 为常数, $c = 2k\pi$ 或 $c = (2k+1)\pi$, k 是整数.

定理1.2^[15] 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$f'(z)^2 + [f(z+c) - f(z)]^2 = 1$$

的有限级超越整函数解, 则 $f(z) = \frac{1}{2} \sin(2z + Bi)$, 其中 B 为常数, $c = k\pi + \frac{\pi}{2}$, k 是整数.

2013年, Liu和Yang^[16]将定理1.1中的一阶导函数进一步推广到了 n 阶导函数的情形, 证明了下述定理.

定理1.3^[16] 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$f^{(n)}(z)^2 + f(z+c)^2 = 1$$

的有限级超越整函数解, 则当 n 是奇数时 $f(z) = \pm \sin(aiz + bi)$, 其中 $a^n = \pm i$, $c = \frac{k\pi i}{a}$, k 是整数, b 为常数; 当 n 是偶数时 $f(z) = \pm \cos(aiz + bi)$, 其中 $a^n = \pm 1$, $c = \frac{k\pi i}{a} + \frac{\pi i}{2a}$, k 是整数, b 是常数.

2019年, 刘曼莉, 高凌云^[17]推广了[15-16]的上述结果到二阶复微分-差分方程右端为多项式的情形, 并得到下述结论.

定理1.4^[17] 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$f''(z)^2 + f(z+c)^2 = Q(z)$$

的有限级超越整函数解, 其中 $Q(z)$ 为多项式, $c \neq 0 \in \mathbf{C}$, 则 $Q(z) = c_1 c_2$ 为常数, 且 $f(z)$ 一定满足

$$f(z) = \frac{1}{2a^2} [c_1 e^{az+b} + c_2 e^{-az-b}],$$

其中 a 和 b 为常数, $a^4 = 1$, $c = \frac{\ln(-ia^2) + 2k\pi i}{a}$, k 是一个整数.

2019年, 曾翠萍, 邓炳茂, 方明亮^[21]考虑 n 阶复微分-差分方程, 推广并改进了定理1.2中的结果, 得到下述结论.

定理1.5^[21] 设 $\alpha \neq 0$, β 是常数, $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$f^{(n)}(z)^2 + [\alpha f(z+c) - \beta f(z)]^2 = 1 \quad (1)$$

的有限级整函数解, 则

(I) 若 $f(z)$ 是有限级超越整函数, 那么

(i) 当 n 是奇数时,

$$f(z) = \frac{e^{az+b} - e^{-az-b}}{2a^n} + d,$$

其中 b, d 是常数, k 是整数. (i.1) 若 $\alpha = \beta$, 则 $a^n = -2\alpha i$, $c = \frac{(2k+1)\pi i}{a}$; (i.2) 若 $\alpha = -\beta$, 则 $a^n = 2\alpha i$, $c = \frac{2k\pi i}{a}$, $d = 0$; (i.3) 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $a^n = -(\alpha + \beta)i$, $c = \frac{(2k+1)\pi i}{a}$, 或者 $a^n = (\alpha - \beta)i$, $c = \frac{2k\pi i}{a}$;

(ii) 当 n 是偶数时, 若 $\alpha = \pm\beta$, 则方程(1)没有超越整函数解; 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则

$$f(z) = \frac{e^{az+b} + e^{-az-b}}{2a^n},$$

其中 $a^n = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, 或者 $a^n = -\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $c = \frac{\ln(\frac{i\beta + a^n}{i\alpha}) + i2k\pi}{a}$, b 是常数, k 是整数.

(II) 若 $f(z)$ 是多项式, 那么当 $\alpha = \beta$ 时, $f(z) = Az + B$, 其中 $n = 1$ 时, 有 $A^2(1 + \alpha^2 c^2) = 1$, $n \geq 2$ 时, 有 $(\alpha A c)^2 = 1$; 当 $\alpha \neq \beta$ 时, $f(z) = \pm \frac{1}{\alpha - \beta}$.

2021年, Chen和Lin^[9]基于定理1.5中的结果, 讨论了Fermat型复微分-差分方程

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 + [\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)]^2 = e^{r(z)} \quad (2)$$

的有限级超越整函数解, 其中 $P(z) \neq 0$ 是多项式, $r(z)$ 是非常数多项式, $\alpha \neq 0$, β 是常数, k 是一个整数并且 $\eta \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. 他们证明了下述定理1.6.

定理1.6^[9] 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程(2)的有限级超越整函数解, 则

(I) $P(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{e^{az+a_0}}{2Aa^k} + \frac{e^{bz+b_0}}{2Ab^k} + d, \quad a \neq \pm b,$$

其中 $A \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, d, a_0, b_0 是常数. (I.i) 若 $\alpha = \beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)}{A}$, $b^k = \frac{i\alpha(1-e^{b\eta})}{A}$;

(I.ii) 若 $\alpha = -\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)}{A}$, $b^k = \frac{-i\alpha(1+e^{b\eta})}{A}$, $d = 0$; (I.iii) 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha e^{a\eta}-i\beta}{A}$, $b^k = \frac{i\beta-i\alpha e^{b\eta}}{A}$, $d = 0$.

(II) $P(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{e^{az+a_0}}{2Aa^k} + \frac{e^{az+b_0}}{2Aa^k} + d, \quad b_0 \neq a_0 + 2n\pi i,$$

其中 $A \neq 0$, $a \neq 0$, d, a_0, b_0 是常数, n 是整数. (II.i) 若 $\alpha = \beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)(1+e^{b_0-a_0})}{A(1-e^{b_0-a_0})}$;

(II.ii) 若 $\alpha = -\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)(1+e^{b_0-a_0})}{A(1-e^{b_0-a_0})}$, $d = 0$; (II.iii) 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $a^k = \frac{(i\alpha e^{a\eta}-i\beta)(1+e^{b_0-a_0})}{A(1-e^{b_0-a_0})}$, $d = 0$.

(III) $P(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{e^{az+a_0}}{Aa^k} + d, \quad b_0 = a_0 + 2n\pi i,$$

其中 $A \neq 0$, $a \neq 0$, d, a_0, b_0 是常数, n 是整数. (III.i) 若 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha = \beta$, 则 $e^{a\eta} = 1$; (III.ii)

若 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \neq \beta$, 则 $e^{a\eta} \neq 1$, $d = 0$.

本文将方程(2)中右端无零点的情形推广为至多有有限个零点的情形, 得到如下主要结果.

定理1.7 设 $f(z)$ 是复微分-差分方程

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 + [\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)]^2 = Q(z)e^{r(z)} \quad (3)$$

的有穷级超越整函数解, 其中 $P(z), Q(z)$ 是非零多项式, $r(z)$ 是非常数多项式, $\alpha \neq 0$, β 是常数, k 是正整数并且 $\eta \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, 则

(I) $P(z), Q(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{c_1 e^{az+a_0}}{2Aa^k} + \frac{c_2 e^{bz+b_0}}{2Ab^k} + d, \quad a \neq \pm b,$$

其中 $A \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, d, a_0, b_0 是常数. (I.i) 若 $\alpha = \beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)}{A}$,

$b^k = \frac{i\alpha(1-e^{b\eta})}{A}$; (I.ii) 若 $\alpha = -\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)}{A}$, $b^k = \frac{-i\alpha(1+e^{b\eta})}{A}$, $d = 0$; (I.iii) 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha e^{a\eta}-i\beta}{A}$, $b^k = \frac{i\beta-i\alpha e^{b\eta}}{A}$, $d = 0$.

(II) $P(z), Q(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{c_1 e^{az+a_0}}{2Aa^k} + \frac{c_2 e^{az+b_0}}{2Aa^k} + d, \quad b_0 \neq a_0 + \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + 2n\pi i,$$

其中 $A \neq 0, a \neq 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, d, a_0, b_0$ 是常数, n 是整数. (II.i) 若 $\alpha = \beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}$; (II.ii) 若 $\alpha = -\beta$, 则 $a^k = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}, d = 0$; (II.iii) 若 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $a^k = \frac{(i\alpha e^{a\eta}-i\beta)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}, d = 0$.

(III) $P(z), Q(z)$ 退化为常数, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f(z) = \frac{c_1 e^{az+a_0}}{Aa^k} + d, \quad b_0 = a_0 + \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + 2n\pi i,$$

其中 $A \neq 0, a \neq 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, d, a_0, b_0$ 是常数, n 是整数. (III.i) 若 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}, \alpha = \beta$, 则 $e^{a\eta} = 1$; (III.ii) 若 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}, \alpha \neq \beta$, 则 $e^{a\eta} \neq 1, d = 0$.

(IV) $P(z)$ 退化为常数, $Q(z)$ 是非零多项式, $r(z)$ 是次数为1的多项式, 并且

$$f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z)e^{r_1(z)} + Q_2(z)e^{r_2(z)}}{2A},$$

其中 $A \neq 0$ 是常数, $Q_1(z), Q_2(z)$ 是非零多项式并满足 $Q_1(z)Q_2(z) = Q(z), r_1(z), r_2(z)$ 中至少有一个是次数为1的多项式并满足 $r_1(z) + r_2(z) = r(z)$.

(V) $P(z), Q(z)$ 是非零多项式, $r(z)$ 是非常数多项式, 并且 $f(z)$ 满足

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 = Q(z) e^{r(z)}.$$

下述例子均表明定理1.7中的结论都是可能发生的.

例1.1 若 $\alpha = \beta = \frac{-1}{i(2+2^k)}$, 并且 $P(z) \equiv 1, Q(z) = c_1 c_2 \equiv 1, r(z) = 3z$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + \left(\frac{1}{i(2+2^k)} f(z+\eta) - \frac{1}{i(2+2^k)} f(z) \right)^2 = e^{3z}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2^{k+1}}e^{2z} + 1$, 其中 $A = 1, a = 1, b = 2, e^{2\eta} - 1 = -\frac{2^k}{i\alpha}, e^\eta - 1 = \frac{1}{i\alpha}$. 显然 $a \neq \pm b, a^k = 1 = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)}{A}, b^k = 2^k = \frac{i\alpha(1-e^{b\eta})}{A}$.

例1.2 若 $\alpha = \frac{(2-2^k)+\sqrt{(2-2^k)^2-8}}{4i}, \beta = -\alpha$, 并且 $P(z) \equiv 1, Q(z) = c_1 c_2 \equiv 1, r(z) = 3z$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + (\alpha f(z+\eta) + \alpha f(z))^2 = e^{3z}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2^{k+1}}e^{2z}$, 其中 $A = 1, a = 1, b = 2, e^{2\eta} + 1 = -\frac{2^k}{i\alpha}, e^\eta + 1 = \frac{1}{i\alpha}$. 显然 $a \neq \pm b, a^k = 1 = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)}{A}, b^k = 2^k = \frac{-i\alpha(1+e^{b\eta})}{A}$.

例1.3 若 $\alpha = \frac{4}{i(1-2^k)}, \beta = -i$, 并且 $P(z) \equiv 1, Q(z) = c_1 c_2 \equiv 1, r(z) = 3z$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + \left(\frac{4}{i(1-2^k)} f(z+\eta) + i f(z) \right)^2 = e^{3z}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2^{k+1}}e^{2z}$, 其中 $A = 1, a = 1, b = 2, e^\eta = \frac{2}{i\alpha}, e^{2\eta} = \frac{1-2^k}{i\alpha}$. 显然 $a \neq \pm b, a^k = 1 = \frac{i\alpha e^{a\eta}-i\beta}{A}, b^k = 2^k = \frac{i\beta-i\alpha e^{b\eta}}{A}$.

注1.1 例1.1-例1.3说明定理1.7中的情形I是成立的.

例1.4 若 $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{15}i+3}{20}$, 并且 $P(z) \equiv 1, Q(z) = c_1 c_2 \equiv 1, r(z) = 2z+1$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}i+3}{20} f(z+\eta) - \frac{\sqrt{15}i+3}{20} f(z) \right)^2 = e^{2z+1}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{z+1} + 1$, 其中 $A = 1$, $a = b = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $e^\eta = \frac{20(1-e)}{i(1+e)(\sqrt{15i+3})} + 1$, 且 n 是整数. 显然 $1 = b_0 \neq a_0 + \ln \frac{c_1}{c_2} + 2n\pi i$, $a^k = 1 = \frac{i\alpha(e^{a\eta}-1)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}$.

例1.5 若 $\alpha = \frac{\sqrt{15i+3}}{20}$, $\beta = -\frac{\sqrt{15i+3}}{20}$, 并且 $P(z) \equiv 1$, $Q(z) = c_1c_2 \equiv 1$, $r(z) = 2z + 1$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + \left(\frac{\sqrt{15i+3}}{20} f(z+\eta) + \frac{\sqrt{15i+3}}{20} f(z) \right)^2 = e^{2z+1}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{z+1}$, 其中 $A = 1$, $a = b = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $e^\eta = \frac{20(1-e)}{i(1+e)(\sqrt{15i+3})} - 1$, 且 n 是整数. 显然 $1 = b_0 \neq a_0 + \ln \frac{c_1}{c_2} + 2n\pi i$, $a^k = 1 = \frac{i\alpha(e^{a\eta}+1)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}$.

例1.6 若 $\alpha = i$, $\beta = 2i$, 并且 $P(z) \equiv 1$, $Q(z) = c_1c_2 \equiv 1$, $r(z) = 2z + 1$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + (if(z+\eta) - 2if(z))^2 = e^{2z+1}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{z+1}$, 其中 $A = 1$, $a = b = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $e^\eta = 2 - \frac{1-e}{1+e}$, 且 n 是整数. 显然 $1 = b_0 \neq a_0 + \ln \frac{c_1}{c_2} + 2n\pi i$, $a^k = 1 = \frac{(i\alpha e^{a\eta} - i\beta)(c_1+c_2e^{b_0-a_0})}{A(c_1-c_2e^{b_0-a_0})}$.

注1.2 例1.4-例1.6说明定理1.7中的情形II是成立的.

例1.7 若 $\alpha = \beta = 5i$, 并且 $P(z) \equiv 1$, $Q(z) = c_1c_2 \equiv 1$, $r(z) = 2z$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + (5if(z+2\pi i) - 5if(z))^2 = e^{2z}$$

存在解 $f(z) = e^z + 1$, 其中 $A = 1$, $a = b = 1$, $a_0 = n = 0$, $b_0 = 0$, 且 $\eta = 2\pi i$. 显然 $b_0 = a_0 + \ln \frac{c_1}{c_2} + 2n\pi i$, $e^{a\eta} = e^{2\pi i} = 1$.

例1.8 若 $\alpha = 5i$, $\beta = 5ei$, 并且 $P(z) \equiv 1$, $Q(z) = c_1c_2 \equiv 1$, $r(z) = 2z$, 其中 $c_1 = c_2 = 1$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + (5if(z+1) - if(z))^2 = e^{2z}$$

存在解 $f(z) = e^z$, 其中 $A = 1$, $a = b = 1$, $a_0 = n = 0$, $b_0 = 0$, 且 $\eta = 1$. 显然 $b_0 = a_0 + \ln \frac{c_1}{c_2} + 2n\pi i$, $e^{a\eta} = e \neq 1$.

注1.3 例1.7-例1.8说明定理1.7中的情形III是成立的.

例1.9 若 $\alpha = 1$, $\beta = e^\eta - i\sqrt{3}$, 其中 η 满足 $\eta e^\eta = i\sqrt{3}k$, 并且 $P(z) \equiv 2$, $Q_1(z) = Q_2(z) = z$, $r_1(z) = r_2(z) = z$, 代入方程(3), 则

$$4f^{(k)}(z)^2 + \left(f(z+\eta) - (e^\eta - i\sqrt{3})f(z) \right)^2 = z^2e^{2z}$$

存在解 $f(z) = (z-k)e^z$.

例1.10 若 $\alpha = 1$, $\beta = e^\eta + i$, 其中 η 满足 $\eta e^\eta = i(2-k)$, 并且 $P(z) \equiv 1$, $Q_1(z) = z$, $Q_2(z) = 1$, $r_1(z) = r_2(z) = z$, 代入方程(3), 则

$$f^{(k)}(z)^2 + (f(z+\eta) - (e^\eta + i)f(z))^2 = ze^{2z}$$

存在解 $f(z) = \frac{1}{2}(z-k+1)e^z$.

注1.4 例1.9-例1.10说明定理1.7中的情形IV是成立的.

例1.11 若 $\alpha = \beta = 1$, $\eta = 2n\pi i$, 其中 n 是整数, 并且 $P(z) = z$, $Q(z) = z^2$, $r(z) = 2z$, 代入方程(3), 则

$$z^2 f^{(k)}(z)^2 + (f(z+2n\pi i) - f(z))^2 = z^2 e^{2z}$$

存在解 $f(z) = e^z$.

注1.5 例1.11说明定理1.7中的情形V是成立的.

§2 一些引理

引理2.1^[4] 设 $f_j(z) (j = 1, 2, \dots, n)$ 为复平面上的亚纯函数, $f_k(z) (k = 1, 2, \dots, n-1)$ 为非常数且满足 $\sum_{j=1}^n f_j \equiv 1$ 和 $n \geq 3$. 如果 $f_n(z) \not\equiv 0$ 且

$$\sum_{j=1}^n N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + (n-1) \sum_{j=1}^n \overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r, f_k),$$

其中 $\lambda < 1, k = 1, 2, \dots, n-1$, 则 $f_n(z) \equiv 1$.

引理2.2^[4] 设 $f_j(z) (j = 1, 2, 3)$ 为复平面上的亚纯函数, $f_1(z)$ 为非常数. 如果 $\sum_{j=1}^3 f_j \equiv 1$, 且

$$\sum_{j=1}^3 N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) + 2 \sum_{j=1}^3 \overline{N}(r, f_j) < (\lambda + o(1))T(r),$$

其中 $\lambda < 1, T(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \{T(r, f_k)\}$, 则 $f_2(z) \equiv 1$ 或 $f_3(z) \equiv 1$.

引理2.3^[4] 设 $f(z)$ 为复平面上的超越亚纯函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty.$$

引理2.4^[4] 设 $f(z)$ 为有穷 ρ 级整函数, $z = 0$ 为其 k 级零点, $z_1, z_2, \dots$ 为 $f(z)$ 的非零零点, 则

$$f(z) = z^k P(z) e^{Q(z)},$$

其中 $P(z)$ 为 $f(z)$ 的非零零点的典型乘积, $Q(z)$ 为一次数不高于 ρ 的多项式.

引理2.5^[4] 设 $f_1(z), \dots, f_n(z), (n \geq 2)$ 是亚纯函数, $g_1(z), \dots, g_n(z)$ 是整函数, 满足下列各条件

$$(i) \sum_{j=1}^n f_j(z) e^{g_j(z)} = 0;$$

(ii) 当 $1 \leq j < k \leq n$ 时, $g_j(z) - g_k(z)$ 不是常数;

(iii) 当 $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n$ 时,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}, \quad r \rightarrow \infty, r \notin E,$$

其中 $E \subset (1, \infty)$ 具有线性测度或对数测度, 则 $f_j(z) \equiv 0, j = 1, \dots, n$.

§3 定理1.7的证明

证 假设 $f(z)$ 是方程(3)的有穷级超越整函数解, 若 $\alpha f(z + \eta) - \beta f(z) \not\equiv 0$ 时, 则方程(3)可以改写为

$$\left[P(z) f^{(k)}(z) + i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)) \right] \left[P(z) f^{(k)}(z) - i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)) \right] = Q(z) e^{r(z)}. \quad (4)$$

显然, $P(z) f^{(k)}(z) + i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z))$ 和 $P(z) f^{(k)}(z) - i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z))$ 均至多只有有限个零点. 结合(4)和引理2.4, 假设

$$\begin{cases} P(z) f^{(k)}(z) + i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)) = Q_1(z) e^{r_1(z)}, \\ P(z) f^{(k)}(z) - i(\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)) = Q_2(z) e^{r_2(z)}. \end{cases} \quad (5)$$

由(5)可得

$$\begin{cases} f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z)e^{r_1(z)} + Q_2(z)e^{r_2(z)}}{2P(z)}, \\ \alpha f(z+\eta) - \beta f(z) = \frac{Q_1(z)e^{r_1(z)} - Q_2(z)e^{r_2(z)}}{2i}, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $r_1(z)$, $r_2(z)$ 为多项式, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ 为非零多项式且满足 $r(z) = r_1(z) + r_2(z)$, $Q(z) = Q_1(z)Q_2(z)$. 对(6)的第二式求 k 阶导, 有

$$\alpha f^{(k)}(z+\eta) - \beta f^{(k)}(z) = \frac{A(z)e^{r_1(z)} + B(z)e^{r_2(z)}}{2i}, \quad (7)$$

其中 $A(z)$, $B(z)$ 由数学归纳法有

$$\begin{aligned} A(z) &= Q_1(z)r_1'(z)^k + kQ_1'(z)r_1'(z)^{k-1} + \cdots + Q_1^{(k)}(z) + M_k(r_1'(z), \dots, r_1^{(k)}(z)), \\ B(z) &= -[Q_2(z)r_2'(z)^k + kQ_2'(z)r_2'(z)^{k-1} + \cdots + Q_2^{(k)}(z) + N_k(r_2'(z), \dots, r_2^{(k)}(z))], \end{aligned}$$

并且 M_k , N_k 分别是关于 $r_1'(z), \dots, r_1^{(k)}(z)$, $r_2'(z), \dots, r_2^{(k)}(z)$ 的 $k-1$ 次微分多项式. 结合(6)的第一式和(7)有

$$\begin{aligned} &\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z)-r_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)-r_2(z+\eta)} + \\ &\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)-r_2(z+\eta)} \equiv 1. \end{aligned} \quad (8)$$

因为 $r(z)$ 是非常数多项式, 所以 $r_1(z)$, $r_2(z)$ 不能同时为常数. 故分下述三种情形讨论.

情形1 若 $r_1(z)$ 是常数且 $r_2(z)$ 是非常数多项式, 则 $A(z) = Q_1^{(k)}(z)$. 显然 $e^{r_1(z+\eta)-r_2(z+\eta)}$, $e^{r_1(z)-r_2(z+\eta)}$ 为非常数. 又 $\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta)+A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} \neq 0$, 否则, (8)可改写为

$$\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)-r_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)-r_2(z+\eta)} \equiv 1,$$

令 $g = \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)-r_2(z+\eta)}$, 利用Nevanlinna第二基本定理及引理2.3, 有

$$\begin{aligned} T(r, g) &\leq \bar{N}(r, g) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g+1}\right) + S(r, g) \leq \\ &\bar{N}\left(r, \frac{1}{\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta)+B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)-r_2(z+\eta)}}\right) + O(\log r) + S(r, g) \leq \\ &O(\log r) + S(r, g) = S(r, g), \end{aligned}$$

这与 g 是超越的矛盾, 故 $\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta)+A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} \neq 0$. 同理可得

$$\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta)+B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} \neq 0. \text{ 结合(8)及引理2.1有} \quad (9)$$

$$\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)-r_2(z+\eta)} \equiv 1.$$

显然, $r_2(z) - r_2(z+\eta)$ 是常数, 由此可以知道 $\deg r_2(z) = 1$. 令 $r_2(z) = bz + b_0$, $b \neq 0$, b_0 是常数, 则 $B(z) = -[b^k Q_2(z) + kb^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)]$, 代入(9)有

$$\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - [b^k Q_2(z) + kb^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)]P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{-b\eta} \equiv 1,$$

也即

$$\begin{aligned} &i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - [b^k Q_2(z) + kb^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)] \times \\ &P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)e^{b\eta}. \end{aligned} \quad (10)$$

再结合(8)及(9), 可得

$$\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + Q_1^{(k)}(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_1(z+\eta)} \equiv 1,$$

也即

$$i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + Q_1^{(k)}(z)P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_1(z+\eta). \quad (11)$$

若 $P(z)$ 为非常数多项式, $Q_2(z) = c_2$ 为常数, 则由(10)可得

$$i\beta c_2 P(z+\eta) - b^k c_2 P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)c_2 e^{b\eta}.$$

比较上式等式两端的次数可得矛盾.

若 $Q_2(z)$ 为非常数多项式, $P(z) = A$ 为常数, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z)e^{r(z)-bz-b_0} + Q_2(z)e^{bz+b_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

若 $P(z)$, $Q_2(z)$ 均为非常数多项式, 比较(10)等号两端的次数可得矛盾.

若 $P(z) = A$, $Q_2(z) = c_2$ 均为常数. 假设 $Q_1(z) = c_1$ 也为常数, 令 $e^{r_1(z)} = c_3$, 则由(6)可知

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1 c_3}{2A} + \frac{c_2}{2A} e^{bz+b_0}, \quad f(z) = \frac{c_1 c_3}{2A k!} z^k + \frac{c_2}{2A b^k} e^{bz+b_0} + S(z), \quad (12)$$

其中 $S(z)$ 是满足 $\deg(S(z)) \leq k-1$ 的多项式. 再结合(10)和(11), 可以得到 $\alpha = \beta$, $e^{b\eta} = 1 - \frac{Ab^k}{i\alpha}$.

再根据(6)的第二式以及(12), 易得

$$\begin{aligned} f(z+\eta) - f(z) &= \frac{c_1 c_3}{2i\alpha} - \frac{c_2}{2i\alpha} e^{bz+b_0} = \\ &= \frac{c_1 c_3}{2A k!} (z+\eta)^k - \frac{c_1 c_3}{2A k!} z^k + \frac{c_2}{2A b^k} e^{b\eta} e^{bz+b_0} - \frac{c_2}{2A b^k} e^{bz+b_0} + S(z+\eta) - S(z). \end{aligned}$$

整理可得

$$\frac{c_1 c_3}{2A k!} (z+\eta)^k - \frac{c_1 c_3}{2A k!} z^k - \frac{c_1 c_3}{2i\alpha} = S(z) - S(z+\eta).$$

比较上式两端的次数即可得出矛盾. 因此, $Q_1(z)$ 为非常数多项式, 此时由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{\frac{Q_1(z)}{c_2} e^{r(z)-bz-b_0} + c_2 e^{bz+b_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

情形2 若 $r_1(z)$ 是非常数多项式且 $r_2(z)$ 是常数, 此时 $B(z) = -Q_2^{(k)}(z)$. 则(8)可改写为

$$\begin{aligned} &\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z)-r_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z+\eta)-r_2(z+\eta)} \equiv \\ &\frac{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}. \end{aligned} \quad (13)$$

接下来分以下两种情形来讨论.

子情形2.1 若 $i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta) \equiv 0$, 则由(13), 有

$$\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_1(z+\eta)} e^{r_1(z)-r_1(z+\eta)} \equiv 1. \quad (14)$$

显然 $r_1(z) - r_1(z+\eta)$ 是常数, 由此可以知道 $\deg r_1(z) = 1$. 令 $r_1(z) = az + a_0$, $a \neq 0$, a_0 是常数, 则 $A(z) = a^k Q_1(z) + ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z)$, 代入(14)可得

$$i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + \left[a^k Q_1(z) + ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z) \right] \times \quad (15)$$

$$P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_1(z+\eta)e^{a\eta}.$$

结合(15)以及情形1的方法可知当 $P(z)$ 为非常数多项式时可以推出矛盾, 因此接下来只考虑当 $P(z)$ 为常数时方程(3)解的情形.

若 $Q_1(z)$ 为非常数多项式, $P(z) = A$ 为常数, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z)e^{az+a_0} + Q_2(z)e^{r(z)-az-a_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

若 $Q_1(z) = c_1$, $P(z) = A$ 均为常数. 假设 $Q_2(z) = c_2$ 为常数, 令 $e^{r_2(z)} = c_4$, 则由(6)可知

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1}{2A}e^{az+a_0} + \frac{c_2c_4}{2A}, \quad f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k}e^{az+a_0} + \frac{c_2c_4}{2Ak!}z^k + T(z), \quad (16)$$

其中 $T(z)$ 是满足 $\deg(T(z)) \leq k-1$ 的多项式. 再结合(15)和假设条件, 易知 $\alpha = \beta$, $e^{a\eta} = 1 + \frac{Aa^k}{i\alpha}$.

再根据(6)的第二式以及(16), 可得

$$f(z+\eta) - f(z) = \frac{c_1}{2i\alpha}e^{az+a_0} - \frac{c_2c_4}{2i\alpha} = \frac{c_1}{2Aa^k}e^{a\eta}e^{az+a_0} - \frac{c_1}{2Aa^k}e^{az+a_0} + \frac{c_2c_4}{2Ak!}(z+\eta)^k - \frac{c_2c_4}{2Ak!}z^k + T(z+\eta) - T(z).$$

整理可得

$$\frac{c_2c_4}{2Ak!}(z+\eta)^k - \frac{c_2c_4}{2Ak!}z^k + \frac{c_2c_4}{2i\alpha} = T(z) - T(z+\eta).$$

比较上式两端的次数即可得出矛盾. 因此 $Q_2(z)$ 为非常数多项式, 此时由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1e^{az+a_0} + \frac{Q_2(z)}{c_1}e^{r(z)-az-a_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

子情形2.2 若 $i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta) \not\equiv 0$. 令 $e^{r_2(z)} = c_4$, 则由(13), 有

$$H_{11}(z)e^{r_1(z)} + H_{12}(z)e^{r_0(z)} \equiv 0,$$

其中 $r_0(z) \equiv 0$, 且

$$\begin{cases} H_{11}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)c_4} - \frac{Q_1(z+\eta)}{c_4Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)}, \\ H_{12}(z) = -\frac{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}. \end{cases}$$

由引理2.5可知 $H_{1j}(z) \equiv 0 (j=1, 2)$. 根据 $H_{12}(z) \equiv 0$ 可以得到 $i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta) \equiv 0$, 与假设条件 $i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) - i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - B(z)P(z)P(z+\eta) \not\equiv 0$ 矛盾.

情形3 若 $r_1(z), r_2(z)$ 均为非常数多项式, 则(8)可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)} + \\ & \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)} - e^{r_2(z+\eta)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (17)$$

接下来考虑以下三种情形.

子情形3.1 若 $\deg r_1(z) > \deg r_2(z) \geq 1$, 则(17)可改写为

$$H_{21}(z)e^{r_1(z)} + H_{22}(z)e^{r_0(z)} \equiv 0,$$

其中 $r_0(z) \equiv 0$, 且

$$\begin{cases} H_{21}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)}e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)}, \\ H_{22}(z) = \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)}e^{r_2(z)} - e^{r_2(z+\eta)}. \end{cases}$$

由引理2.5可知 $H_{2j}(z) \equiv 0 (j=1, 2)$. 代入可得 $\deg r_1(z) = \deg r_2(z) = 1$, 与假设条件 $\deg r_1(z) >$

$\deg r_2(z) \geq 1$ 矛盾.

子情形3.2 若 $\deg r_2(z) > \deg r_1(z) \geq 1$, 则(17)可改写为

$$H_{31}(z)e^{r_2(z)} + H_{32}(z)e^{r_0(z)} \equiv 0,$$

其中 $r_0(z) \equiv 0$, 且

$$\begin{cases} H_{31}(z) = \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - e^{r_2(z+\eta)-r_2(z)}, \\ H_{32}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z+\eta)}. \end{cases}$$

同理, 由引理2.5可知 $H_{3j}(z) \equiv 0 (j=1, 2)$. 代入可得 $\deg r_1(z) = \deg r_2(z) = 1$, 与假设条件 $\deg r_2(z) > \deg r_1(z) \geq 1$ 矛盾.

子情形3.3 若 $\deg r_1(z) = \deg r_2(z) = n \geq 1$, 令 $r_1(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, $r_2(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0$, 其中 $a_n (\neq 0), a_{n-1}, \cdots, a_0, b_n (\neq 0), b_{n-1}, \cdots, b_0$ 均为常数, n 是整数. 因此, 可以得到 $r(z) = (a_n + b_n)z^n + (a_{n-1} + b_{n-1})z^{n-1} + \cdots + a_0 + b_0$. 因为 $r(z)$ 是非常数多项式, 所以对于 $j = 1, 2, \cdots, n$, 至少存在一个 j , 使得 $a_j + b_j \neq 0$.

子情形3.3.1 若 $a_n \neq b_n$, 则(17)可改写为

$$H_{41}(z)e^{r_1(z)} + H_{42}(z)e^{r_2(z)} \equiv 0,$$

其中

$$\begin{cases} H_{41}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)}, \\ H_{42}(z) = \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - e^{r_2(z+\eta)-r_2(z)}. \end{cases}$$

因此, 由引理2.5可知 $H_{4j}(z) \equiv 0 (j=1, 2)$. 根据 $H_{41}(z) \equiv H_{42}(z) \equiv 0$, 可以得出 $r_1(z+\eta) - r_1(z)$, $r_2(z+\eta) - r_2(z)$ 均为常数, 也即 $\deg r_1(z) = \deg r_2(z) = 1$. 令 $r_1(z) = az + a_0$, $r_2(z) = bz + b_0$, 其中 $a \neq 0, a_0, b \neq 0, b_0$ 是常数且 $a \neq b$. 又因为对 $j = 1, 2, \cdots, n$, 至少存在一个 j , 使得 $a_j + b_j \neq 0$, 所以有 $a \neq -b$. 综上, $a \neq \pm b$.

由于 $r_1(z) = az + a_0$, $r_2(z) = bz + b_0$, 可以得出 $A(z) = a^k Q_1(z) + ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z)$, $B(z) = -[b^k Q_2(z) + kb^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)]$. 将它们代入 $H_{4j}(z) \equiv 0 (j=1, 2)$ 可得

$$\begin{cases} i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + [a^k Q_1(z) + ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z)] P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_1(z+\eta)e^{a\eta}, \\ i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - [b^k Q_2(z) + kb^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)] P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)e^{b\eta}. \end{cases}$$

结合(15)以及情形1的方法可知当 $P(z)$ 为非常数多项式时可以推出矛盾, 因此接下来只考虑当 $P(z)$ 为常数时方程(3)解的情形.

若 $Q_1(z) = c_1$, $P(z) = A$ 均为常数. 假设 $Q_2(z) = c_2$ 为常数. 此时, 根据上式可知

$$\begin{cases} i\beta c_1 A + a^k c_1 A^2 \equiv i\alpha c_1 A e^{a\eta}, & e^{a\eta} = \frac{i\beta + a^k A}{i\alpha}, \\ i\beta c_2 A - b^k c_2 A^2 \equiv i\alpha c_2 A e^{b\eta}, & e^{b\eta} = \frac{i\beta - b^k A}{i\alpha}. \end{cases}$$

由(6)的第一式有

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1}{2A} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2A} e^{bz+b_0}, \quad f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Ab^k} e^{bz+b_0} + U(z), \quad (18)$$

其中 $U(z)$ 是满足 $\deg(U(z)) \leq k-1$ 的多项式.

若 $\alpha = \beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{i\alpha + a^k A}{i\alpha}$, $e^{b\eta} = \frac{i\alpha - b^k A}{i\alpha}$. 再结合(6)的第二式以及(18)可知

$$f(z + \eta) - f(z) = \frac{c_1}{2i\alpha} e^{az+a_0} - \frac{c_2}{2i\alpha} e^{bz+b_0} = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{a\eta} e^{az+a_0} - \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Ab^k} e^{b\eta} e^{bz+b_0} - \frac{c_2}{2Ab^k} e^{bz+b_0} + U(z + \eta) - U(z).$$

由上式可推出 $U(z + \eta) - U(z) \equiv 0$, 也即 $U(z) \equiv d$, 其中 d 为常数. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Ab^k} e^{bz+b_0} + d.$$

若 $\alpha = -\beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{-i\alpha + a^k A}{i\alpha}$, $e^{b\eta} = \frac{-i\alpha - b^k A}{i\alpha}$. 同理, 结合(6)的第二式以及(18)可知 $U(z + \eta) + U(z) \equiv 0$, 也即 $U(z) \equiv 0$. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Ab^k} e^{bz+b_0}.$$

若 $\alpha \neq \pm\beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{i\beta + a^k A}{i\alpha}$, $e^{b\eta} = \frac{i\beta - b^k A}{i\alpha}$. 同理, 结合(6)的第二式以及(18)可知 $\alpha U(z + \eta) - \beta U(z) \equiv 0$, 也即 $U(z) \equiv 0$. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Ab^k} e^{bz+b_0}.$$

这属于定理1.7中的第一种情形.

若 $Q_1(z) = c_1$, $P(z) = A$ 均为常数, $Q_2(z)$ 为非常数多项式, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1 e^{az+a_0} + \frac{Q_2(z)}{c_1} e^{bz+b_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

若 $Q_1(z)$ 为非常数多项式, $P(z) = A$ 为常数, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z) e^{az+a_0} + Q_2(z) e^{bz+b_0}}{2A}.$$

这也属于定理1.7中的第四种情形.

子情形3.3.2 若 $a_n = b_n$, 则(17)可改写为

$$H_{51}(z) e^{r_1(z)} \equiv 0,$$

其中

$$H_{51}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)} + \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{r_2(z)-r_1(z)} - e^{r_2(z+\eta)-r_1(z)}.$$

因为 $e^{r_1(z)} \neq 0$, 所以可以知道 $H_{51}(z) \equiv 0$, 也即

$$\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)} + \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{r_2(z)-r_1(z)} - e^{r_2(z+\eta)-r_1(z)} \equiv 0. \quad (19)$$

假设 $n \geq 2$, 则 $\deg(r_1(z+\eta) - r_1(z)) = \deg(r_2(z+\eta) - r_2(z)) = n-1 \geq 1$. 又因为 $a_n = b_n$, 所以 $\deg(r_2(z+i) - r_1(z+j)) \leq n-1 (i, j = 0, \eta)$. 结合(19), 可以分以下四种情形讨论.

若 $\deg(r_2(z) - r_1(z)) = n-1$ 且 $\deg(r_2(z+\eta) - r_1(z)) = n-1$, 则由 $r_1(z)$, $r_2(z)$ 的表达式可知 $\deg(r_1(z+\eta) - r_2(z)) \leq n-1$. 假设 $\deg(r_1(z+\eta) - r_2(z)) = n-1$, 则结合(19)以及引理2.5可得 $-1 \equiv 0$, 矛盾. 同理, 假设 $\deg(r_1(z+\eta) - r_2(z)) < n-1$, 同样结合(19)以及引理2.5可得 $-1 \equiv 0$, 矛盾.

若 $\deg(r_2(z) - r_1(z)) = n-1$ 且 $\deg(r_2(z+\eta) - r_1(z)) < n-1$, 则显然

$$\deg(r_1(z+\eta) - r_2(z)) = n-1,$$

故结合(19)以及引理2.5可得 $-\frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} \equiv 0$, 矛盾.

若 $\deg(r_2(z) - r_1(z)) < n - 1$, 则显然

$$\deg(r_2(z+\eta) - r_1(z+\eta)) = n - 1, \deg(r_1(z+\eta) - r_2(z+\eta)) < n - 1,$$

故(19)可改写为

$$H_{61}(z)e^{r_1(z+\eta)-r_1(z)} + H_{62}(z)e^{r_0(z)} \equiv 0,$$

其中 $r_0(z) \equiv 0$, 且

$$\begin{cases} H_{61}(z) = -\frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} - e^{r_2(z+\eta)-r_1(z+\eta)}, \\ H_{62}(z) = \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} + \\ \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{r_2(z)-r_1(z)}. \end{cases}$$

由引理2.5可知 $H_{6i}(z) \equiv 0 (i = 1, 2)$. 根据 $H_{61}(z) \equiv 0$ 可以得到 $r_2(z+\eta) - r_1(z+\eta) \equiv C_1$, 也即 $r_2(z) - r_1(z) \equiv C_1$. 令 $e^{r_2(z)-r_1(z)} = C$, 则同样由 $H_{61}(z) \equiv 0$ 可推得 $Q_1(z) = -CQ_2(z)$, 将其代入 $H_{62}(z) \equiv 0$ 可得

$$\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} + \frac{iC\beta Q_2(z)P(z+\eta) + CB(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} \equiv 0,$$

将 $Q_1(z) = -CQ_2(z)$ 代入上式可得

$$\frac{[A(z) + CB(z)]P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} \equiv 0,$$

也即 $A(z) + CB(z) \equiv 0$. 结合 $r_2(z) - r_1(z) \equiv C_1$ 以及 $Q_1(z) \equiv -CQ_2(z)$ 可知 $r_2^{(k)}(z) \equiv r_1^{(k)}(z)$ 以及 $Q_1^{(k)}(z) \equiv -CQ_2^{(k)}(z)$. 再将(7)中 $A(z)$, $B(z)$ 的表达式代入 $A(z) + CB(z) \equiv 0$ 可得 $A(z) \equiv 0$, 也即

$$Q_1(z)r_1'(z)^k + kQ_1'(z)r_1'(z)^{k-1} + \cdots + Q_1^{(k)}(z) + M_k(r_1'(z), \cdots, r_1^{(k)}(z)) \equiv 0.$$

接下来证明 $A(z) \equiv 0$ 是矛盾的. 由归纳假设可知, 当 $k = 1$ 时, 有

$$A_1(z) = Q_1(z)r_1'(z) + Q_1'(z) \equiv 0,$$

也即 $r_1(z) = -\ln Q_1(z) + C_1$, 计算可得 $Q_1(z) = e^{C_1}e^{-r_1(z)}$, 这显然与 $Q_1(z)$ 是一个多项式矛盾. 当 $k = 2$ 时, 有

$$A_2(z) = Q_1(z)r_1'(z)^2 + 2Q_1'(z)r_1'(z) + Q_1''(z) + Q_1(z)r_1''(z) \equiv 0,$$

也即

$$[Q_1(z)r_1'(z) + Q_1'(z)]' + [Q_1(z)r_1'(z) + Q_1'(z)]r_1'(z) \equiv 0,$$

故可得 $r_1(z) = -\ln[Q_1(z)r_1'(z) + Q_1'(z)] + C_2$, 同理可得矛盾. 当 $k = 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} A_3(z) &= Q_1(z)r_1'(z)^3 + 3Q_1'(z)r_1'(z)^2 + 3Q_1''(z)r_1'(z) + Q_1'''(z) + \\ &Q_1(z)r_1'''(z) + 3Q_1'(z)r_1''(z) + 3Q_1(z)r_1'(z)r_1''(z) \equiv 0, \end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} &[Q_1(z)r_1'(z)^2 + 2Q_1'(z)r_1'(z) + Q_1''(z) + Q_1(z)r_1''(z)]' + \\ &[Q_1(z)r_1'(z)^2 + 2Q_1'(z)r_1'(z) + Q_1''(z) + Q_1(z)r_1''(z)]r_1'(z) \equiv 0, \end{aligned}$$

故可得 $r_1(z) = -\ln[Q_1(z)r_1'(z)^2 + 2Q_1'(z)r_1'(z) + Q_1''(z) + Q_1(z)r_1''(z)] + C_3$, 同理可得矛盾. 假设当 $k = l - 1$ 时, 同理可得矛盾, 则当 $k = l$ 时, 根据上述规律, 有

$$[A_{l-1}(z)]' + [A_{l-1}(z)]r_1'(z) \equiv 0,$$

其中 $A_{l-1}(z)$ 是关于 $r_1'(z)$ 的 $l-1$ 次微分多项式. 故可得 $r_1(z) = -\ln[A_{l-1}(z)] + C_l$, 同理可得矛盾.

若 $\deg(r_2(z) - r_1(z)) < n-1$ 且 $\deg(r_2(z+\eta) - r_1(z)) < n-1$, 结合(19)以及引理2.5可得 $-\frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} \equiv 0$, 矛盾.

因此, 可以得出 $n=1$. 假定 $r_1(z) = az + a_0$, $r_2(z) = az + b_0$, 其中 $a \neq 0$, a_0, b_0 是常数. 此时, 显然 $r(z) = r_1(z) + r_2(z)$ 是非常数多项式.

由于 $r_1(z) = az + a_0$, $r_2(z) = az + b_0$, 可以得出 $A(z) = a^k Q_1(z) + ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z)$, $B(z) = -[a^k Q_2(z) + ka^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)]$. 将它们代入(19)可得

$$\begin{aligned} & \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{a\eta} + \\ & \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{b_0-a_0} - e^{a\eta+b_0-a_0} \equiv 0. \end{aligned} \quad (20)$$

子情形3.3.2.1 设 $P(z)$ 为非常数多项式.

若 $Q_1(z) = c_1$ 为常数, $Q_2(z)$ 为非常数多项式, 此时 $A(z) = c_1 a^k$. 将其代入(20)可得

$$\begin{aligned} & \frac{i\beta c_1 P(z+\eta) + c_1 a^k P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} + \\ & \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta} - \frac{c_1}{Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0} \equiv 1. \end{aligned} \quad (21)$$

显然 $\frac{c_1}{Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0}$ 为非常数. 故由引理2.2可知 $\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta} \equiv 1$ 或者 $\frac{i\beta c_1 P(z+\eta) + c_1 a^k P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} \equiv 1$. 假设 $\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta} \equiv 1$, 则可得 $i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - [a^k Q_2(z) + ka^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)] P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) e^{a\eta}$, 比较上式两端次数可得矛盾. 因此由引理2.2可知 $\frac{i\beta c_1 P(z+\eta) + c_1 a^k P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} \equiv 1$, 再结合(21)可知

$i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - [a^k Q_2(z) + ka^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z)] P(z)P(z+\eta) \equiv i\alpha c_1 P(z) e^{a\eta+a_0-b_0}$. 比较上式等号两端的次数可得矛盾.

若 $Q_2(z) = c_2$ 为常数, $Q_1(z)$ 为非常数多项式, 此时 $B(z) = -c_2 a^k$. 将其代入(20)可得

$$\begin{aligned} & \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} + \\ & \frac{i\beta c_2 P(z+\eta) - c_2 a^k P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta} - \frac{Q_1(z+\eta)}{c_2} e^{a_0-b_0} \equiv 1. \end{aligned} \quad (22)$$

可以用同样的方法得到矛盾.

若 $Q_1(z), Q_2(z)$ 均为非常数多项式, 则(20)可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} + \\ & \frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta} - \frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0} \equiv 1. \end{aligned} \quad (23)$$

显然, $\frac{i\beta Q_2(z)P(z+\eta) + B(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{-a\eta}$ 为非常数. 否则, 比较次数即可推得矛盾, 故由引理2.2可知 $-\frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0} \equiv 1$, 或者 $\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} \equiv 1$. 假设 $-\frac{Q_1(z+\eta)}{Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0} \equiv 1$, 则可推出 $Q_1(z+\eta) \equiv -Q_2(z+\eta) e^{b_0-a_0}$, 代入(20)可得

$$2a^k Q_1(z) + 2ka^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + 2Q_1^{(k)}(z) \equiv 0,$$

可推出 $Q_1(z) \equiv 0$, 这与 $Q_1(z)$ 是非常数多项式矛盾. 故可知

$$\frac{i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + A(z)P(z)P(z+\eta)}{i\alpha P(z)Q_2(z+\eta)} e^{a_0-b_0-a\eta} \equiv 1,$$

再结合(23)可得

$$\begin{cases} i\beta Q_2(z)P(z+\eta) - P(z)P(z+\eta) \times \\ \left[a^k Q_2(z) + k a^{k-1} Q_2'(z) + \cdots + Q_2^{(k)}(z) \right] \equiv i\alpha P(z)Q_1(z+\eta) e^{a\eta+a_0-b_0}, \\ i\beta Q_1(z)P(z+\eta) + P(z)P(z+\eta) \times \\ \left[a^k Q_1(z) + k a^{k-1} Q_1'(z) + \cdots + Q_1^{(k)}(z) \right] \equiv i\alpha P(z)Q_2(z+\eta) e^{a\eta+b_0-a_0}, \end{cases}$$

由此可得 $\deg(Q_1(z)) = \deg(Q_2(z))$, 再比较上述式子等号左右两端的增长极可得矛盾.

若 $Q_1(z) = c_1$, $Q_2(z) = c_2$ 均为常数, 此时 $A(z) = c_1 a^k$, $B(z) = -c_2 a^k$. 将其代入(20)可得

$$a^k P(z)P(z+\eta) [c_1 - c_2 e^{b_0-a_0}] \equiv [i\alpha P(z) e^{a\eta} - i\beta P(z+\eta)] [c_1 + c_2 e^{b_0-a_0}],$$

假设 $c_1 - c_2 e^{b_0-a_0} = 0$, 可知 $i\alpha P(z) e^{a\eta} - i\beta P(z+\eta) \equiv 0$, 即可推出 $P(z) \equiv 0$ 或者 $P(z) = A$ 为非零常数, 与假设矛盾. 假设 $c_1 - c_2 e^{b_0-a_0} \neq 0$, 则比较上式等号左右两端的增长级可得矛盾.

子情形3.3.2.2 设 $P(z) = A$ 为非零常数.

若 $Q_1(z) = c_1$ 为常数, $Q_2(z)$ 为非常数多项式, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1 e^{az+a_0} + \frac{Q_2(z)}{c_1} e^{az+b_0}}{2A}.$$

这属于定理1.7中的第四种情形.

若 $Q_2(z) = c_2$ 为常数, $Q_1(z)$ 为非常数多项式, 则同理可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{\frac{Q_1(z)}{c_2} e^{az+a_0} + c_2 e^{az+b_0}}{2A}.$$

这也属于定理1.7中的第四种情形.

若 $Q_1(z), Q_2(z)$ 均为非常数多项式, 则由(6)可得

$$f^{(k)}(z) = \frac{Q_1(z) e^{az+a_0} + Q_2(z) e^{az+b_0}}{2A}.$$

这也属于定理1.7中的第四种情形.

若 $P(z) = A$, $Q_1(z) = c_1$, $Q_2(z) = c_2$ 均为常数, 此时 $A(z) = c_1 a^k$, $B(z) = -c_2 a^k$. 将其代入(21)可得

$$a^k A [c_1 - c_2 e^{b_0-a_0}] \equiv [i\alpha e^{a\eta} - i\beta] [c_1 + c_2 e^{b_0-a_0}]. \quad (24)$$

假设 $c_1 - c_2 e^{b_0-a_0} = 0$, 则由(24)可知 $2c_1 [i\alpha e^{a\eta} - i\beta] = 0$, 也即 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}$. 此时

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1}{2A} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2A} e^{az+b_0} = \frac{c_1}{A} e^{az+a_0}, \quad f(z) = \frac{c_1}{A a^k} e^{az+a_0} + V(z), \quad (25)$$

其中 $V(z)$ 是满足 $\deg(V(z)) \leq k-1$ 的多项式.

若 $\alpha = \beta$, 则 $e^{a\eta} = 1$. 再结合(6)的第二式以及(25)可知

$$\begin{aligned} f(z+\eta) - f(z) &= \frac{c_1}{2i\alpha} e^{az+a_0} - \frac{c_2 e^{b_0-a_0}}{2i\alpha} e^{az+a_0} = \\ &= \frac{c_1}{A a^k} e^{a\eta} e^{az+a_0} - \frac{c_1}{A a^k} e^{az+a_0} + V(z+\eta) - V(z). \end{aligned}$$

由上式可推出 $V(z+\eta) - V(z) \equiv 0$, 也即 $V(z) \equiv d$, 其中 d 为常数. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{A a^k} e^{az+a_0} + d.$$

若 $\alpha \neq \beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{\beta}{\alpha}$. 同理, 结合(6)的第二式以及(25)可知 $\alpha V(z+\eta) - \beta V(z) \equiv 0$, 也

即 $V(z) \equiv 0$. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{Aa^k} e^{az+a_0}.$$

这属于定理1.7中的第三种情形.

假设 $c_1 - c_2 e^{b_0-a_0} \neq 0$, 则由(24)可知 $a^k = \frac{(i\alpha e^{a\eta} - i\beta)(c_1 + c_2 e^{b_0-a_0})}{A(c_1 - c_2 e^{b_0-a_0})}$. 由(6)的第一式有

$$f^{(k)}(z) = \frac{c_1}{2A} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2A} e^{az+b_0}, \quad f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Aa^k} e^{az+b_0} + W(z), \quad (26)$$

其中 $W(z)$ 是满足 $\deg(W(z)) \leq k-1$ 的多项式.

若 $\alpha = \beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{a^k A(c_1 - c_2 e^{b_0-a_0})}{i\alpha(c_1 + c_2 e^{b_0-a_0})} + 1$, 再结合(6)的第二式以及(26)可知

$$f(z+\eta) - f(z) = \frac{c_1}{2i\alpha} e^{az+a_0} - \frac{c_2}{2i\alpha} e^{az+b_0} = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{a\eta} e^{az+a_0} - \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Aa^k} e^{a\eta} e^{az+b_0} - \frac{c_2}{2Aa^k} e^{az+b_0} + W(z+\eta) - W(z).$$

由上式可推出 $W(z+\eta) - W(z) \equiv 0$, 也即 $W(z) \equiv d$, 其中 d 为常数. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Aa^k} e^{az+b_0} + d.$$

若 $\alpha = -\beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{a^k A(c_1 - c_2 e^{b_0-a_0})}{i\alpha(c_1 + c_2 e^{b_0-a_0})} - 1$. 同理, 结合(6)的第二式以及(26)可知 $W(z+\eta) + W(z) \equiv 0$, 也即 $W(z) \equiv 0$. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Aa^k} e^{az+b_0}.$$

若 $\alpha \neq \pm\beta$, 此时 $e^{a\eta} = \frac{a^k A(c_1 - c_2 e^{b_0-a_0})}{i\alpha(c_1 + c_2 e^{b_0-a_0})} + \frac{\beta}{\alpha}$. 同理, 结合(6)的第二式以及(26)可知 $\alpha W(z+\eta) - \beta W(z) \equiv 0$, 也即 $W(z) \equiv 0$. 因此可得

$$f(z) = \frac{c_1}{2Aa^k} e^{az+a_0} + \frac{c_2}{2Aa^k} e^{az+b_0}.$$

这属于定理1.7中的第二种情形.

最后, 若 $\alpha f(z+\eta) - \beta f(z) \equiv 0$ 时, 则由(3)可知 $f(z)$ 一定满足

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 = Q(z) e^{r(z)},$$

其中 $P(z)$, $Q(z)$ 是非零多项式, $r(z)$ 是非常数多项式. 这属于定理1.7中的第五种情形.

综上所述, 定理1.7得证.

致谢 衷心感谢审稿人仔细审阅本文并提出宝贵的意见.

参考文献:

- [1] Chen Zongxuan. Complex Differences and Difference Equations[M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [2] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [3] Laine I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
- [4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [5] Montel P. Lecons sur les Familles Normales de Fonctions Analytiques et leurs Applications[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1927: 135-136.
- [6] Gross F. On the equation $f^n(z) + g^n(z) = 1$ [J]. Bull Amer Math Soc, 1966, 72: 86-88.

- [7] Yang Chungchun. A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions[J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 26: 332-334.
- [8] Yang Chungchun, Li Ping. On the transcendental solutions of a certain of nonlinear differential equations[J]. Arch Math, 2004, 82: 442-448.
- [9] Chen Junfan, Lin Shuqing. On the existence of solutions of Fermat-type differential-difference equations[J]. Bull Korean Math Soc, 2021, 58(4): 983-1002.
- [10] 方成鸿, 徐洪焱. Fermat型复微分-差分方程的整函数解[J]. 数学年刊: A辑, 2022, 43(1): 1-16.
- [11] Gao Lingyun. Entire solutions of two types of systems of complex differential-difference equations[J]. Acta Math Sin Chin Ser, 2016, 59(5): 577-684.
- [12] 高凌云. 关于一类复微分-差分方程组的解[J]. 数学年刊: A辑, 2017, 38: 23-30.
- [13] Han Qi, Lü Feng. On the equation $f^n(z) + g^n(z) = e^{\alpha z + \beta}$ [J]. J Contem Math Anal, 2019, 54(2): 98-102.
- [14] Hu Peichu, Wang Wenbo, Wu Linlin. Entire solutions of differential-difference equations of Fermat type[J]. Bull Korean Math Soc, 2022, 59(1): 83-99.
- [15] Liu Kai, Cao Tingbin, Cao Hongzhe. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations[J]. Arch Math, 2012, 99(5): 147-155.
- [16] Liu Kai, Yang Lianzhong. On entire solutions of some differential-difference equations[J]. Comput Methods Funct Theory, 2013, 13(3): 433-447.
- [17] 刘曼莉, 高凌云. 复微分-差分方程组的超越解[J]. 中国科学, 2019, 49(11): 1633-1654.
- [18] 林书情, 陈俊凡. 一类非线性复微分差分方程解的不存在性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(1): 69-80.
- [19] Lü Feng, Han Qi. On the Fermat-type equation $f^3(z) + f^3(z+c) = 1$ [J]. Aequationes Math, 2017, 91(1): 129-136.
- [20] Wu Linlin, Hu Peichu, Lü Weiran, et al. Existence of meromorphic solutions of some generalized Fermat functional equations[J]. Aequationes Math, 2020, 94(1): 59-69.
- [21] 曾翠萍, 邓炳茂, 方明亮. 复微分-差分方程组的整函数解[J]. 数学学报中文版, 2019, 62(1): 123-136.

Transcendental entire solutions of Fermat type higher order complex differential-difference equation

LIU Xin-mei, CHEN Jun-fan

(School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

Abstract: By using Nevanlinna theory and combining the complex difference equations with differential equations, this paper investigates whether the following Fermat type higher order complex differential-difference equation

$$P(z)^2 f^{(k)}(z)^2 + [\alpha f(z + \eta) - \beta f(z)]^2 = Q(z)e^{r(z)}$$

has transcendental entire solutions with finite order or not, and obtains the precise form of finite order transcendental entire solutions of the above equation. The result extends some recent known results.

Keywords: complex differential-difference equations; transcendental entire functions; Nevanlinna theory

MR Subject Classification: 39B32; 34M05; 30D35