

具有非局部扩散的霍乱模型的动力学分析

曲思聪¹, 张冉^{1,2}, 刘利利^{3,4*}

(1. 黑龙江大学 数学科学学院, 黑龙江哈尔滨 150080;

2. 黑龙江大学 黑龙江省复杂系统理论与计算重点实验室, 黑龙江哈尔滨 150080;

3. 山西大学 复杂系统研究所, 山西太原 030006;

4. 山西大学 复杂系统数学技术山西省重点实验室, 山西太原 030006)

摘要: 文中建立了一类具有非局部扩散的霍乱传染病模型, 证明了模型正解的全局存在性和全局吸引子的存在性. 通过定义基本再生数, 得到系统平衡态的全局性质, 即当基本再生数小于1时, 系统的无病平衡态是全局吸引的; 当基本再生数大于1时, 系统是一致持久的. 此外, 在一定条件下, 系统存在全局吸引的地方病平衡态. 表明基本再生数是控制疾病生存和消亡的重要阈值.

关键词: 霍乱; 传染病动力学模型; 非局部扩散; 全局稳定性

中图分类号: O175.6

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)04-0445-11

§1 引言

霍乱是一种由霍乱弧菌引起的急性水传播传染病. 据估计, 全球每年大约有130万至400万人感染霍乱, 并且其中有2.1万至14.3万人因为霍乱而死亡, 该传染病目前仍影响着全球至少47个国家和地区^[1]. 近年来, 霍乱疫情主要集中在医疗卫生水平低、缺乏安全卫生饮用水源的发展中国家. 例如, 2010年海地爆发霍乱, 导致大约665000例确诊病例和8183人死亡病例^[2], 而此次爆发的原因之一是当地水源Artibonite河的传播. 由于全球经济发展和贫困的减少, 霍乱的发病率在未来将下降, 但由于极端天气引起的气候变化和海洋变化, 霍乱的发病率可能在未来几十年内增加^[3]. 因此, 研究霍乱的传播机制和发展趋势具有重要的理论和现实意义.

近年来, 数学模型已成为研究传染病传播规律以及分析传染病控制策略最有力工具之一^[4].

收稿日期: 2023-06-18 修回日期: 2025-09-11

*通讯作者, E-mail: liulili03@sxu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(12101309; 12126349; 12401638); 山西省自然科学基金(202303021211003); 黑龙江省自然科学基金优秀青年项目(YQ2024A011); 黑龙江省省属高等学校基本科研业务费(2022-KYYWF-1113); 黑龙江大学杰出青年科学基金(JCL202203)

2009年Tien和Eran建立了一个多传播途径的水媒传染病模型^[5]

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \beta_1 S(t)I(t) - \beta_2 S(t)W(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta_1 S(t)I(t) + \beta_2 S(t)W(t) - (\mu + \gamma)I(t), \\ \frac{dW(t)}{dt} = kI(t) - \delta I(t), \end{cases}$$

其中 $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $W(t)$ 分别表示时刻 t 的易感者、染病者和水源中病原体的密度. 该模型中易感者不仅被染病者所感染, 还可以因从环境中间接摄入病原体而感染. μ 表示系统的更新率以及人群的自然死亡率; β_1 和 β_2 分别为易感者接触染病者和环境中的病原体被感染的概率; γ 表示染病者的恢复率; k 和 δ 分别表示病原体从染病者体内的脱落率和病原体的死亡率. 通过构造合适的Lyapunov函数, Tien等^[5]得到系统平衡态的全局渐近稳定性. 如果将上述研究中的 $W(t)$ 理解成霍乱弧菌, 那么这个模型可以用来描述空间同质环境下的霍乱传染病.

越来越多的研究表明空间因素对霍乱的传播产生了显著的影响, 例如地理环境、社会经济结构以及气象和气候变化等. 对具有空间因素的生物模型, 需要考虑个体或种群的空间位置. 传染病动力学研究中通常应用反应扩散方程来描述个体具有空间扩散的效应. Zhou等^[6]考虑了一个具有一般反应项的反应扩散霍乱传染病模型, 并且分析了有界区域上系统正稳态的全局稳定性以及无界区域上的行波解存在性问题. 值得注意的是, Zhou等^[6]所考虑的是局部扩散模型, 但是随着全球化的发展, 很多传染病可以实现远距离的传播. Kot等^[7]指出非局部算子更适合用来描述大范围的扩散, 而且在对比了局部扩散和非局部扩散在生物学上的应用后, Lee等^[8]发现非局部扩散模型更适用于生物学, 在描述生物系统上更有优势. 因此, 为了描述当前世界日新月异的发展给霍乱传播带来的风险, 有必要研究非局部扩散的霍乱传染病模型.

§2 模型建立以及适定性分析

考虑非局部扩散以及一般发生率函数, 得到霍乱传染病模型

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = d_S \int_{\Omega} [J_1(x - y)S(y, t) - S(x, t)]dy + \Lambda(x) - \mu(x)S(x, t) - \\ \quad f(S(x, t), I(x, t)) - g(S(x, t), W(x, t)), \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = d_I \int_{\Omega} [J_2(x - y)I(y, t) - I(x, t)]dy - (\mu(x) + \alpha(x))I(x, t) + \\ \quad f(S(x, t), I(x, t)) + g(S(x, t), W(x, t)), \\ \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = d_W \int_{\Omega} [J_3(x - y)W(y, t) - W(x, t)]dy + k(x)I(x, t) - c(x)W(x, t), \end{cases} \quad (1)$$

具有初始条件

$$S(x, 0) = \phi_S(x) > 0, \quad I(x, 0) = \phi_I(x) \geq 0, \quad W(x, 0) = \phi_W(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega},$$

其中 $S(x, t)$ 、 $I(x, t)$ 和 $W(x, t)$ 分别表示空间位置 x 和时刻 t 的易感者、染病者和环境中霍乱弧菌的密度; $\mu(x)$ 为人群的自然死亡率, $\alpha(x)$ 为染病人群的移除率, $k(x)$ 为霍乱弧菌从染病人群中的脱落率, $c(x)$ 为霍乱弧菌死亡率. 易感者被染病者和环境中霍乱弧菌成功感染的发生率分别用一般的非线性函数 $f(S, I)$ 和 $g(S, W)$ 表示. 对于 $S > 0$, $I > 0$ 以及 $W > 0$, 函数 f 和 g 满足如下假设.

(A1) $f(S, I) > 0$ 以及 $g(S, W) > 0$. $f(S, I) = 0$ 当且仅当 $S = 0$ 或 $I = 0$, $g(S, W) = 0$ 当且仅当 $S = 0$ 或 $W = 0$.

(A2) $\frac{\partial f(S, I)}{\partial S} > 0$, $\frac{\partial f(S, I)}{\partial I} > 0$, $\frac{\partial^2 f(S, I)}{\partial I^2} \leq 0$. 函数 g 也具有相同的性质.

此外, 对模型(1)中的参数满足如下假设.

(A3) 扩散系数 $d_S \geq 0$, $d_I \geq 0$ 以及 $d_W > 0$. 另外, 模型参数 $\Lambda(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $k(\cdot)$ 和 $c(\cdot)$ 在 $\overline{\Omega}$ 是严格正的并且是Lipschitz连续.

满足上述假设的非线性函数的特例, 已在诸多文献中应用, 例如

(i) 双线性发生率 $f(S, I) = SI$;

(ii) 饱和发生率 $f(S, I) = \frac{SI}{1 + \alpha I}$;

(iii) 标准发生率 $f(S, I) = \frac{SI}{S + I}$.

不失一般性, 令 $h^+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} h(x)$ 以及 $h^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} h(x)$, 其中 $h(\cdot)$ 代表模型(1)各个参数. 模型(1)中引入了非局部扩散, $J * \phi(x) - \phi(x) = \int_{\Omega} J(x - y)\phi(y)dy - \phi(x)$, 生物意义是 $\int_{\Omega} J(x - y)\phi(y)dy$ 表示个体从空间中其他位置到达当前位置的概率, $-\int_{\Omega} J(y - x)\phi(x)dy = -\phi(x)$ 表示当前位置的个体到达空间中其他位置的概率. 模型(1)中核函数 J_i ($i = 1, 2, 3$)满足如下假设.

(A4) 对于 $x \in \overline{\Omega}$, $J_i(x) > 0$, $J_i(x) = J_i(-x)$, J_i 是Lipschitz连续的并且 $\int_{\Omega} J_i(x)dx = 1$.

下面将对模型(1)进行适定性分析, 引入如下空间和记号. 令 $\mathbb{X} = C(\overline{\Omega}, \mathbf{R})$ 以及 $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3$ 具有范数 $\|\phi\|_{\mathbb{X}} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\phi(x)|$, $\forall \phi \in \mathbb{X}$ 以及 $\|\psi\|_{\mathbb{Y}} = \max_{x \in \Omega} \sqrt{\|\psi_1\|_{\mathbb{X}}^2 + \|\psi_2\|_{\mathbb{X}}^2 + \|\psi_3\|_{\mathbb{X}}^2}$, $\forall \psi \in \mathbb{Y}$. 进一步, 令 $\mathbb{X}_+ = C(\overline{\Omega}, \mathbf{R}_+)$ 以及 $\mathbb{Y}_+ = \mathbb{X}_+^3$. 由[9]可知, $(\mathbb{X}, \mathbb{X}_+)$ 和 $(\mathbb{Y}, \mathbb{Y}_+)$ 是强有序的Banach空间. 定义 $\mathbb{X}$ 上的线性算子 $\mathcal{A}[\phi](x) := \text{diag}(\mathcal{A}_S\phi_1(x), \mathcal{A}_I\phi_2(x), \mathcal{A}_W\phi_3(x))$ 为

$$\begin{cases} \mathcal{A}_S\phi(x) = d_S \int_{\Omega} [J_1(x - y)\phi(y) - \phi(x)]dy - \mu(x)\phi(x), \\ \mathcal{A}_I\phi(x) = d_I \int_{\Omega} [J_2(x - y)\phi(y) - \phi(x)]dy - (\mu(x) + \alpha(x))\phi(x), \\ \mathcal{A}_W\phi(x) = d_W \int_{\Omega} [J_3(x - y)\phi(y) - \phi(x)]dy - c(x)\phi(x), \end{cases}$$

以及

$$\mathcal{F}[\phi](x) := \begin{pmatrix} \Lambda(x) - f(\phi_S(x), \phi_I(x)) - g(\phi_S(x), \phi_W(x)) \\ f(\phi_S(x), \phi_I(x)) + g(\phi_S(x), \phi_W(x)) \\ k(x)\phi_I(x) \end{pmatrix}.$$

对于 $i = 1, 2, 3$, 由文献[10]中的定理1.2可知算子 $\mathcal{A}_i$ 是连续的, 并且在 $\mathbb{X}$ 上生成一致连续半群 $\{T_i(t)\}_{t \geq 0}$, 其中 $T_i = e^{\mathcal{A}_i t}$. 现在将模型(1)转化为抽象Cauchy问题

$$\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{F}[u](t), \quad u(0) = u_0,$$

其中 $u(\cdot, t) = (S(\cdot, t), I(\cdot, t), W(\cdot, t))^T$.

引理2.1 令 $\phi_0 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T \in \mathbb{Y}_+$, 则存在 $T_{\max} > 0$, 使得当 $t \in [0, T_{\max})$ 时, 系统(1)存在唯一解 $(S(x, t), I(x, t), W(x, t))$.

证 由于 $\mathcal{A}$ 是一致连续半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元, 则系统(1)的解可以写成

$$u(x, t) = T(t)\phi_0(x) + \int_0^t T(t-s)\mathcal{F}(u(x, s))ds, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty),$$

其中 $T[\phi](x) = \text{diag}(T_i[\phi](x))(i = 1, 2, 3)$, 可知 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{Y}$ 上是Fréchet可导的. 再结合文献[11]的推论4.16, 此引理得证.

引理2.2 如果 $u = (S, I, W)^T$ 是系统(1)具有初值条件 $\phi_0 \in \mathbb{Y}_+$ 的解, 那么对于任意的 $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, t_0)$, 有 $u(\cdot, t) \in \mathbb{Y}_+$.

证 首先证明 S 的正性. 应用反证法, 假设存在 $t_0 > 0$, 使得对于任意的 $t \in (0, t_0)$, 有 $S(\cdot, t) > 0$ 以及 $S(\cdot, t_0) = 0$. 由系统(1)解的连续性, 以及 ϕ_1 的正性, 可以得到 $\frac{\partial S(\cdot, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \leq 0$. 另一方面, 由系统(1)的第一个方程, 有 $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \Lambda(x) > 0, x \in \bar{\Omega}$, 此处得到一个矛盾. 因此, 对于任意的 $(x, t) \in [0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$, 都有 $S(x, t) > 0$.

下面关注 I 和 W 的正性. 令 $t_1 = \min\{t_I, t_W\}$, 其中 $t_I := \inf\{t \in [0, T_{\max}) | I(\cdot, t) = 0\}$ 以及 $t_W := \inf\{t \in [0, T_{\max}) | W(\cdot, t) = 0\}$. 如果 $t_I < t_W$, 那么 $t_1 = t_I$. 通过系统(1)初始条件的正性和解的连续性知, 存在 $\phi_0 \in \mathbb{Y}_+$ 使得 $I(\cdot, t_1) = 0, W(\cdot, t_1) > 0, I'(\cdot, t_1) < 0$, 并且对于任意的 $t \in [0, t_1)$, 都有 $I(\cdot, t) > 0$. 应用系统(1)的第二个方程, 可以得到 $\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = g(S(\cdot, t_1), W(\cdot, t_1)) > 0$, 得到矛盾. 另一方面, 如果 $t_I \geq t_W$, 可知 $t_1 = t_W$. 则对于任意的 $t \in [0, t_1]$, 有 $W(\cdot, t_1) = 0, I(\cdot, t_1) > 0$ 以及 $W'(\cdot, t_1) < 0$. 应用系统(1)的最后一个方程, 可得 $\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = k(\cdot)I(\cdot, t_1) > 0$, 得到矛盾. 因此, 对于任意的 $(x, t) \in [0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}$ 和 $\phi_0 \in \mathbb{Y}_+$, 都有 $u(x, t) > 0$.

下一步将上述局部解延拓到全局解, 从而有下面的定理.

定理2.1 对于任意的 $\phi_0 \in \mathbb{Y}_+$, 系统(1)在 $[0, \infty)$ 上存在唯一的解 $u(x, t; \phi)$. 进一步地, 系统的解映射生成一个解半流 $\Phi_t : \mathbb{Y}_+ \rightarrow \mathbb{Y}_+$ 满足 $\Phi[\phi](t) = (S(\cdot, t), I(\cdot, t), W(\cdot, t))$.

证 考虑问题

$$\frac{\partial \tilde{S}(x, t)}{\partial t} = \mathcal{A}_1 \tilde{S}(x, t) + \Lambda(x), \quad x \in \bar{\Omega}, t > 0. \quad (2)$$

容易得到, 系统(2)的解是系统(1)的第一个方程的上解. 应用文献[12]的引理2.1, 可知如果初值满足 $\phi_1(x) < S^0(x)$, 对于任意的 $t \geq 0$ 以及 $x \in \bar{\Omega}$, 方程(2)有唯一的正平衡态 $S^0(x) = (-\mathcal{A}_1^{-1})\Lambda(x)$. 令 $N(x, t) = S(x, t) + I(x, t)$, 由系统(1)的前两个方程, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} N(x, t) dx \leq \Lambda^+ |\Omega| - \mu^- \int_{\Omega} (S(x, t) + I(x, t)) dx.$$

应用比较原理, 可以得到对于任意的 $x \in \bar{\Omega}$ 有

$$\sup_{t \in [0, T_{\max})} \int_{\Omega} N(x, t) dx \leq (\|\phi_1\|_{\infty} + \|\phi_2\|_{\infty}) |\Omega| + \frac{\Lambda^+ |\Omega|}{\mu^-} := C_1.$$

进一步地, 则有

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} \leq (d_S + d_I)C_1 + \Lambda^+ - (d^- + \mu^-)N(x, t),$$

进而有

$$\sup_{t \in [0, T_{\max})} N(x, t) \leq \|\phi_1\|_{\infty} + \|\phi_2\|_{\infty} + \frac{(d_S + d_I)C_1 + \Lambda^+}{d^- + \mu^-} := C_2.$$

应用系统(1)的第三个方程, 易得

$$\sup_{t \in [0, T_{\max})} W(x, t) \leq \|\phi_3\|_{\infty} + \frac{k^+ C_2}{c^-} := C_3.$$

由上述的有界性可知此引理成立.

注意到系统(1)是非紧的, 下面将应用Kuratowski测度的相关理论证明系统解半流是渐近光滑的, 首先给出定义^[13].

定义2.1 称连续映射 $f: X \rightarrow X$ 是 κ -压缩的 (即 l 阶 κ -收缩, $0 \leq l < 1$), 如果 f 将有界集映射到有界集, 并且对于任意的非空有界闭集 $B \subset X$ 满足 $\kappa(B) > 0$, 有 $\kappa(f(B)) < l\kappa(B) < \kappa(B)$, 其中 $\kappa(B) := \inf\{r: B \text{ 有限覆盖的直径小于 } r\}$ 表示Kuratowski测度.

引理2.3 对于任意的有界闭集 $B \subset \mathbb{Y}_+$, 解半流 Φ_t 在 $\mathbb{Y}_+$ 上是 κ -压缩的, 即 $\kappa(\Phi(t)B) \leq e^{-\nu t} \kappa(B)$, 其中 $\nu = \min_{x \in \Omega} \{\mu(x), c(x)\}$.

证 由定理2.1知系统(1)的解具有形式

$$\Phi[u](t) = T(t)\phi_0(x) + \int_0^t T(t-s)\mathcal{F}[u](s)ds, \quad \forall t > 0, \quad \phi_0 \in \mathbb{Y}_+.$$

下面将上述解半流分解成: $\Phi(t) = \hat{\Phi}(t) + \tilde{\Phi}(t)$, 其中

$$\hat{\Phi}[u](t) = T(t)\phi_0(x), \quad \tilde{\Phi}[u](t) = \int_0^t T(t-s)\mathcal{F}[u](s)ds, \quad \forall t > 0.$$

应用文献[14]中的定理5可知 $\tilde{\Phi}[u](t)$ 是等度连续的. 对于 $t \geq 0$ 和 $u \in B$, 进而应用Arzelà-Ascoli定理可以得到 $\tilde{\Phi}[u](t)$ 是预紧的. 另一方面, $\forall t > 0$, 有 $\|\hat{\Phi}[u](t)\| = \|T[\phi_0](t)\| \leq e^{-\nu t} \|\phi_0\|$, 其中 $\nu = \min\{\mu^-, c^-\}$. 因此 $\|\hat{\Phi}(t)\| \leq e^{-\nu t}$, $\forall t > 0$. 进而 $\forall t > 0$ 以及 $u \in B \subset \mathbb{Y}_+$ 有

$$\kappa(\Phi(t)(B)) \leq \kappa(\hat{\Phi}(t)(B)) + \kappa(\tilde{\Phi}(t)(B)) \leq \|\hat{\Phi}(t)\kappa(B)\| \leq e^{-\nu t} \kappa(B).$$

即 $\Phi(t)$ 是 $e^{-\nu t}$ 阶 κ 压缩的.

引理2.3结合文献[15]中的引理2.3.5, 可知解半流 $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ 是渐近光滑的. 应用文献[15]中的定理3.4.8并结合系统的耗散性可以得到系统全局吸引子的存在性, 即如下定理.

定理2.2 对于 $t > 0$, 解半流 $\Phi(t): \mathbb{Y}_+ \rightarrow \mathbb{Y}_+$ 在 $\mathbb{Y}_+$ 上存在全局吸引子.

进一步可以得到下面的集合是系统的正不变集.

$$D = \{\phi_0 \in \mathbb{Y}_+ \mid 0 < N(x, t) \leq C_2, 0 < W(x, t) \leq C_3\}.$$

§3 基本再生数以及阈值动力学

本节将应用再生算子理论给出模型(1)的基本再生数, 并证明其是一个重要的阈值参数. 由文献[12]中的命题2.3可知, 有如下引理成立.

引理3.1 系统(1)有唯一的无病稳态 $E_0 = (S^0(x), 0, 0)$, 其中 $S^0(x) = (-A_S)^{-1} \Lambda(x)$ 在 Ω 上是Lipschitz连续的.

系统(1)的染病仓室在 E_0 处进行线性化, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = \mathcal{A}_I I(x, t) + f'_I(S^0(x), 0)I(x, t) + g'_W(S^0(x), 0)W(x, t), \\ \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \mathcal{A}_W W(x, t) + p(x)I(x, t). \end{cases}$$

对上述方程组应用常数变易公式, 有

$$\begin{cases} I(x, t) = e^{\mathcal{A}_I t} \phi_I(x) + \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} [f'_I(S^0(x), 0)I(x, s) + g'_W(S^0(x), 0)W(x, s)] ds, \\ W(x, t) = e^{\mathcal{A}_W t} \phi_W(x) + p(x) \int_0^t e^{\mathcal{A}_W(t-s)} I(x, s) ds. \end{cases} \quad (3)$$

将(3)中的第二个方程带入到第一个方程中, 并假定 $\phi_W(x) = 0$, 有

$$\begin{aligned} I(x, t) = & \phi_I(x)e^{\mathcal{A}_I t} + \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} f'_I(S^0(x), 0) I(s, x) ds + \\ & p(x) \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} g'_W(S^0(x), 0) \int_0^s e^{\mathcal{A}_W(s-\tau)} d\tau ds = \\ & \phi_I(x)e^{\mathcal{A}_I t} + \int_0^t e^{\mathcal{A}_I s} f'_I(S^0(x), 0) I(t-s, x) ds + \\ & p(x) \int_0^t e^{\mathcal{A}_I s} g'_W(S^0(x), 0) \int_0^s e^{\mathcal{A}_W \tau} I(t-s-\tau) d\tau ds. \end{aligned} \quad (4)$$

可以得到(4)是一个更新方程. 定义再生算子

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\phi](x) = & f'_I(S_0(x), 0) \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_I s} ds \phi(x) + p(x) g'_W(S_0(x), 0) \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_I s} ds \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_W \tau} d\tau \phi(x) = \\ & f'_I(S_0(x), 0) (-\mathcal{A}_I)^{-1} \phi(x) + p(x) g'_W(S_0(x), 0) (-\mathcal{A}_I)^{-1} (-\mathcal{A}_W)^{-1} \phi(x). \end{aligned}$$

显然 $\mathcal{R}$ 是正的紧算子. 进一步, 定义算子 $\mathcal{R}$ 的谱半径为基本再生数^[16], 即 $\mathfrak{R}_0 = r(\mathcal{R})$.

下面令 $L_1[\phi](x) + L_2[\phi](x) = \mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, 其中

$$L_1[\phi](x) = f'_I(S^0(x), 0) \phi(x) + p(x) g'_W(S^0(x), 0) (-\mathcal{A}_W)^{-1} \phi(x), \quad L_2[\phi](x) = \mathcal{A}_I \phi(x).$$

应用上述分析, 可以得到算子 L_1 是正且紧的, 算子 L_2 生成一个正的连续半群 $T_2(t) = \{e^{\mathcal{A}_I t}\}_{t \geq 0}$.

引理3.2 $r(\mathcal{R}) - 1$ 与 $s(\mathcal{L})$ 具有相同的符号, 其中 $s(\mathcal{L}) = \sup\{\operatorname{Re} \lambda | \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}$ 表示 $\mathcal{L}$ 的谱半径, $\sigma(\cdot)$ 表示 $\mathcal{L}$ 的谱界.

证 首先证明 $r(\mathcal{R}) = 1$ 当且仅当 $s(\mathcal{L}_0) = 0$. 假设 $r(\mathcal{R}) = 1$, 则 $\mathcal{R}[\phi](x) = \phi(x)$. 对于任意的 $\phi \in \mathbb{X}$, 由 $\mathcal{R}$ 的定义有

$$f'_I(S_0(x), 0) (-\mathcal{A}_I)^{-1} \phi(x) + p(x) g'_W(S_0(x), 0) (-\mathcal{A}_I)^{-1} (-\mathcal{A}_W)^{-1} \phi(x) = \phi(x).$$

将 $-\mathcal{A}_I$ 作用到上式两端得到 $\mathcal{L}[\phi](x) = 0$, 因此 $s(\mathcal{L}) = 0$. 另一方面, 假设 $s(\mathcal{L}) = 0$, 则存在特征函数 ψ 使得 $\mathcal{L}\psi(x) = 0$. 由 $\mathcal{L}$ 的定义, 可得

$$f'_I(S^0(x), 0) \psi(x) + p(x) g'_W(S^0(x), 0) (-\mathcal{A}_W)^{-1} \psi(x) = \psi(x).$$

将 $(-\mathcal{A}_I)^{-1}$ 作用到上式两端得到 $\mathcal{L}[\psi](x) = 0$, 可得 $\mathfrak{R}[\psi](x) = \psi(x)$, 即 $r(\mathcal{R}) = 1$.

下面将证明当 $r(\mathcal{R}) > 1$ 时 $s(\mathcal{L}) > 0$. 由Krein-Rutman定理可知存在特征值 $\eta > 1$ 以及特征向量 $\phi \in \mathbb{X}_+$ 使得 $\mathcal{R}[\phi](x) = \eta \phi(x) = (\eta - 1)\phi(x) + \phi(x)$. 将 $-\mathcal{A}_2$ 同时作用于上式两端, 有 $\mathcal{L}\phi = (\eta - 1)\phi$. 因此 $s(\mathcal{L}) > 0$. 假设算子 $\mathcal{L}$ 有特征值 $s(\mathcal{L}) < 0$ 以及正的特征向量 ϕ . 这意味着 $\mathcal{L}[\phi](x) = s(\mathcal{L})\phi(x)$. 另一方面, 将 $(-\mathcal{A}_I)^{-1}$ 作用到上式两端可以得到 $\mathfrak{R}[\phi](x) = (s(\mathcal{L}) + 1)\phi(x)$. 因此, $\mathfrak{R}_0 > 1$ 时 $s(\mathcal{L}) > 0$. 同理可以证明 $\mathfrak{R}_0 < 1$ 时 $s(\mathcal{L}) < 0$.

应用文献[16]中的结论, 可以得到下述定理.

定理3.1 如果 $\mathfrak{R}_0 < 1$, 则系统(1)的无病稳态 E_0 是局部渐近稳定的.

下面将关注系统(1)的无病稳态 E_0 的全局吸引性.

定理3.2 如果 $\mathfrak{R}_0 < 1$, 则系统(1)的无病稳态 E_0 是全局吸引的.

证 构造Lyapunov泛函

$$W(t) = \int_{\Omega} [V_I(x, t) + V_W(x, t)] dx, \quad \forall t \geq 0,$$

其中 $V_I(x, t) = I(x, t)$, $V_W(x, t) = g'_W(S^0, 0)W(x, t)(-\mathcal{A}_W)^{-1}$. 由系统(1)正解的全局存在性可

知, $V_I(x, t)$ 和 $V_W(x, t)$ 是有定义的. 对于任意的 $t \in \mathbf{R}_+$ 以及 $x \in \Omega$, 计算 V_I 关于 t 的导数可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_I(x, t)}{\partial t} \right|_{(1.2)} &= d_I \int_{\Omega} J(x-y)[I(y, t) - I(x, t)]dy + \\ &\quad f(S(x, t), I(x, t)) + g(S(x, t), W(x, t)) - (\mu(x) + \alpha(x))I(x, t) \leq \\ &\quad f'_I(S^0, 0)I(x, t) + g'_W(S^0, 0)W(x, t) + \mathcal{A}_I I(x, t). \end{aligned}$$

类似地, V_W 关于 t 的导数为

$$\left. \frac{\partial V_W(x, t)}{\partial t} \right|_{(1.2)} = g'_W(S^0, 0)p(x)(-\mathcal{A}_W)^{-1}I(x, t) - g'_W(S^0, 0)W(x, t).$$

将上述两式相加, 得到

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W(t)}{\partial t} \right|_{(1.2)} &\leq \int_{\Omega} f'_I(S^0, 0)I(x, t) + g'_W(S^0, 0)p(x)(-\mathcal{A}_W)^{-1}I(x, t) + \mathcal{A}_I I(x, t)dx = \\ &\quad \int_{\Omega} \mathcal{L}I(x, t)dx. \end{aligned}$$

因为 $\Re_0 < 1$ 可知 $s(\mathcal{L}) < 0$, 进而 $\left. \frac{\partial W(t)}{\partial t} \right|_{(1.2)} \leq 0$. 应用 Kraskovkii-LaSalle 定理^[17] 可得系统(1)的无病稳态 E_0 是全局吸引的.

下面将证明一种特殊形式下, 即

$$f(S(x, t), I(x, t)) = S(x, t)f_1(I(x, t)), \quad g(S(x, t), W(x, t)) = S(x, t)g_1(W(x, t)) \quad (5)$$

时, 系统(1)的地方病稳态的全局性质. 下面将证明系统的持久性, 定义 $\rho: D \rightarrow \mathbb{X}$ 为

$$\rho(\Phi_t(\phi)) = \phi_1(x, t)f(\phi_2(x, t)) + \phi_1(x, t)g(\phi_3(x, t)).$$

进一步定义如下空间

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{\phi \in D \mid \phi_2(x, \cdot) \not\equiv 0 \text{ 以及 } \phi_3(x, \cdot) \not\equiv 0\}, \\ \partial D_0 &:= \{\phi \in D \mid \phi_2(x, \cdot) \equiv 0 \text{ 或 } \phi_3(x, \cdot) \equiv 0\}, \\ M_{\partial} &:= \{\phi_0 \in \partial D_0 \mid \Phi_t(\phi_0) \in \partial D_0, \forall t \geq 0\}. \end{aligned}$$

令 $\omega(\phi)$ 是系统(1)解轨道 $\gamma^+(\phi) = \{\Phi_t(\phi) \mid t \geq 0\}$ 的 ω 极限集, 由文献[12]的引理4.1可知

引理3.3 对于任意 $\phi_0 \in M_{\partial}$, 有 $\omega(\phi_0) = \{E_0\}$.

现在证明一致弱 ρ -持久.

定理3.3 如果 $\Re_0 > 1$ 且(5)成立, 则系统(1)是一致弱 ρ -持久的, 即存在正常数 ϵ 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\rho(\Phi_t(\phi))|_{\mathbb{X}} \geq \epsilon, \quad \forall \phi_0 \in D_0.$$

证 如果 $\Re_0 > 1$, 则存在充分小的 $\epsilon > 0$ 使得

$$(S_0(x) - \epsilon)f'_I(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}\phi(x) + (S_0(x) - \epsilon)p(x)g'_W(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}(-\mathcal{A}_W)^{-1}\phi(x) > 1.$$

即

$$(-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon)[f'_I(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}\phi(x) + p(x)g'_W(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}(-\mathcal{A}_W)^{-1}\phi(x)]\phi(x) > 1. \quad (6)$$

应用反证法, 假设存在 $T_1 > 0$ 使得对于任意的 $(x, t) \in \Omega \times [T_1, \infty)$, 有 $\rho(\Phi_t(\phi)) < \epsilon$. 由常数变易公式以及系统(1)的第一个方程, 存在 $T_2 > T_1$ 使得对于任意的 $(x, t) \in \Omega \times [T_2, \infty)$, 有 $S(x, t) \geq (-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon)$. 此外, 由假设(A2)知 $f_1(I)/I$ 和 $g_1(W)/W$ 是非增的函数, 对于系统(1)的后两个方程, 存在 $T_3 > 0$ 使得对于任意的 $(x, t) \in \Omega \times [T_3, \infty)$, 有 $I(x, t) \geq \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} S(x, s)[f'_I(0)I(x, s) + g'_I(0)W(x, s)]ds$, 以及 $W(x, t) \geq \int_0^t e^{\mathcal{A}_W(t-s)} k(x)I(x, s)ds$. 因

此,可以得到

$$I(x, t) \geq (-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon) \left[f'(0) \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} I(x, s) ds + \right. \\ \left. g'(0) \int_0^t e^{\mathcal{A}_I(t-s)} \int_0^s e^{\mathcal{A}_W(t-\tau)} k(x) I(x, \tau) d\tau ds \right].$$

应用Laplace变换得到

$$\widehat{I(x, t)} \geq (-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon) \left[f'(0) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\mathcal{A}_I s} I(x, t-s) ds dt + \right. \\ \left. g'(0) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^s e^{\mathcal{A}_I s} e^{\mathcal{A}_W \tau} I(x, t-s-\tau) d\tau ds dt \right].$$

由卷积公式及其性质,可以得到

$$\widehat{I(x, t)} \geq (-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon) \left[f'(0) \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_I s} e^{-\lambda s} \int_0^\infty I(x, t) dt ds + \right. \\ \left. g'(0) \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_I s} e^{-\lambda s} \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_W \tau} e^{-\lambda \tau} \int_0^\infty e^{-\lambda t} I(x, t) dt d\tau ds \right].$$

定义 $\tilde{I}(\hat{x}, \lambda) := \min_{x \in \Omega} \hat{I}(x, \lambda)$ 以及

$$\hat{R}[\psi] := (-\mathcal{A}_S)^{-1}(\Lambda(x) - \epsilon) [f'(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}[\psi](\lambda) + g'(0)(-\mathcal{A}_I)^{-1}(-\mathcal{A}_W)^{-1}[\psi](\lambda)].$$

则 $\tilde{I}(\hat{x}, \lambda) \geq \hat{R}[\tilde{I}](\hat{x}, \lambda)$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 与式(6)矛盾, 得证.

应用文献[18]中的定理5.2以及[12]中定理4.1, 有以下结论.

定理3.4 如果 $\Re_0 > 1$, 那么系统(1)在 D_0 上是一致持久的.

定理3.4知系统(1)至少存在一个地方病平衡态 E^* , 下面证明特殊情况下 E^* 的全局吸引性.

定理3.5 假设 $d_I = d_W = 0$. 当 $\Re_0 > 1$ 且(5)成立时, 地方病平衡态 E^* 是全局吸引的.

证 对任意 $s > 0$, 令 $\varphi(s) = s - 1 - \ln s$. 构造Lyapunov泛函

$$L(t) = \int_{\Omega} S^*(x) \sum_{i=1}^3 L_i(x, t) dx,$$

其中

$$L_1(x, t) = S^*(x) \varphi \left(\frac{S(x, t)}{S^*(x)} \right), \quad L_2(x, t) = I^*(x) \varphi \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right),$$

以及

$$L_3(x, t) = A(x) W^*(x) \varphi \left(\frac{W(x, t)}{W^*(x)} \right).$$

应用 φ 函数的性质, 很容易验证 $L(t) \geq 0$. 对于上述泛函有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\mu(x)}{S(x, t)} (S^*(x) - S(x, t))^2 + \\ &\left(1 - \frac{S^*(x)}{S(x, t)} \right) [S^*(x) f_1(I^*(x)) - S(x, t) f(I(x, t))] + \\ &\left(1 - \frac{S^*(x)}{S(x, t)} \right) [S^*(x) g_1(W^*(x)) - S(x, t) g(W(x, t))] + \\ &d_S \left(1 - \frac{S^*(x)}{S(x, t)} \right) \int_{\Omega} J_1(x-y) S(y, t) dy + d_S \left(1 - \frac{S(x, t)}{S^*(x)} \right) \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(y) dy. \end{aligned}$$

下面计算 L_2 的导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2(x, t)}{\partial t} = & \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)}\right) d_I \left(\int_{\Omega} J_2(x-y) I_h(y, t) dy - I_h(x, t) \right) + \\ & \left(1 - \frac{I^*(x)}{I(x, t)}\right) (S(x, t) f(I(x, t)) + S(x, t) g(W(x, t)) - \alpha(x) I(x, t)). \end{aligned}$$

利用平衡点条件 $S^*(x) f(I^*(x)) + S^*(x) g(W^*(x)) - \alpha(x) I^*(x) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2(x, t)}{\partial t} = & S(x, t) f(I(x, t)) + S(x, t) g(W(x, t)) - \\ & S^*(x) f(I^*(x)) \frac{I(x, t)}{I^*(x)} - S^*(x) g(W^*(x)) \frac{I(x, t)}{I^*(x)} - \\ & S^*(x) f_1(I^*(x)) \frac{S(x, t) f_1(I(x, t)) I^*(x)}{S^*(x) f_1(I^*(x)) I(x, t)} - \\ & S^*(x) g_1(W^*(x)) \frac{S(x, t) g_1(W(x, t)) I^*(x)}{S^*(x) g_1(W^*(x)) I(x, t)} + S^*(x) f_1(I^*(x)) + S^*(x) g_1(W^*(x)). \end{aligned}$$

应用关系 $k(x) I^*(x) = c(x) W^*(x)$, 计算 L_3 的导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3(x, t)}{\partial t} = & A(x) \left(1 - \frac{W^*(x)}{W(x, t)}\right) (k(x) I(x, t) - c(x) W(x, t)) = \\ & A(x) k(x) I(x, t) - A(x) k(x) I^*(x) \frac{W(x, t)}{W^*(x)} - \\ & A(x) k(x) I(x, t) \frac{W^*(x)}{W(x, t)} + A(x) k(x) I^*(x). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \Pi = & d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(x) S(y, t) \left(1 - \frac{S^*(x)}{S(x, t)}\right) dy dx + \\ & d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(x) S^*(y) \left(1 - \frac{S}{S^*(x)}\right) dy dx = \\ & d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(x) S^*(y) \left(1 - \frac{S(x, t)}{S^*(x)} + \frac{S(y, t)}{S^*(y)} - \frac{S^*(x) S(y, t)}{S(x, t) S^*(y)}\right) dy dx, \end{aligned}$$

并取

$$A(x) = \frac{S^*(x) g_1(W^*)}{k(x) I^*(x)},$$

经过整理可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} = & - \int_{\Omega} - \frac{\mu(x) S^*(x)}{S(x, t)} (S^*(x) - S(x, t))^2 dx + \Pi - \\ & \int_{\Omega} (S^*(x))^2 f_1(I^*(x)) \left(\varphi \left(\frac{S^*(x)}{S(x, t)} \right) + \varphi \left(\frac{S(x, t) f_1(I(x, t) I^*(x))}{S^*(x) f_1(I^*(x)) I(x, t)} \right) \right) dx - \\ & \int_{\Omega} (S^*(x))^2 f_1(I^*(x)) \left(\varphi \left(\frac{I(x, t)}{I^*(x)} \right) - \varphi \left(\frac{f_1(I(x, t))}{f_1(I^*(x))} \right) \right) dx - \\ & \int_{\Omega} (S^*(x))^2 g_1(W^*(x)) \left(\varphi \left(\frac{S^*(x)}{S(x, t)} \right) + \varphi \left(\frac{S(x, t) g_1(W(x, t) I^*(x))}{S^*(x) g_1(W^*(x)) I(x, t)} \right) \right) dx - \\ & \int_{\Omega} (S^*(x))^2 g_1(W^*(x)) \left(\varphi \left(\frac{I(x, t) W^*(x)}{I^*(x) W(x, t)} \right) \right) dx - \\ & \int_{\Omega} (S^*(x))^2 g_1(W^*(x)) \left(\varphi \left(\frac{W(x, t)}{W^*(x)} \right) - \varphi \left(\frac{g_1(W(x, t))}{g_1(W^*(x))} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

另一方面, 对 Π 交换积分次序, 得到

$$\begin{aligned}\Pi &= d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(x) S(y) \left(1 - \frac{S(x,t)}{S^*(x)} + \frac{S(y,t)}{S^*(y)} - \frac{S^*(x)S(y,t)}{S(x,t)S^*(y)} \right) dx dy = \\ &= d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(y-x) S^*(y) S^*(x) \left(1 - \frac{S(y,t)}{S^*(y)} + \frac{S(x,t)}{S^*(x)} - \frac{S^*(y)S(x,t)}{S(y,t)S^*(x)} \right) dy dx = \\ &= d_S \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(y) S^*(x) \left(1 - \frac{S(y,t)}{S^*(y)} + \frac{S(x,t)}{S^*(x)} - \frac{S^*(y)S(x,t)}{S(y,t)S^*(x)} \right) dy dx.\end{aligned}$$

可以得到

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} J_1(x-y) S^*(y) S^*(x) \left(2 - \frac{S^*(x)S(y,t)}{S(x,t)S^*(y)} - \frac{S^*(y)S(x,t)}{S(y,t)S^*(x)} \right) dy dx.$$

由假设(A2)有

$$\varphi \left(\frac{f_1(I(x,t))}{f_1(I^*(x))} \right) - \varphi \left(\frac{I(x,t)}{I^*(x)} \right) \leq 0, \quad \varphi \left(\frac{g_1(W(x,t))}{g_1(W^*(x))} \right) - \varphi \left(\frac{W(x,t)}{W^*(x)} \right) \leq 0.$$

因此 $\frac{dL(t)}{dt} \leq 0$, 并且 $\frac{dL(t)}{dt} = 0$ 当且仅当 $(S, I, W) = (S^*, I^*, W^*)$, 进而 E^* 是全局吸引的.

§4 结论

本论文建立了一类具有非局部扩散的霍乱传染病模型. 在合理的假设下, 对模型的适定性进行了分析. 具体地, 通过将模型转化为抽象的Cauchy问题, 应用算子理论和反证法, 得到了系统正解的局部存在性. 进一步通过证明系统的最终有界性, 得到了全局解的存在性. 针对非局部算子带来的非紧性问题, 通过引入Kuratowski测度的相关理论证明了系统全局吸引子的存在性. 从生物学角度来看, 基本再生数是传染病中最重要的概念之一, 也是疾病爆发与否的关键阈值. 本论文通过定义基本再生数, 得到了系统平衡态的全局性质, 即当基本再生数小于1时, 系统的无病平衡态是全局渐近稳定; 当基本再生数大于1时, 系统是一致持久的. 此外, 在一定条件下, 系统存在全局吸引的地方病平衡态. 这说明基本再生数是控制霍乱传播的重要阈值. 注意到, 在证明地方病平衡态时, 需要假设除了易感者的其他舱室的扩散系数为零. 如何得到全部扩散系数不为零时系统地方病平衡点的全局行为, 这将是今后的研究内容.

参考文献:

- [1] Ali M, Nelson A R, Lopez A L, et al. Updated global burden of cholera in endemic countries[J]. PLoS Neglect Trop D, 2015, 232: e0003832.
- [2] Tulchinsky T. Case Studies in Public Health[M]. London: Academic Press, 2018.
- [3] Ali M, Lopez A L, You Y A, et al. The global burden of cholera[J]. World Health Organ, 2012, 90: 209-218.
- [4] 桑媛, 宋冰, 张育茹, 等. 具有治疗和Beddington-DeAngelis发生率的时滞肺结核传染病模型研究[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(1): 37-52.
- [5] Tien J, Earn D. Multiple transmission pathways and disease dynamics in a waterborne pathogen model[J]. B Math Biol, 2010, 72: 1506-1533.
- [6] Zhou Jinling, Yang Yu, Zhang Tonghua. Global dynamics of a reaction-diffusion waterborne pathogen model with general incidence rate[J]. J Math Anal Appl, 2018, 466: 835-859.
- [7] Kot M, Lewis M A, vanden Driessche P. Dispersal data and the spread of invading organisms[J]. Ecology, 1996, 77: 2027-2042.

- [8] Lee C T, Hoopes M F, Diehl J, et al. Non-local concepts and models in biology[J]. *J Theor Biol*, 2001, 210: 201-219.
- [9] Smith H L. *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*[M]. Providence: American Mathematical Society, 1995.
- [10] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [11] Webb G F. *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*[M]. New York: Marcel Dekker, 1985.
- [12] Kuniya T, Wang Jinliang. Global dynamics of an SIR epidemic model with nonlocal diffusion[J]. *Nonlinear Anal RWA*, 2018, 43: 262-282.
- [13] Zhao Xiaoqiang. *Dynamical Systems in Population Biology*[M]. Cham: Springer, 2017.
- [14] Wang Xiaoyan, Chen Yuming, Yang Junyuan. Spatial and temporal dynamics of a virus infection model with two nonlocal effects[J]. *Complexity*, 2019, 2019: 5842942.
- [15] Hale J K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*[M]. Providence: American Mathematical Society, 1988.
- [16] Wang Wendi, Zhao Xiaoqiang. Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models[J]. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2011, 11: 1652-1673.
- [17] LaSalle J. Some extensions of Liapunov's second method[J]. *Ire Trans Circuit Theor*, 1960, 7: 520-527.
- [18] Smith H, Thieme H. *Dynamical Systems and Population Persistence*[M]. Providence: American Mathematical Society, 2011.

Dynamical analysis for a cholera model with nonlocal diffusion

QU Si-cong¹, ZHANG Ran^{1,2}, LIU Li-li^{3,4}

- (1. School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China;
- 2. Heilongjiang Provincial Key Laboratory of the Theory and Computation of Complex Systems, Heilongjiang University, Harbin 150080, China;
- 3. Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
- 4. Shanxi Key Laboratory for Mathematical Technology in Complex Systems, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: This paper established a cholera epidemic model with nonlocal diffusion and obtains the global existence of positive solutions and the global attractor. By defining the basic reproduction number, the global properties of the steady state of the system are obtained, that is, when the basic reproduction number is less than 1, the disease-free steady state is globally attractive; When the basic reproduction number is greater than 1, the system is uniformly persistent. In addition, under certain conditions, the system has a globally attractive endemic disease steady state. This indicates that the basic reproduction number is an important threshold for controlling the disease.

Keywords: cholera; infectious diseases dynamical model; nonlocal diffusion; global stability

MR Subject Classification: 92D30; 35B40