

# 星型网络的1-额外3-分支连通性

张国珍\*, 岳志敏

(山西大学 数学与统计学院, 山西太原 030006)

**摘要:** 星型网络是重要的互连网络之一, 也是超立方体的替代网络. 连通度可以衡量网络的可靠性, 额外连通度和分支连通度是传统连通度的推广, 而额外分支连通度是额外连通度和分支连通度的结合, 因而可以作为度量网络可靠性的重要参数. 此文研究了星型网络 $S_n$ 的1-额外3-分支连通度 $ck_3^1(S_n)$ 和1-额外3-分支边连通度 $c\lambda_3^1(S_n)$ , 确定了 $ck_3^1(S_n) = 4n - 10$ ,  $c\lambda_3^1(S_n) = 4n - 9$ , 研究结果可以为度量星型网络的可靠性提供一些新的依据.

**关键词:** 星型网络; 可靠性; 额外分支连通度; 额外分支边连通度

**中图分类号:** O157.5

**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4424(2025)04-0435-10

## §1 引言

互连网络在并行分布式系统中起着重要的作用, 它的拓扑结构通常被刻画为一个图 $G$ , 常用 $G = (V, E)$ 来表示, 其中 $V$ 是图 $G$ 的顶点集, 在互连网络中它对应着处理器的集合,  $E$ 是图 $G$ 的边集, 在互连网络中它对应着处理器之间的通信链接. 在顶点数不断增多的情况下, 互连网络发生故障的可能性也变大, 因此怎样去度量互连网络的可靠性就显得十分重要. 一般习惯用连通度来度量网络的可靠性, 但在实际中某个节点的所有邻点同时发生故障的可能性是极小的, 因此用连通度来度量网络的可靠性是有缺陷的. 为了解决这一缺陷, Fàbrega等人<sup>[1]</sup>对每个连通分支的点数进行了限制, 提出了额外连通度. Sampathkumar<sup>[2]</sup>则对连通分支的个数进行了限制, 从而提出了分支连通度. 额外连通度和分支连通度自提出以来, 已经被应用在许多网络中<sup>[3-8]</sup>.

2021年, Li等人<sup>[9]</sup>将对分支个数作限制的分支连通度和对分支中点数作限制的额外连通度结合起来, 提出了 $h$ -额外 $r$ -分支连通度的概念. 一个图 $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支割是 $G$ 的一个顶点集 $S$ , 满足 $G - S$ 至少有 $r$ 个分支, 并且每个分支至少有 $h + 1$ 个顶点.  $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支割的最小基数称为 $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支连通度, 用 $ck_r^h(G)$ 表示. 在这篇文献中, 他们研究了超立方体的1-额外 $r$ -分支连通度, 其中 $r \in \{2, 3, 4\}$ . Zhu等人<sup>[10]</sup>研究了超立方体的2-额外3-分支连通度. Yang等人<sup>[11]</sup>将 $h$ -额外 $r$ -分支连通度拓展为 $h$ -额外 $r$ -分支边连通度. 一个图 $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支边割是 $G$ 的

收稿日期: 2024-01-14 修回日期: 2024-08-13

\*通讯作者, E-mail: guozhen@sxu.edu.cn

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(202303021211002; 201901D111022; 20210302123438)

一个边集 $F$ , 满足 $G - F$ 至少有 $r$ 个分支, 并且每个分支至少有 $h + 1$ 个顶点.  $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支边割的最小基数称为 $G$ 的 $h$ -额外 $r$ -分支边连通度, 用 $c\lambda_r^h(G)$ 表示. 在这篇文献中, 他们研究了超立方体的 $h$ -额外3-分支边连通度, 其中 $1 \leq h \leq 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} - 1, n \geq 4$ ; BC网络的 $2^c$ -额外3-分支边连通度, 其中 $0 \leq c \leq n - 2, n \geq 4$ ; 折叠立方体的 $h$ -额外3-分支边连通度, 其中 $1 \leq h \leq 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} - 1, n \geq 4$ ; 折叠立方体的 $2^c$ -额外3-分支边连通度, 其中 $0 \leq c \leq n - 2, n \geq 4$ .

星型网络 $S_n$ 作为超立方体的替代网络之一, 具有高的连通度, 小的顶点度数, 结构对称等优点, 因此已有许多学者对其进行了研究. 本文通过分析星型网络的结构性质, 研究它的1-额外3-分支边连通度和1-额外3-分支边连通度, 确定了 $c\kappa_3^1(S_n) = 4n - 10, c\lambda_3^1(S_n) = 4n - 9$ , 所得结果能为度量星型网络的可靠性提供有益的参考.

## §2 预备知识

设 $A$ 和 $B$ 是图 $G$ 的两个非空顶点集, 用 $[A, B]$ 表示一个端点在 $A$ 中, 另一个端点在 $B$ 中的所有边的集合, 用 $G[A]$ 表示以 $A$ 为顶点集, 以两端点均在 $A$ 中的边的全体为边集所组成的子图. 设 $w$ 是图 $G$ 的一个顶点, 用 $N(w)$ 表示 $G$ 中所有与 $w$ 相邻的顶点的集合. 若对 $G$ 中每一个顶点 $w$ , 都有 $|N(w)| = k$ , 则称 $G$ 是 $k$ -正则的. 记 $n$ 个顶点的路为 $P_n$ ,  $n$ 个顶点的圈为 $C_n$ . 图1给出了 $n$ -星. $G$ 中顶点数最多的分支称为大分支, 其余分支称为小分支.

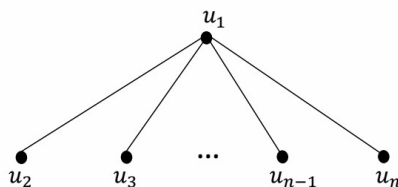


图1  $n$ -星

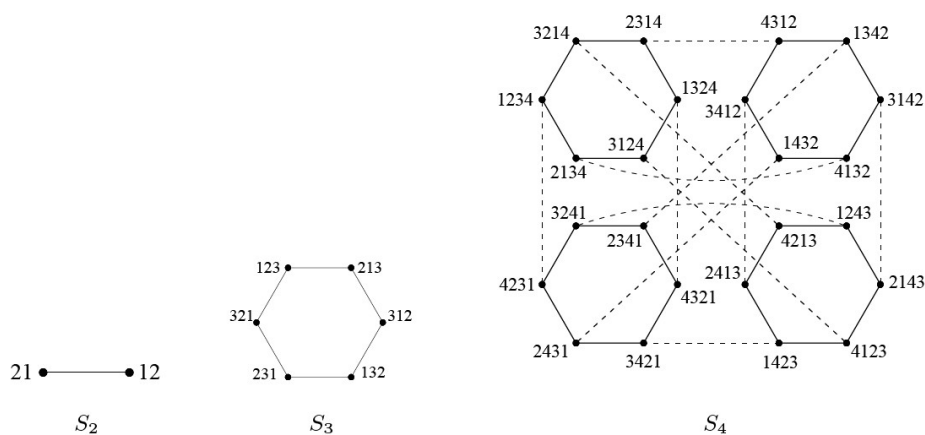


图2 星型网络 $S_2, S_3$ 和 $S_4$

$n$ 维星型网络记为 $S_n$ , 顶点集 $V(S_n) = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in \langle n \rangle, i = 1, 2, \cdots, n\}$ , 其中 $\langle n \rangle = \{1, 2, \cdots, n\}$ , 边集

$$E(S_n) = \{uv \mid u, v \in V(S_n), u = a_1 \cdots a_i \cdots a_n, v = a_i \cdots a_1 \cdots a_n, 2 \leq i \leq n\}.$$

显然 $|V(S_n)| = n!$ ,  $S_n$ 是 $(n-1)$ -正则的,  $\lambda(S_n) = n-1$ <sup>[12]</sup>. 当 $n \geq 3$ 时,  $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ . 图2给出了星型网络 $S_2, S_3$ 和 $S_4$ .  $S_n$ 可以划分为 $n$ 个 $S_n^i, 1 \leq i \leq n$ , 其中 $V(S_n^i) = \{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} i \mid a_j \in \langle n \rangle \setminus \{i\}, j = 1, 2, \cdots, n-1\}$ . 显然每个 $S_n^i$ 与 $S_{n-1}$ 同构. 对于 $S_n$ 中的顶点 $u = a_1 \cdots a_i \cdots a_n, v = a_n \cdots a_i \cdots a_1$ , 称 $v$ 是 $u$ 的外邻点.  $S_n^i$ 中的每个顶点只有一个外邻点. 当 $n \geq 3$ 时,  $S_n$ 中的任意两个顶点之间至多只有一个公共邻点. 对于 $1 \leq a < b \leq n$ , 记 $S_n^{[a,b]} = G[V(S_n^a) \cup V(S_n^{a+1}) \cup \cdots \cup V(S_n^{b-1}) \cup V(S_n^b)]$ . 当 $n \geq 4$ 时, 对于任意的 $i, j \in \langle n \rangle$ 且 $i \neq j$ , 有 $|[V(S_n^i), V(S_n^j)]| = (n-2)!$ ,  $S_n^i$ 和 $S_n^j$ 之间的边称为交叉边(例如图2星型网络 $S_4$ 中的虚线).

**引理2.1**<sup>[13]</sup> 当 $n \geq 3$ 时, 设 $F \subseteq E(S_n)$ 且 $|F| \leq 2n-5$ , 则 $S_n - F$ 连通或其小分支是一个孤立点.

**引理2.2**<sup>[13]</sup> 当 $n \geq 3$ 时, 设 $F \subseteq E(S_n)$ 且 $|F| \leq 3n-8$ , 则 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为2.

**引理2.3**<sup>[13]</sup> 设 $F \subseteq E(S_4)$ 且 $|F| \leq 5$ , 则 $S_4 - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为3.

**引理2.4**<sup>[13]</sup> 当 $n \geq 4$ 时, 设 $F \subseteq E(S_n)$ 且 $|F| \leq 4n-11$ , 则 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为3.

**引理2.5**<sup>[14]</sup> 当 $n \geq 4$ 时, 设 $S \subseteq V(S_n)$ 且 $|S| \leq 4n-11$ , 则 $S_n - S$ 满足以下结论之一.

- (1)  $S_n - S$ 连通;
- (2)  $S_n - S$ 有两个分支, 小分支是路 $P_3$ , 孤立边或孤立点;
- (3)  $S_n - S$ 有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边或两个孤立点;
- (4)  $S_n - S$ 有四个分支, 小分支是三个孤立点.

### §3 主要结果

**定理3.1** 当 $n \geq 4$ 时,  $ck_3^1(S_n) = 4n-10$ .

**证** 首先证明当 $n \geq 4$ 时,  $ck_3^1(S_n) \leq 4n-10$ .

设 $u = 1234 \cdots n, v = 2134 \cdots n, x = 2314 \cdots n, y = 1324 \cdots n$ . 令 $S = N(\{u, v\}) \cup N(\{x, y\})$ , 则 $S_n - S$ 不连通, 其中两个分支是 $S_n[\{u, v\}]$ 和 $S_n[\{x, y\}]$ , 且 $|S| = 2[2(n-1)-2]-2 = 4n-10$ . 当 $n \geq 4$ 时, 由于 $n! - (4n-10) - 4 > 0$ , 所以 $S_n - S$ 至少有3个连通分支. 假设 $w$ 是 $S_n - S - \{u, v, x, y\}$ 的一个孤立点, 则有 $N(w) \subseteq S$ . 设 $\{s, t\} \subseteq N(w)$ , 若 $\{s, t\} \subseteq N(\{u, v\})$ , 此时在 $S_n$ 中形成 $C_4$ 或 $C_5$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 所以 $\{s, t\} \not\subseteq N(\{u, v\})$ . 同理,  $\{s, t\} \not\subseteq N(\{x, y\})$ , 因此必有 $\{s, t\} \subseteq N(\{u, v\}) \cup N(\{x, y\})$ . 由于 $n \geq 4$ 时,  $|N(w)| = n-1 \geq 3$ , 故设 $z \in N(w) \setminus \{s, t\}$ , 则 $z \notin N(\{u, v\}) \cup N(\{x, y\})$ , 即 $z$ 存在, 与 $w$ 是孤立点矛盾. 因此 $S_n - S$ 的每个连通分支的顶点数都至少为2. 注意到 $|S| = 4n-10$ , 所以 $ck_3^1(S_n) \leq 4n-10$ .

下面证明当 $n \geq 4$ 时,  $ck_3^1(S_n) \geq 4n-10$ .

只需证明对任意满足 $|S| \leq 4n-11$ 的顶点集 $S$ , 都有 $S_n - S$ 的分支数不超过2或者 $S_n - S$ 有孤立点即可. 根据引理2.5可得结论成立. 因此要使 $S$ 是 $S_n$ 的1-额外3-分支割, 需满足 $|S| \geq 4n-10$ , 所以 $ck_3^1(S_n) \geq 4n-10$ .

综上可得当 $n \geq 4$ 时,  $ck_3^1(S_n) = 4n-10$ .

**引理3.1** 当 $n \geq 4$ 时, 设 $F \subseteq E(S_n)$ 且 $|F| \leq 4n - 10$ , 则 $S_n - F$ 满足以下结论之一.

- (1)  $S_n - F$ 连通;
- (2)  $S_n - F$ 有两个分支, 小分支是路 $P_4$ , 4-星, 路 $P_3$ , 孤立边或孤立点;
- (3)  $S_n - F$ 有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边或两个孤立点;
- (4)  $S_n - F$ 有四个分支, 小分支是三个孤立点.

**证** 以下证明中提到的故障边均指 $F$ 中的边. 注意到引理3.1对 $n = 4$ 成立, 结论可以通过 $S_4$ 被直接检验. 因此下面只对 $n \geq 5$ 进行证明. 记 $F_i = F \cap E(S_n^i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . 不失一般性, 设 $|F_1| \geq |F_2| \geq \cdots \geq |F_n|$ . 记 $J = \{i \in \langle n \rangle \mid |F_i| \geq n - 2\}$ , 则 $|J| \leq 3$ . 否则 $|J| \geq 4$ , 此时有 $|F| \geq 4(n - 2) = 4n - 8 > 4n - 10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n^i - F_i$ 中的大分支为 $H_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . 考虑以下四种情形.

**情形1**  $|J| = 0$ .

对于任意的 $1 \leq i \leq n$ ,  $|F_i| \leq n - 3 < n - 2 = \lambda(S_n^i)$ , 所以 $S_n^i - F_i$ 是连通的. 对任意两两不等的 $a, b, c \in \langle n \rangle$ , 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \not\subseteq F$ 时,  $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 通过交叉边相连. 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \subseteq F$ 时, 若 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \subseteq F$ , 则当 $n \geq 5$ 时, 有 $||[V(S_n^a), V(S_n^b)]| + |[V(S_n^a), V(S_n^c)]|| = 2(n - 2)! > 4n - 10$ , 矛盾, 因此 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 同理有 $[V(S_n^b), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 所以 $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 可以通过 $S_n^c - F_c$ 相连. 根据 $a, b, c$ 的任意性, 所以 $S_n - F$ 连通, 结论(1)成立.

**情形2**  $|J| = 1$ .

在这种情形下,  $|F_1| \geq n - 2$ . 对于任意的 $i \neq 1$ ,  $|F_i| \leq n - 3 < n - 2 = \lambda(S_n^i)$ , 所以 $S_n^i - F_i$ 是连通的. 由于 $|F| - |F_1| \leq (4n - 10) - (n - 2) = 3n - 8$ , 且对任意两两不等的 $a, b, c \in \langle n \rangle \setminus \{1\}$ , 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \not\subseteq F$ 时,  $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 通过交叉边相连. 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \subseteq F$ 时, 若 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \subseteq F$ , 则当 $n \geq 5$ 时, 有 $||[V(S_n^a), V(S_n^b)]| + |[V(S_n^a), V(S_n^c)]|| = 2(n - 2)! > 3n - 8$ , 矛盾, 因此 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 同理有 $[V(S_n^b), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 所以 $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 可以通过 $S_n^c - F_c$ 相连. 根据 $a, b, c$ 的任意性, 所以 $G = S_n - F - V(S_n^1)$ 连通. 考虑以下两种情形.

**情形2.1**  $n - 2 \leq |F_1| \leq 4n - 15$ .

由于 $|F_1| \leq 4n - 15 = 4(n - 1) - 11$ , 所以根据引理2.4可得 $S_n^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为3, 即 $|V(H_1)| \geq (n - 1)! - 3$ . 注意到 $S_n^i$ 中的每个顶点仅有一个外邻点, 所以当 $n \geq 5$ 时, 由于 $||[V(H_1), V(S_n^{[2,n]})]| \geq (n - 1)! - 3 > 3n - 8$ , 所以 $H_1$ 连到 $G$ 上. 因此 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为3, 结论(1)-(4)之一成立.

**情形2.2**  $|F_1| \geq 4n - 14$ .

由于 $|F| - |F_1| \leq (4n - 10) - (4n - 14) = 4$ , 即至多有4条故障边在 $V(S_n^1)$ 之外, 所以 $S_n^1 - F_1$ 中至多有4个顶点不能连到 $G$ . 由于 $|V(H_1)| \geq (n - 1)! - 4$ , 当 $n \geq 5$ 时,  $||[V(H_1), V(S_n^{[2,n]})]| \geq (n - 1)! - 4 > 3n - 8$ , 所以 $H_1$ 连到 $G$ 上, 因此 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为4. 下面考虑 $S_n - F$ 不连通的情形. 设 $S_n - F$ 的小分支的顶点集合为 $A$ . 若 $|V(A)| \leq 3$ , 即 $S_n - F$ 的小分支的顶点总数至多为3, 结论(1)-(4)之一成立. 若 $|V(A)| = 4$ , 则或者 $S_n - F$ 有两个分支, 小分支是路 $P_4$ 或4-星; 或者 $S_n - F$ 有(a)三个分支, 小分支是孤立点 $u$ 和路 $P_3$ , 或小分支是两条孤立边 $u_1v_1, u_2v_2$ ; (b)四个分支, 小分支是两个孤立点 $u, v$ 和一条孤立边 $xy$ ; (c)五个分支, 小分支是四个孤立点 $u_1, u_2, u_3, u_4$ . 设 $S_n - F$ 满足(a)中小分支是孤立点 $u$ 和路 $P_3$ , 则有 $||[\{u\}, V(P_3)]| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n - 1) + [(n - 2) + (n - 3) + (n - 2)] - 1 = 4n - 9 > 4n - 10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(a)中小分支是两条

孤立边 $u_1v_1, u_2v_2$ , 则有 $|\{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq [2(n-1)-2] + [2(n-1)-2] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(b), 则有 $|\{\{u\}, \{x, y\}\}| + |\{\{v\}, \{x, y\}\}| + |\{\{u\}, \{v\}\}| \leq 2$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n-1) + (n-1) + [2(n-1)-2] - 2 = 4n-8 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(c), 则共有至多3条边在 $u_1, u_2, u_3, u_4$ 之间, 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq 4(n-1) - 3 = 4n-7 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 所以 $S_n - F$ 不能是(a), (b), (c)任一情形, 于是结论(1)-(4)之一成立.

**情形3**  $|J| = 2$ .

在这种情形下,  $|F_1| \geq |F_2| \geq n-2$ ,  $|F_1| \leq |F| - |F_2| \leq (4n-10) - (n-2) = 3n-8$ . 对于任意的 $i \neq 1, 2$ ,  $|F_i| \leq n-3 < n-2 = \lambda(S_n^i)$ , 所以 $S_n^i - F_i$ 是连通的. 由于 $|F| - |F_1| - |F_2| \leq (4n-10) - 2(n-2) = 2n-6$ , 且对任意两两不等的 $a, b, c \in \langle n \rangle \setminus \{1, 2\}$ , 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \not\subseteq F$ 时,  $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 通过交叉边相连. 当 $[V(S_n^a), V(S_n^b)] \subseteq F$ 时, 若 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \subseteq F$ , 则当 $n \geq 5$ 时, 有 $|[V(S_n^a), V(S_n^b)]| + |[V(S_n^a), V(S_n^c)]| = 2(n-2)! > 2n-6$ , 矛盾, 因此 $[V(S_n^a), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 同理有 $[V(S_n^b), V(S_n^c)] \not\subseteq F$ . 所以 $S_n^a - F_a$ 和 $S_n^b - F_b$ 可以通过 $S_n^c - F_c$ 相连. 根据 $a, b, c$ 的任意性, 所以 $G = S_n - F - V(S_n^1) \cup V(S_n^2)$ 连通. 考虑以下三种情形.

**情形3.1**  $n-2 \leq |F_1| \leq 2n-7$ .

注意到 $|F_2| \leq |F_1|$ , 所以 $n-2 \leq |F_2| \leq 2n-7$ . 对于 $i = 1, 2$ , 由于 $|F_i| \leq 2n-7 = 2(n-1)-5$ , 所以根据引理2.1可得 $S_n^i - F_i$ 连通或其小分支是一个孤立点. 由于 $|V(H_i)| \geq (n-1)! - 1$ , 所以当 $n \geq 5$ 时,  $|[V(H_i), V(S_n^{[3,n]})]| \geq (n-1)! - 1 - (n-2)! > 2n-6$ , 所以 $H_i$ 连到 $G$ 上, 因此 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 结论(1)-(3)之一成立.

**情形3.2**  $2n-6 \leq |F_1| \leq 3n-11$ .

由于 $|F_1| \leq 3n-11 = 3(n-1)-8$ , 根据引理2.2可得 $S_n^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为2.  $|F_2| \leq |F| - |F_1| \leq (4n-10) - (2n-6) = 2n-4$ . 若 $|F_2| = 2n-4$ , 则 $|F_1| \geq 2n-4$ , 此时 $|F| \geq |F_1| + |F_2| \geq (2n-4) + (2n-4) = 4n-8 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾, 所以 $|F_2| \leq 2n-5$ . 当 $n \geq 6$ 时, 由于 $|F_2| \leq 2n-5 \leq 3n-11 = 3(n-1)-8$ , 根据引理2.2可得 $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2. 当 $n = 5$ 时, 由于 $|F_2| \leq 2n-5 = 5$ , 根据引理2.3可得 $S_5^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为3. 由于 $|V(H_1)| \geq (n-1)! - 2$ , 所以当 $n \geq 5$ 时,  $|[V(H_1), V(S_n^{[3,n]})]| \geq (n-1)! - 2 - (n-2)! > 2n-6$ , 所以 $H_1$ 连到 $G$ 上. 同理 $|V(H_2)| \geq (n-1)! - 3$ , 所以当 $n \geq 5$ 时,  $|[V(H_2), V(S_n^{[3,n]})]| \geq (n-1)! - 3 - (n-2)! > 2n-6$ , 所以 $H_2$ 连到 $G$ 上.

下面先考虑 $S_5^2 - F_2$ 的小分支共有3个顶点. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是孤立点 $u$ 和孤立边 $xy$ , 则有 $|\{\{u\}, \{x, y\}\}| \leq 1$ , 否则在 $S_5$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此当 $n = 5$ 时,  $|F_2| \geq (n-2) + [2(n-2)-2] - 1 = 3n-9 > 2n-5 \geq |F_2|$ , 矛盾. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是3个孤立点 $u_1, u_2, u_3$ , 则共有至多2条边在 $u_1, u_2, u_3$ 之间, 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此当 $n = 5$ 时,  $|F_2| \geq 3(n-2) - 2 = 3n-8 > 2n-5 \geq |F_2|$ , 矛盾. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是路 $P_3$ , 注意到 $S_n^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 所以路 $P_3$ 的顶点至少有一个连到 $H_1$ 或 $G$ 上, 于是 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 结论(1)-(3)之一成立.

接着考虑 $S_5^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 结合 $n \geq 6$ 时,  $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 故以下考虑 $n \geq 5$ 时,  $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2. 结合 $S_n^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 讨论以下三种情形.

**情形3.2.1**  $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 都连通.

注意到 $S_n^1 - F_1 = H_1$ ,  $S_n^2 - F_2 = H_2$ 连到 $G$ , 所以 $S_n - F$ 连通, 结论(1)成立.

**情形3.2.2**  $S_n^1 - F_1$ 或 $S_n^2 - F_2$ 连通.

不妨设 $S_n^1 - F_1$ 连通, 则 $S_n^1 - F_1 = H_1$ 连到 $G$ . 由于 $H_2$ 也连到 $G$ , 所以 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 结论(1)-(3)之一成立.

**情形3.2.3**  $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 都不连通.

分成以下6种情况考虑.

(i) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支都是一个孤立点, 则结论(1)-(3)之一成立.

(ii) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支都是一条孤立边, 则或者(1), (2)之一成立; 或者 $S_n - F$ 有三个分支, 小分支是两条孤立边 $u_1v_1, u_2v_2$ , 则有 $|\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq [2(n-1)-2] + [2(n-1)-2] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾.

(iii) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支都是两个孤立点, 则或者结论(1)-(4)之一成立; 或者 $S_n - F$ 有(a)三个分支, 小分支是两条孤立边 $u_1v_1, u_2v_2$ ; (b)四个分支, 小分支是两个孤立点 $u, v$ 和一条孤立边 $xy$ ; (c)五个分支, 小分支是四个孤立点 $u_1, u_2, u_3, u_4$ . 设 $S_n - F$ 满足(a), 则有 $|\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq [2(n-1)-2] + [2(n-1)-2] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(b), 则有 $|\{u\}, \{x, y\}| + |\{v\}, \{x, y\}| + |\{u\}, \{v\}| \leq 2$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n-1) + (n-1) + [2(n-1)-2] - 2 = 4n-8 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(c), 则共有至多有3条边在 $u_1, u_2, u_3, u_4$ 之间, 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq 4(n-1) - 3 = 4n-7 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 于是 $S_n - F$ 不能是(a), (b), (c)任一情形.

(iv) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支分别是一个孤立点和一条孤立边, 或一条孤立边和一个孤立点, 则结论(1)-(3)之一成立.

(v) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支分别是一个孤立点和两个孤立点, 或两个孤立点和一个孤立点, 则结论(1)-(4)之一成立.

(vi) 设 $S_n^1 - F_1$ 和 $S_n^2 - F_2$ 的小分支分别是一条孤立边和两个孤立点, 或两个孤立点和一条孤立边, 则或者结论(1)-(3)之一成立; 或者 $S_n - F$ 有(a)三个分支, 小分支是孤立点 $u$ 和路 $P_3$ ; (b)四个分支, 小分支是两个孤立点 $u, v$ 和一条孤立边 $xy$ . 设 $S_n - F$ 满足(a), 则有 $|\{u\}, V(P_3)| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n-1) + [(n-2) + (n-3) + (n-2)] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(b), 则有 $|\{u\}, \{x, y\}| + |\{v\}, \{x, y\}| + |\{u\}, \{v\}| \leq 2$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n-1) + (n-1) + [2(n-1)-2] - 2 = 4n-8 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 于是 $S_n - F$ 不能是(a), (b)任一情形.

**情形3.3**  $3n-10 \leq |F_1| \leq 3n-8$ .

由于 $|F_2| \leq |F| - |F_1| \leq (4n-10) - (3n-10) = n$ , 所以 $n-2 \leq |F_2| \leq n$ . 由 $|F| - |F_1| - |F_2| \leq (4n-10) - (3n-10) - (n-2) = 2$ , 即在 $V(S_n^1) \cup V(S_n^2)$ 之外至多有多两条故障边. 当 $n \geq 6$ 时, 由于 $|F_2| \leq n \leq 3n-11 = 3(n-1)-8$ , 根据引理2.2可得 $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2. 当 $n=5$ 时, 由于 $|F_2| \leq n=5$ , 根据引理2.3可得 $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为3. 由于 $|V(H_2)| \geq (n-1)! - 3$ , 所以当 $n \geq 5$ 时,  $||V(H_2), V(S_n^{[3,n]})|| \geq (n-1)! - 3 - (n-2)! > 2n-6$ ,

所以 $H_2$ 连到 $G$ 上.

下面先考虑 $S_5^2 - F_2$ 的小分支共有3个顶点. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是孤立点 $u$ 和孤立边 $xy$ , 则有 $|\{u\}, \{x, y\}| \leq 1$ , 否则在 $S_5$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此当 $n = 5$ 时,  $|F_2| \geq (n-2) + [2(n-2) - 2] - 1 = 3n - 9 > n$ , 矛盾. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是3个孤立点 $u_1, u_2, u_3$ , 则共有至多2条边在 $u_1, u_2, u_3$ 之间, 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此当 $n = 5$ 时,  $|F| \geq 3(n-2) - 2 = 3n - 8 > n$ , 矛盾. 设 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是路 $P_3$ , 则当 $n = 5$ 时,  $|F_2| \geq (n-3) + (n-4) + (n-3) = 3n - 10 = 5$ , 结合 $|F_2| \leq 5$ , 得 $|F_2| = 5$ , 此时 $|F_1| \leq |F| - |F_2| \leq (4n-10) - (3n-10) = n = 5$ , 根据引理2.3可得 $S_5^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为3. 由于 $|V(H_1)| \geq (n-1)! - 3$ , 所以当 $n \geq 5$ 时,  $||V(H_1), V(S_n^{[3,n]})| \geq (n-1)! - 3 - (n-2)! > 2n - 6$ , 所以 $H_1$ 连到 $G$ 上. 若 $P_3$ 中每个顶点的外邻点都在 $S_5^1 - F_1$ 的小分支中, 则 $S_5^1 - F_1$ 的小分支有三个顶点 $u, v, w$ . 若 $u, v, w$ 都是孤立点, 则当 $n = 5$ 时,  $|F_1| \geq 3(n-2) - 2 = 3n - 8 = 7 > 5 \geq |F_1|$ , 矛盾, 所以 $u, v, w$ 中至少有两个顶点相邻, 此时 $u, v, w$ 与 $S_5^2$ 中的路 $P_3$ 形成 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾. 因此 $S_5^2 - F_2$ 的小分支是路 $P_3$ 时,  $P_3$ 中至少有一个顶点连到 $H_1$ 或 $G$ 上, 此时 $S_5^2 - F_2$ 连到 $G$ . 结合 $S_5^1 - F_1$ 连通或其小分支顶点总数至多为3, 所以 $S_n - F$ 连通或其小分支顶点总数至多为3, 结论(1)-(4)之一成立.

接着考虑 $S_5^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 结合 $n \geq 6$ 时,  $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2, 故以下考虑 $n \geq 5$ 时,  $S_n^2 - F_2$ 连通或其小分支顶点总数至多为2. 根据 $S_n^2 - F_2$ 的结构, 讨论以下4种情况.

(i) 设 $S_n^2 - F_2$ 连通, 则当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 0$ 时,  $S_n - F$ 连通; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 1$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 2$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点或孤立边, 或者有三个分支, 小分支是两个孤立点. 结论(1)-(3)之一成立.

(ii) 设 $S_n^2 - F_2$ 的小分支是孤立点,  $H_2$ 连到 $G$ , 则当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 0$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立边; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 1$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是路 $P_3$ , 孤立边或孤立点, 或者有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 2$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是路 $P_4$ , 4-星, 路 $P_3$ , 孤立边或孤立点, 或者有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边或两个孤立点. 结论(1)-(3)之一成立.

(iii) 设 $S_n^2 - F_2$ 的小分支是孤立边,  $H_2$ 连到 $G$ , 则当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 0$ 时,  $S_n - F$ 连通; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 1$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是路 $P_3$ 或孤立点; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 2$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是路 $P_4$ , 路 $P_3$ , 孤立边或孤立点. 结论(1), (2)之一成立.

(iv) 设 $S_n^2 - F_2$ 的小分支是两个孤立点,  $H_2$ 连到 $G$ , 则当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 0$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立边; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 1$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点, 孤立边或路 $P_3$ , 或者有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边; 当 $|F| - |F_1| - |F_2| = 2$ 时,  $S_n - F$ 连通, 或者有两个分支, 小分支是路 $P_4$ , 4-星, 路 $P_3$ , 孤立边或孤立点, 或者有三个分支, 小分支是孤立点和孤立边或两个孤立点. 结论(1)-(3)之一成立.

**情形4**  $|J| = 3$ .

在这种情形下,  $|F_1| \geq |F_2| \geq |F_3| \geq n - 2$ . 对于任意的 $i \neq 1, 2, 3$ ,  $|F_i| \leq n - 3 < n - 2 = \lambda(S_n^i)$ , 所以 $S_n^i - F_i$ 是连通的. 由于 $|F| - |F_1| - |F_2| - |F_3| \leq (4n - 10) - 3(n - 2) = n - 4$ , 且

对任意不相等的  $a, b \in \langle n \rangle \setminus \{1, 2, 3\}$ , 当  $n \geq 5$  时,  $||V(S_n^a), V(S_n^b)|| = (n-2)! > n-4$ , 所以  $S_n^a - F_a$  和  $S_n^b - F_b$  通过交叉边相连. 根据  $a, b$  的任意性, 所以  $G = S_n - F - V(S_n^1) \cup V(S_n^2) \cup V(S_n^3)$  连通. 由于当  $n \geq 5$  时,  $|F_1| \leq |F| - |F_2| - |F_3| \leq (4n-10) - 2(n-2) = 2n-6 \leq 3n-11 = 3(n-1)-8$ , 根据引理2.2可得  $S_n^1 - F_1$  连通或其小分支顶点总数至多为2. 但是当  $S_n^1 - F_1$  的小分支是两个孤立点  $u, v$  时, 由于  $||\{u\}, \{v\}|| \leq 1$ , 所以当  $n \geq 5$  时,  $|F_1| \geq 2(n-2) - 1 = 2n-5 > 2n-6 \geq |F_1|$ , 矛盾. 因此  $S_n^1 - F_1$  连通或者有两个分支, 小分支是孤立点或孤立边. 同理,  $|F_2| \leq 2n-6$ ,  $|F_3| \leq 2n-6$ , 所以  $S_n^2 - F_2$  和  $S_n^3 - F_3$  连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点或孤立边. 对于  $i = 1, 2, 3$ , 若  $S_n^i - F_i$  中有孤立边, 则  $|F_i| \geq 2(n-2) - 2 = 2n-6$ , 因此至多有一个  $S_n^i - F_i$  中有孤立边, 否则当  $n \geq 5$  时,  $|F| \geq 2(2n-6) + (n-2) = 5n-14 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 不妨设若有孤立边存在, 则存在于  $S_n^1 - F_1$  中. 由于  $|V(H_1)| \geq (n-1)! - 2$ , 所以当  $n \geq 5$  时,  $||V(H_1), V(S_n^{[4,n]})|| \geq (n-1)! - 2 - 2(n-2)! > n-4$ , 所以  $H_1$  连到  $G$  上. 对于  $i = 2, 3$ ,  $|V(H_i)| \geq (n-1)! - 1$ , 所以当  $n \geq 5$  时,  $||V(H_i), V(S_n^{[4,n]})|| \geq (n-1)! - 1 - 2(n-2)! > n-4$ , 所以  $H_i$  连到  $G$  上. 考虑以下四种情形.

**情形4.1**  $S_n^i - F_i$  都连通,  $i = 1, 2, 3$ .

注意到  $S_n^i - F_i = H_i$  连到  $G$  上, 所以  $S_n - F$  连通, 结论(1)成立.

**情形4.2** 仅有一个  $S_n^i - F_i$  不连通,  $i = 1, 2, 3$ .

设仅有  $S_n^1 - F_1$  不连通, 注意到  $S_n^1 - F_1$  有两个分支, 小分支是孤立点或孤立边,  $H_1$  连到  $G$  上. 由于  $S_n^2 - F_2$  和  $S_n^3 - F_3$  连通且连到  $G$ , 所以  $S_n - F$  连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点或孤立边, 结论(1), (2)之一成立.

设仅有一个  $S_n^i - F_i$  不连通,  $i = 2, 3$ , 不妨设  $S_n^2 - F_2$  不连通, 注意到  $S_n^2 - F_2$  有两个分支, 小分支是孤立点,  $H_2$  连到  $G$  上. 由于  $S_n^1 - F_1$  和  $S_n^3 - F_3$  连通且连到  $G$ , 所以  $S_n - F$  连通, 或者有两个分支, 小分支是孤立点, 结论(1), (2)之一成立.

**情形4.3** 有两个  $S_n^i - F_i$  不连通,  $i = 1, 2, 3$ .

设  $S_n^1 - F_1$  和  $S_n^2 - F_2$  不连通, 注意到  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立点或孤立边,  $H_1$  连到  $G$ ,  $S_n^2 - F_2$  的小分支是孤立点,  $H_2$  连到  $G$ . 由于  $S_n^3 - F_3$  连通且连到  $G$ , 所以当  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立点时,  $S_n - F$  连通或其小分支顶点总数至多为2, 结论(1)-(3)之一成立. 当  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立边时,  $S_n - F$  连通或其小分支顶点总数至多为3, 结论(1)-(3)之一成立.  $S_n^1 - F_1$  和  $S_n^3 - F_3$  不连通时类似可证结论(1)-(3)之一成立.

设  $S_n^2 - F_2$  和  $S_n^3 - F_3$  不连通, 注意到  $S_n^2 - F_2$  和  $S_n^3 - F_3$  的小分支都是一个孤立点,  $H_2$  和  $H_3$  连到  $G$ . 由于  $S_n^1 - F_1$  连通连到  $G$ , 所以  $S_n - F$  连通或其小分支顶点总数至多为2, 结论(1)-(3)之一成立.

**情形4.4**  $S_n^i - F_i$  都不连通,  $i = 1, 2, 3$ .

注意到  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立点或孤立边,  $S_n^2 - F_2$  和  $S_n^3 - F_3$  的小分支都是一个孤立点, 且  $H_1, H_2, H_3$  连到  $G$  上. 当  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立点时,  $S_n - F$  连通或其小分支顶点总数至多为3, 结论(1)-(4)之一成立. 当  $S_n^1 - F_1$  的小分支是孤立边时,  $S_n - F$  连通或其小分支顶点总数至多为4, 则或者结论(1)-(3)之一成立, 或者  $S_n - F$  有(a)三个分支, 小分支是孤立点  $u$  和路  $P_3$ , 或者小分支是两条孤立边  $u_1v_1, u_2v_2$ ; (b)四个分支, 小分支是两个孤立点  $u, v$  和一条孤立边  $xy$ . 设  $S_n - F$  满足(a)中小分支是孤立点  $u$  和路  $P_3$ , 则有  $||\{u\}, V(P_3)|| \leq 1$ , 否则在  $S_n$  中形成  $C_3$  或  $C_4$ , 与  $S_n$  中最小圈为  $C_6$  矛盾, 因此  $|F| \geq (n-1) + [(n-2) + (n-3) + (n-2)] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾.

设 $S_n - F$ 满足(a)中小分支是两条孤立边 $u_1v_1, u_2v_2$ , 则有 $|\{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq [2(n-1)-2] + [2(n-1)-2] - 1 = 4n-9 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 设 $S_n - F$ 满足(b), 则有 $|\{\{u\}, \{x, y\}\}| + |\{\{v\}, \{x, y\}\}| + |\{\{u\}, \{v\}\}| \leq 2$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾, 因此 $|F| \geq (n-1) + (n-1) + [2(n-1)-2] - 2 = 4n-8 > 4n-10 \geq |F|$ , 矛盾. 因此 $S_n - F$ 不能是(a), (b)任一情形.

**定理3.2** 当 $n \geq 4$ 时,  $c\lambda_3^1(S_n) = 4n-9$ .

**证** 首先证明当 $n \geq 4$ 时,  $c\lambda_3^1(S_n) \leq 4n-9$ .

设 $u = 1234 \cdots n$ ,  $v = 2134 \cdots n$ ,  $x = 3124 \cdots n$ ,  $y = 1324 \cdots n$ , 其中 $uv, vx, xy \in E(S_n)$ . 令 $F = vx \cup \{\{u, v, x, y\}, V(S_n) \setminus \{u, v, x, y\}\}$ , 则 $S_n - F$ 不连通, 其中两个分支是孤立边 $uv$ 和 $xy$ . 当 $n \geq 4$ 时, 由于 $n!-4 > 0$ , 所以 $S_n - F$ 至少有3个连通分支. 假设 $w$ 是 $S_n - F - \{u, v, x, y\}$ 的一个孤立点, 则有 $N(w) \subseteq \{u, v, x, y\}$ . 注意到 $|\{\{w\}, \{u, v, x, y\}\}| \leq 1$ , 否则在 $S_n$ 中形成 $C_3$ 或 $C_4$ 或 $C_5$ , 与 $S_n$ 中最小圈为 $C_6$ 矛盾. 由于 $|N(w)| = n-1$ , 所以 $|\{\{w\}, V(S_n) \setminus \{w\}\}| = n-1$ , 所以当 $n \geq 4$ 时,  $|\{\{w\}, V(S_n) \setminus \{u, v, x, y, w\}\}| = |\{\{w\}, V(S_n) \setminus \{w\}\}| - |\{\{w\}, \{u, v, x, y\}\}| \geq (n-1) - 1 = n-2 \geq 2$ , 因此至少有顶点 $s, t \in V(S_n) \setminus \{u, v, x, y, w\}$ , 即 $s, t \notin \{u, v, x, y\}$ . 由于 $s, t \in N(w)$ , 所以 $N(w) \not\subseteq \{u, v, x, y\}$ , 矛盾, 因此 $w$ 不是孤立点. 所以 $S_n - F$ 的每个连通分支的顶点数都至少为2. 由于 $|F| = (n-2) + (n-3) + (n-3) + (n-2) + 1 = 4n-9$ , 所以 $c\lambda_3^1(S_n) \leq 4n-9$ .

下面证明当 $n \geq 4$ 时,  $c\lambda_3^1(S_n) \geq 4n-9$ .

只需证明对任意满足 $|F| \leq 4n-10$ 的边集 $F$ , 都有 $S_n - F$ 的分支数不超过2或者 $S_n - F$ 有孤立点即可. 根据引理3.1可得结论成立. 因此要使 $F$ 是 $S_n$ 的1-额外3-分支边割, 需满足 $|F| \geq 4n-9$ , 所以 $c\lambda_3^1(S_n) \geq 4n-9$ .

综上可得当 $n \geq 4$ 时,  $c\lambda_3^1(S_n) = 4n-9$ .

## §4 结论

本文研究并得到了星型网络的1-额外3-分支连通度和1-额外3-分支边连通度. 在此基础上, 还可以研究星型网络的更一般的 $h$ -额外 $r$ -分支连通度和 $h$ -额外 $r$ -分支边连通度, 其中 $h > 1$ ,  $r > 3$ . 通过类似的方法亦可以研究其它网络的 $h$ -额外 $r$ -分支连通度和 $h$ -额外 $r$ -分支边连通度.

### 参考文献:

- [1] Fàbrega J, Fiol M A. Extraconnectivity of graphs with large girth[J]. Discrete Mathematics, 1994, 127(1): 163-170.
- [2] Sampathkumar E. Connectivity of a graph-a generalization[J]. Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, 1984, 9(2): 71-78.
- [3] Feng Wei, Wang Shiyang. The 2-extra connectivity of wheel networks[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 35(1): 1-5.
- [4] Lin Limei, Xu Li, Chen Riqing, et al. Relating extra connectivity and extra conditional diagnosability in regular networks[J]. IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing, 2019, 16(6): 1086-1097.
- [5] Lin Limei, Xu Li, Zhou Shuming. Relating the extra connectivity and the conditional diagnosability of regular graphs under the comparison model[J]. Theoretical Computer Science, 2016, 618: 21-29.

- [6] Zhao Shuli, Yang Weihua, Zhang Shurong, et al. Component edge connectivity of hypercubes[J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 2018, 29(6): 995-1001.
- [7] Zhao Shuli, Yang Weihua. Conditional connectivity of folded hypercubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 257: 388-392.
- [8] Zhao Shuli, Hao Rongxia, Cheng Eddie. Two kinds of generalized connectivity of dual cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 257: 306-316.
- [9] Li Bi, Lan Jingfen, Ning Wantao, et al.  $h$ -extra  $r$ -component connectivity of interconnection networks with application to hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2021, 895: 68-74.
- [10] Zhu Bo, Zhang Shumin, Zou Jinyu, et al. Two kinds of conditional connectivity of hypercubes[J]. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2022, 19(3): 255-260.
- [11] Yang Yayu, Zhang Mingzu, Meng Jixiang. Link fault tolerance of BC networks and folded hypercubes on  $h$ -extra  $r$ -component edge-connectivity[J]. Applied Mathematics and Computation, 2024, 462: 128343.
- [12] 徐罗娜, 刘三阳, 孙玉涛. Star网络的限制边连通度[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2007, 21(3): 12-14.
- [13] Li Pingshan, Xu Min. The largest component of faulty star graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 824-825: 57-66.
- [14] Lin Limei, Huang Yanze, Hsieh Sun-Yuan, et al. Strong reliability of star graphs interconnection networks[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2020, 71(3): 1241-1254.

### 1-extra 3-component connectivity of star networks

ZHANG Guo-zhen, YUE Zhi-min

(School of Mathematics and Statistics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

**Abstract:** The star network is one of the important interconnection networks and an alternative network to the hypercube. Connectivity can measure the reliability of a network. Extra connectivity and component connectivity are the generalizations of the traditional connectivity. The extra component connectivity is the combination of the extra connectivity and component connectivity, so it can be used as an important parameter to measure the reliability of a network. In this paper, the 1-extra 3-component connectivity  $ck_3^1(S_n)$  and 1-extra 3-component edge connectivity  $cl_3^1(S_n)$  of the star network  $S_n$  are studied. Moreover,  $ck_3^1(S_n) = 4n - 10$  and  $cl_3^1(S_n) = 4n - 9$  are proved. The results can provide some new perspectives for measuring the reliability of star networks.

**Keywords:** star networks; reliability; extra component connectivity; extra component edge connectivity

**MR Subject Classification:** 05C40; 68R10