

孤立韧度与分数 (g, f) -因子

高 炜¹, 王维凡²

(1. 河海大学 数学学院, 江苏南京 211100;
2. 浙江师范大学 数学科学学院, 浙江金华 321004)

摘 要: 利用子图分割方法研究了图中存在分数 (g, f) -因子的孤立韧度条件, 指出

若 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor$ 且

$$I(G) \geq \begin{cases} \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{若 } a \not\equiv b \pmod{2}, \\ \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{若 } a \equiv b \pmod{2}, \end{cases}$$

则 G 存在分数 (g, f) -因子. 通过反例说明最小度条件和孤立韧度条件均是紧的.

关键词: 图; 孤立韧度; 分数 (g, f) -因子

中图分类号: O157

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)04-0424-11

§1 引 言

本文讨论的图均为无向简单图, 且 $|V(G)| < \infty$. 记 $\delta(G)$ 为最小度, 即图 G 中所有顶点的度的最小值. 对任意顶点子集 S , 设 $i(G-S)$ 表示 $G-S$ 中孤立点的数量. 设 G_1, G_2 是两个图, 则 $G_1 \vee G_2$ 表示这样的图, 它的顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 其边集合为 $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x_1x_2 \mid x_1 \in V(G_1), x_2 \in V(G_2)\}$. 文中使用的关于图论的标准术语和符号可参考[1], 不再一一叙述.

设 $a, b, k \in \mathbf{N}$ 满足 $1 \leq a \leq b$ 和 $b \geq 2$, $h: E(G) \rightarrow [0, 1]$ 为边集上的示性函数, $g, f: V(G) \rightarrow \mathbf{N}$ 满足对任意 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \leq f(x)$ 成立. 若存在示性函数 h 使得对任意 $x \in V(G)$ 有

$$g(x) \leq d_G^h(x) = \sum_{x' \in N(x)} h(xx') \leq f(x)$$

成立, 则称 G 存在分数 (g, f) -因子, 且该分数因子即为边集合 $E_h = \{e \in E(G) \mid h(e) > 0\}$ 的生成子图. 特别地, 若 $g(x) = a, f(x) = b$ 对任意 $x \in V(G)$ 成立, 则分数 (g, f) -因子成为分数 $[a, b]$ -因子. 更进一步, 若 $g(x) = f(x) = k$ 对任意 $x \in V(G)$ 成立, 则分数 (g, f) -因子成为分数 k -因子.

孤立韧度作为衡量网络易受攻击性的重要参数^[2]. 对于非完全图 G , 孤立韧度定义为

$$I(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{i(G-S)} \mid S \subset V(G), i(G-S) > 1 \right\}.$$

若 G 是完全图, 由于满足 $i(G-S) > 1$ 的 S 不存在, 因此规定 $I(G)$ 的值为正无穷大.

研究发现, 孤立韧度和分数因子之间有密切的关系. [3]指出若 $\delta(G) \geq k$ 且 $I(G) \geq k$, 则图 G 存在分数 k -因子, 并且该孤立韧度和最小度条件都是紧的. [4]给出了在删除任意 n 个顶点的条件下, 剩余子图依然存在分数 k -因子的孤立韧度条件, 且通过反例说明该条件是紧的. 此外, [4]指出该孤立韧度紧界在零点是不连续的, 即无法通过 $n \geq 1$ 的一般结果推导出 $n = 0$ 的情况. 更进一步, [4]解释了零点不连续背后蕴含的内在机制. [5]得到关于分数 $[a, b]$ -因子存在性的改进孤立韧度条件, 同时通过实例说明该条件是紧的. [6]对[4]中的结果进行了推广, 得到在删除任意 n 个顶点的条件下, 剩余子图依然存在分数 $[a, b]$ -因子的孤立韧度条件, 并且说明该孤立韧度界是最好的.

[7]用一种简洁的方法得到与本文相同的孤立韧度界. 然而, 由于方法上的局限性, [7]无法得到关于孤立韧度条件最好性的反例, 只能通过先前论文的结果推断出孤立韧度界在 $a = b = k$ 的情况下(即分数 (g, f) -因子退化为分数 k -因子的假设下)是紧的. 另一方面, [7]中主要结论的最小度条件不是紧的. 本文的主要贡献是利用子图分割的方法重新证明了[7]中关于分数 (g, f) -因子存在性的孤立韧度条件, 并且通过反例说明该条件对于任意满足 $a \leq g(x) \leq f(x) \leq b$ 的分数 (g, f) -因子框架都是紧的(事实上, 反例的结构隐藏在情况1.2和情况2.2的证明中). 同时, 本文主要定理中的最小度条件也是紧的, 其反例的构造同样从证明过程中提取. §2给出定理证明的必要引理. §3给出主要定理及详细证明, §4通过反例说明得到的界是紧的.

§2 预备知识

为了证明本文的主要结果, 需要如下关于一个图存在分数 (g, f) -因子的充分必要条件.

引理2.1(见[8, p542]) 设 G 是一个图, g, f 定义在顶点集上的非负整数值函数, 对任意 $x \in V(G)$ 满足 $g(x) \leq f(x)$. 则 G 存在分数 (g, f) -因子当且仅当对任意 $S \subseteq V(G)$, 有

$$f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \geq 0$$

成立, 其中 $T = \{x \in V(G) - S \mid d_{G-S}(x) \leq g(x)\}$.

在引理2.1中, 集合 T 由顶点子集 S 决定, 且可以写为 $T = \{x \in V(G) - S \mid d_{G-S}(x) \leq g(x) - 1\}$. 值得注意的是, 本文需要文献[8]中定理2.1的如下等价形式.

引理2.2 设 G 是一个图, g, f 是定义在顶点集上的非负整数值函数, 且对任意 $x \in V(G)$ 满足 $g(x) \leq f(x)$. 则 G 存在分数 (g, f) -因子当且仅当

$$f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \geq 0$$

对任意不相交的顶点子集 $S, T \subseteq V(G)$ 都成立.

[9]刻画了特定条件下子图的独立集和覆盖集.

引理2.3(见[9, p1743]) 设 G 是一个图, $H = G[T]$ 满足对任意 $x \in V(H)$ 有 $d_G(x) = k - 1$ 且 H 的任何一个连通分支都不与 K_k 同构, 其中 $T \subseteq V(G)$ 且 $k \geq 2$ 为整数. 则存在 H 的最大独立集 I 和覆盖集 $C = V(H) - I$ 满足

$$|V(H)| \leq \sum_{i=1}^k (k - i + 1) |I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2}$$

和

$$|C| \leq \sum_{i=1}^k (k - i) |I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2},$$

其中 $I^{(i)} = \{x \in I, d_H(x) = k - i\}$ ($1 \leq i \leq k$) 且 $\sum_{i=1}^k |I^{(i)}| = |I|$.

注 在表达形式上, 引理2.3对原来文献[9]的引理2.2作了细微的修改.

§3 主要结果及证明

本文主要结论如下.

定理3.1 设 G 是一个图, a, b 都是正整数满足 $1 \leq a \leq b$ 且 $b \geq 2$, g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的整数函数, 对任意 $x \in V(G)$ 满足 $a \leq g(x) \leq f(x) \leq b$. 若 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor$ 且

$$I(G) \geq \begin{cases} \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{若 } a \not\equiv b \pmod{2}, \\ \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{若 } a \equiv b \pmod{2}, \end{cases}$$

则 G 存在分数 (g, f) -因子.

证 若 G 是完全图, 则结论由 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor$ 直接得到. 在以下的讨论中, 均设 G 为非完全图. 若 G 满足定理3.1的所有条件, 但不存在分数 (g, f) -因子. 则由引理2.2, 存在 $S, T \subseteq V(G)$, $S \cap T = \emptyset$ 满足

$$a|S| - b|T| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \leq f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) \leq -1. \quad (1)$$

在所有 S, T 组合中选择 $|T|$ 最小的一对组合. 进而可知 $T \neq \emptyset$, 且对任意 $x \in T$ 有 $d_{G-S}(x) \leq b-1$.

设 l 是 $H' = G[T]$ 中与 K_b 同构的连通分支数, T_0 是 H' 中满足 $d_{G-S}(x) = 0$ 的顶点的集合. 设子图 H 是从 H' 中删除 T_0 以及 l 个与 K_b 同构的连通分支后得到的子图. 在 H' 的每个 K_b 连通分支中选取 $b-1$ 个顶点构成的顶点子集记为 S' .

若 $|V(H)| = 0$, 则由(1)以及 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor \geq b + \lfloor \frac{b-1}{a} \rfloor$ 可知

$$1 + \lfloor \frac{b-1}{a} \rfloor = b + \lfloor \frac{b-1}{a} \rfloor - (b-1) \leq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor - (b-1) \leq |S| \leq \frac{b(|T_0|+l)-1}{a},$$

进而可知 $i(G-S \cup S') = |T_0| + l \geq 2$. 根据孤立韧度的定义, 得到

$$I(G) \leq \frac{|S \cup S'|}{i(G-S-S')} \leq \frac{\lfloor \frac{b(|T_0|+l)-1}{a} \rfloor + l(b-1)}{|T_0|+l} \leq \frac{\lfloor (b-1 + \frac{b}{a})(|T_0|+l) - \frac{1}{a} \rfloor}{|T_0|+l} = b-1 + \frac{\lfloor \frac{b(|T_0|+l)-1}{a} \rfloor}{|T_0|+l}.$$

设 $b(|T_0|+l)-1 = m_1a + c_1$, 其中 $m_1 \in \mathbf{N}$ 且 $c_1 \in \{0, \dots, a-1\}$. 则根据 $\frac{1}{a} \leq \frac{c_1+1}{a} \leq 1$, 可得

$$I(G) \leq b-1 + \frac{\frac{b(|T_0|+l)-1}{a} - \frac{c_1}{a}}{|T_0|+l} = b-1 + \frac{b}{a} - \frac{\frac{c_1+1}{a}}{|T_0|+l} < b-1 + \frac{b}{a},$$

当 a, b 奇偶性不同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2}{4a}$ 矛盾. 当 a, b 奇偶性相同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a}$ 矛盾. 从而有 $|V(H)| > 0$.

设 $H = H_1 \cup H_2$, 其中 H_1 中的任何一个连通分支, 它的顶点在 $G-S$ 中的度都是 $b-1$. 剩余连通分支构成 H_2 , 即 H_2 的任意一个连通分支, 都存在这样的顶点, 它在 $G-S$ 中的度至多为 $b-2$ (由此可知, 若 $H_2 \neq \emptyset$, 则 $b \geq 3$). 由引理2.3, 可知 H_1 存在最大独立集 I_1 和覆盖集 $C_1 = V(H_1) - I_1$ 满

足

$$|V(H_1)| \leq \sum_{i=1}^b (b-i+1)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2} \leq (b-\frac{1}{2})|I_1|, \quad (2)$$

和

$$|C_1| \leq \sum_{i=1}^b (b-i)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2}, \quad (3)$$

其中 $I^{(i)} = \{v \in I_1, d_{H_1}(v) = b-i\} (1 \leq i \leq b)$ 且 $\sum_{i=1}^b |I^{(i)}| = |I_1|$.

设 $W = V(G) - S - T$ 且 $U = S \cup S' \cup C_1 \cup (N_G(I_1) \cap W) \cup N_{G-S}(I_2) = S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)$. 下面根据 $|T_0| + l$ 的值是否为零分别进行讨论.

情况1 $|T_0| + l \neq 0$.

下面两种情况讨论 H_1 或 H_2 单独存在的情景.

情况 1.1 $|I_2| = 0$.

若 $|I_2| = 0$. 则根据 $|V(H)| > 0$ 可知 $|I_1| > 0$.

把 I_1 再分成如下两个子集.

I_{11} : 若存在 $v' \in I_1 \setminus \{v\}$ 使得 $N_{G-S}(v) \cap N_{G-S}(v') \neq \emptyset$, 则 $v \in I_{11}$;

I_{12} : 若 $N_{G-S}(v) \cap N_{G-S}(I_1 \setminus \{v\}) = \emptyset$, 则 $v \in I_{12}$.

利用引理2.3可得

$$\begin{aligned} a|S| &\leq |V(H_1)| + b|T_0| + lb - 1 \leq (b-\frac{1}{2})|I_{11}| + (b-1)|I_{12}| + b(|T_0| + l) - 1, \\ |S| &\leq (\frac{b}{a} - \frac{1}{2a})|I_{11}| + \frac{b-1}{a}|I_{12}| - \frac{1}{a} + \frac{b(|T_0| + l)}{a}. \end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned} |S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1)| &\leq \\ &(\frac{b}{a} - \frac{1}{2a})|I_{11}| + \frac{b-1}{a}|I_{12}| - \frac{1}{a} + \frac{b(|T_0| + l)}{a} + \\ &l(b-1) + (b-1-\frac{1}{2})|I_{11}| + (b-1)|I_{12}| \leq \\ &(b-1+\frac{b}{a})(|T_0| + l) + (b-1+\frac{b}{a}-\frac{1}{a})|I_1| - \frac{1}{a} \leq \\ &(b-1+\frac{b}{a})(|I_1| + |T_0| + l) - \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

根据孤立韧度的定义, 并且设 $b(|I_1| + l + |T_0|) - 2 = m_2a + c_2$ (其中 $m_2 \in \mathbf{N}$ 且 $c_2 \in \{0, \dots, a-1\}$), 得到

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1)|}{i(G - S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1))} \leq \frac{\lfloor (b-1+\frac{b}{a})(|I_1| + |T_0| + l) - \frac{2}{a} \rfloor}{|I_1| + l + |T_0|} = \\ &b-1 + \frac{\lfloor \frac{b(|I_1| + l + |T_0|) - 2}{a} \rfloor}{|I_1| + l + |T_0|} = b-1 + \frac{b(|I_1| + l + |T_0|) - 2 - c_2}{|I_1| + l + |T_0|} = \\ &b-1 + \frac{b}{a} - \frac{\frac{2+c_2}{a}}{|I_1| + l + |T_0|} < b-1 + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

当 a, b 奇偶性不同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2}{4a}$ 矛盾. 当 a, b 奇偶性相同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a}$ 矛盾.

情况 1.2 $|I_1| = 0$.

若 $|I_1| = 0$, 则由 $|V(H)| > 0$ 可知 $|I_2| \neq 0$, 进而 $b \geq 3$. 设 $I_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{|I_2|}\}$. 则 $|T| = |V(H_2)| + |T_0| + bl$,

$$a|S| \leq b|T| - d_{G-S}(T) - 1 \leq b|T_0| + bl + \sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i)) - 1,$$

从而

$$|S| \leq \frac{b(|T_0| + l)}{a} + \frac{\sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i))}{a} - \frac{1}{a}.$$

可知 $i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2))) \geq 2$. 若 $a \not\equiv b \pmod{2}$, 则

$$\begin{aligned} |S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)| &\leq |S| + |S'| + |N_{G-S}(I_2)| \leq \\ &\frac{b|T_0| + l}{a} + \frac{\sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i))}{a} - \frac{1}{a} + l(b-1) + \sum_{i=1}^{|I_2|} d_{G-S}(v_i) \leq \\ &\frac{b|T_0|}{a} + l(b-1 + \frac{b}{a}) + |I_2|(-\frac{(\frac{a+b-1}{2})^2}{a} + \frac{a+b-1}{a} \frac{a+b-1}{2} + \frac{b}{a}) - \frac{1}{a} = \\ &\frac{b|T_0|}{a} + l(b-1 + \frac{b}{a}) + (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \leq \\ &(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 + 4b)(|T_0| + l + |I_2|) - 4 = 4m_3a + c_3$ (其中 $m_3 \in \mathbf{N}$ 且 $c_3 \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)))} \leq \frac{[(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a}]}{|I_2| + |T_0| + l} = \\ &\frac{(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_3}{4a}}{|I_2| + |T_0| + l} = \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_3}{4a}}{|I_2| + |T_0| + l} < \\ &\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

若 $a \equiv b \pmod{2}$, 则

$$\begin{aligned} |S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)| &\leq |S| + |S'| + |N_{G-S}(I_2)| \leq \\ &\frac{b|T_0|}{a} + l(b-1 + \frac{b}{a}) + |I_2|(-\frac{(\frac{a+b}{2})^2}{a} + \frac{a+b-1}{a} \frac{a+b}{2} + \frac{b}{a}) - \frac{1}{a} = \\ &\frac{b|T_0|}{a} + l(b-1 + \frac{b}{a}) + (\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \leq \\ &(\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 - 1 + 4b)(|T_0| + l + |I_2|) - 4 = 4m_4a + c_4$ (其中 $m_4 \in \mathbf{N}$ 且 $c_4 \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 得到

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_2)))} \leq \frac{[(\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a}]}{|I_2| + |T_0| + l} = \\ &\frac{(\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_4}{4a}}{|I_2| + |T_0| + l} = \end{aligned}$$

$$\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_4}{4a}}{|I_2| + |T_0| + l} < \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a},$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

由于情况1.1和情况1.2都推出了矛盾, 可知 I_1 和 I_2 均不为空, 且 $b \geq 3$.

依然设 $I_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{|I_2|}\}$. 则 $|T| = |V(H_1)| + |V(H_2)| + |T_0| + bl$,

$$a|S| \leq b(|T_0| + l) + (b - \frac{1}{2})|I_{11}| + (b - 1)|I_{12}| + \sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i)) - 1,$$

且

$$|S| \leq \frac{b(|T_0| + l) + (b - \frac{1}{2})|I_{11}| + (b - 1)|I_{12}| + \sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i)) - 1}{a} =$$

$$\frac{b}{a}(|T_0| + l) + (\frac{b}{a} - \frac{1}{2a})|I_{11}| + \frac{b-1}{a}|I_{12}| + \frac{\sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i))}{a} - \frac{1}{a}.$$

可知 $i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2))) \geq 3$. 若 $a \not\equiv b \pmod{2}$, 则

$$|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)| \leq |S| + |S'| + |C_1| + |N_G(I_1) \cap W| + |N_{G-S}(I_2)| \leq$$

$$\frac{b}{a}(|T_0| + l) + (\frac{b}{a} - \frac{1}{2a})|I_{11}| + \frac{b-1}{a}|I_{12}| + \frac{\sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i))}{a} -$$

$$\frac{1}{a} + l(b-1) + (b - \frac{1}{2} - 1)|I_{11}| + (b-1)|I_{12}| + \sum_{i=1}^{|I_2|} d_{G-S}(v_i) \leq$$

$$\frac{b}{a}|T_0| + l(b-1 + \frac{b}{a}) + (b-1 + \frac{b}{a} - \frac{1}{a})|I_1| + (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \leq$$

$$(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|)(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}) - \frac{1}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 + 4b)(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - 4 = 4m_5a + c_5$ (其中 $m_5 \in \mathbf{N}$ 且 $c_5 \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可知

$$I(G) \leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)))} \leq$$

$$\frac{\lfloor (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} \rfloor}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} = \frac{(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_5}{4a}}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} =$$

$$\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_5}{4a}}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} < \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a},$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

若 $a \equiv b \pmod{2}$, 则

$$|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)| \leq |S| + |S'| + |C_1| + |N_G(I_1) \cap W| + |N_{G-S}(I_2)| \leq$$

$$\frac{b}{a}|T_0| + l(b-1 + \frac{b}{a}) + (b-1 + \frac{b}{a} - \frac{1}{a})|I_1| + (\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \leq$$

$$(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|)(\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}) - \frac{1}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 - 1 + 4b)(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - 4 = 4m_6a + c_6$ (其

中 $m_6 \in \mathbf{N}$ 且 $c_6 \in \{0, \dots, 4a-1\}$, 从而有

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - (S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)))} \leq \\ &\frac{\lfloor (\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} \rfloor}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} = \\ &\frac{(\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a})(|T_0| + l + |I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_6}{4a}}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} = \\ &\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_6}{4a}}{|I_1| + |I_2| + |T_0| + l} < \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

情况2 $|T_0| + l = 0$.

与情况1类似, 首先讨论 I_1 或 I_2 有一方为空集的情况.

情况 2.1 $|I_2| = 0$.

若 $|I_2| = 0$, 则 $|I_1| \neq 0$, $|T| = |V(H_1)|$ 且 $a|S| \leq b|T| - d_{G-S}(T) - 1 = |T| - 1$.

若 $|I_1| = 1$, 则 $|T| \leq b-1$, $|S| \leq \frac{|T|-1}{a} \leq \frac{b-2}{a}$, 且

$$\lfloor \frac{a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b - 3}{4a} \rfloor \leq \delta(G) \leq |S| + b - 1 \leq \lfloor \frac{b-2}{a} \rfloor + b - 1,$$

可验证矛盾. 从而有 $i(G - S \cup N_{G-S}(I_1)) \geq |I_1| \geq 2$. 根据情况1.1的推导, 可知

$$|S| \leq (\frac{b}{a} - \frac{1}{2a})|I_{11}| + \frac{b-1}{a}|I_{12}| - \frac{1}{a} < \frac{b|I_1|}{a},$$

$$|S \cup N_{G-S}(I_1)| \leq |S| + |C_1| + \sum_{i=1}^k (i-1)|I^{(i)}| \leq (b-1 + \frac{b}{a})|I_1| - \frac{3}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $b|I_1| - 3 = m_7a + c_7$ (其中 $m_7 \in \mathbf{N}$ 且 $c_7 \in \{0, \dots, a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup N_{G-S}(I_1)|}{i(G - S \cup N_{G-S}(I_1))} \leq \frac{\lfloor (b-1 + \frac{b}{a})|I_1| - \frac{3}{a} \rfloor}{|I_1|} = b-1 + \frac{\lfloor \frac{b|I_1|-3}{a} \rfloor}{|I_1|} = \\ &b-1 + \frac{\frac{b|I_1|-3-c_7}{a}}{|I_1|} = b-1 + \frac{b}{a} - \frac{3+c_7}{a|I_1|} < b-1 + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

当 a, b 奇偶性不同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2}{4a}$ 矛盾. 当 a, b 奇偶性相同时, 这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $b-1 \leq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a}$ 矛盾.

情况 2.2 $|I_1| = 0$.

若 $|I_1| = 0$, 则根据 $|V(H)| > 0$ 有 $|I_2| \neq 0$, 从而 $b \geq 3$.

若 $|I_2| = 1$, 设 $d_{\min} = \min\{d_{G-S}(v) | v \in H_2\}$, 则有 $d_{\min} \in \{1, \dots, b-2\}$,

$$\begin{aligned} a|S| &\leq b|T| - d_{G-S}(T) - 1 \leq |T|(b - d_{\min}) - 1, \\ |S| &\leq \frac{|T|(b - d_{\min}) - 1}{a} \leq \frac{(d_{\min} + 1)(b - d_{\min}) - 1}{a}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \delta(G) &\leq d_{\min} + |S| \leq d_{\min} + \frac{(d_{\min} + 1)(b - d_{\min}) - 1}{a} = \\ &-\frac{d_{\min}^2}{a} + \frac{(b+a-1)d_{\min}}{a} + \frac{b-1}{a} \leq \\ &-\frac{(\frac{a+b-1}{2})^2}{a} + \frac{(b+a-1)\frac{a+b-1}{2}}{a} + \frac{b-1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2a + 2b - 3}{4a}. \end{aligned}$$

进而有

$$\delta(G) \leq \lfloor \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 2a + 2b - 3}{4a} \rfloor = \lfloor \frac{a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b - 3}{4a} \rfloor - 1.$$

这与定理3.1中关于 $\delta(G)$ 的假设矛盾.

设 $I_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{|I_2|}\}$. 则有 $|T| = |V(H_2)|$, 且

$$|S| \leq \frac{\sum_{i=1}^{|I_2|} (d_{G-S}(v_i) + 1)(b - d_{G-S}(v_i))}{a} - \frac{1}{a}.$$

从而有 $i(G - S \cup N_{G-S}(I_2)) \geq |I_2| \geq 2$. 根据情况1.2中的讨论, 若 $a \not\equiv b \pmod{2}$, 可知

$$|S \cup N_{G-S}(I_2)| \leq |S| + |N_{G-S}(I_2)| \leq (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 + 4b)|I_2| - 4 = 4m_8a + c_8$ (其中 $m_8 \in \mathbf{N}$ 且 $c_8 \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - S \cup N_{G-S}(I_2))} \leq \frac{\lfloor (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \rfloor}{|I_2|} = \frac{(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} - \frac{c_8}{4a}}{|I_2|} = \\ &\quad \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_8}{4a}}{|I_2|} < \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

若 $a \equiv b \pmod{2}$, 可知

$$|S \cup N_{G-S}(I_2)| \leq |S| + |N_{G-S}(I_2)| \leq (\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 - 1 + 4b)|I_2| - 4 = 4m_9a + c_9$ (其中 $m_9 \in \mathbf{N}$ 且 $c_9 \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - S \cup N_{G-S}(I_2))} \leq \frac{\lfloor (\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} \rfloor}{|I_2|} = \frac{(\frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a})|I_2| - \frac{1}{a} - \frac{c_9}{4a}}{|I_2|} = \\ &\quad \frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_9}{4a}}{|I_2|} < \frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2 - 1}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

根据情况2.1和情况2.2的分析可知 I_1 和 I_2 均不为空, 且 $b \geq 3$. 可得 $i(G - S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)) \geq 2$. 若 $a \not\equiv b \pmod{2}$,

$$\begin{aligned} |S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)| &\leq |S| + |C_1| + |N_G(I_1) \cap W| + |N_{G-S}(I_2)| \leq \\ &\quad (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2 + 4b)(|I_1| + |I_2|) - 4 = 4m_{10}a + c_{10}$ (其中 $m_{10} \in \mathbf{N}$ 且 $c_{10} \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G - S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2))} \leq \\ &\quad \frac{\lfloor (\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} \rfloor}{|I_1| + |I_2|} = \frac{(\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a})(|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_{10}}{4a}}{|I_1| + |I_2|} = \\ &\quad \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_{10}}{4a}}{|I_1| + |I_2|} < \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

若 $a \equiv b \pmod{2}$, 则有

$$|S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)| \leq \left(\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} \right) (|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a}.$$

根据孤立韧度的定义, 并设 $((a+b-1)^2-1+4b)(|I_1|+|I_2|)-4 = 4m_{11}a + c_{11}$ (其中 $m_{11} \in \mathbf{N}$ 且 $c_{11} \in \{0, \dots, 4a-1\}$), 可得

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)|}{i(G-S \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2))} \leq \\ &\frac{\left\lfloor \left(\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} \right) (|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} \right\rfloor}{|I_1| + |I_2|} = \frac{\left(\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} \right) (|I_1| + |I_2|) - \frac{1}{a} - \frac{c_{11}}{4a}}{|I_1| + |I_2|} = \\ &\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{\frac{1}{a} + \frac{c_{11}}{4a}}{|I_1| + |I_2|} < \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

这与 $I(G) \geq \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 矛盾.

由此, 所有的情况都推出矛盾, 进而定理3.1成立.

§4 讨论

首先说明最小度条件 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor$ 是紧的. 设 $t \in \mathbf{N}$ 是任意大的正整数. 若 $a \not\equiv b \pmod{2}$, 则考察 $G_1 = K_{\lfloor \frac{b^2-a^2+2b-3}{4a} \rfloor} \vee (K_{\frac{a+b+1}{2}} \cup K_t)$; 若 $a \equiv b \pmod{2}$, 则考察 $G_2 = K_{\lfloor \frac{b^2-a^2+2a+2b-3}{4a} \rfloor} \vee (K_{\frac{a+b}{2}} \cup K_t)$. 易知

$$\delta(G_1) = \delta(G_2) = \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab-2a+2b-3}{4a} \rfloor = \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor - 1.$$

根据 t 值的设定, $I(G_1)$ 和 $I(G_2)$ 的值可以取到任意大. 对于 G_1 , 设 $S = V(K_{\lfloor \frac{b^2-a^2+2b-3}{4a} \rfloor})$ 和 $T = V(K_{\frac{a+b+1}{2}})$; 对于 G_2 , 设 $S = V(K_{\lfloor \frac{b^2-a^2+2a+2b-3}{4a} \rfloor})$ 和 $T = V(K_{\frac{a+b}{2}})$. 无论是 G_1 还是 G_2 , 都有如下假设: 对任意 $x \in S$ 有 $f(x) = g(x) = a$ 成立; 对任意 $x \in T$ 有 $f(x) = g(x) = b$ 成立. 通过计算可验证

$$f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G_1-S}(x) < 0, \quad f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G_2-S}(x) < 0.$$

进而 G_1 和 G_2 都没有分数 (g, f) -因子.

下面两个例子来说明定理3.1中的孤立韧度是紧的. 若 $b \not\equiv a \pmod{2}$, 考察

$G_3 = K_{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2}} \vee (lK_{\frac{a+b+1}{2}})$, 其中 $1 \leq a \leq b$, $b \geq 2$, $l \geq 2$ 均为正整数. 首先验证

$$\begin{aligned} \delta(G_3) &= \left\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \right\rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2} + \frac{a+b-1}{2} \geq \\ &\left\lfloor \frac{2(a+b-1)^2}{4a} + \frac{2b-1}{a} \right\rfloor - \frac{2(a+b-1)}{2} + \frac{a+b-1}{2} = \\ &\left\lfloor \frac{(a+b-1)^2}{2a} + \frac{2b-1}{a} \right\rfloor - \frac{a+b-1}{2} \geq \left\lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \right\rfloor. \end{aligned}$$

即 G_3 满足定理3.1中最小度的条件要求. 为了得到至少两个孤立点, 显然要删除

$K_{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2}}$ 中的所有顶点, 选择 m (其中 $m \in [2, l]$ 是整数) 个 $K_{\frac{a+b+1}{2}}$ 并对每个

$K_{\frac{a+b+1}{2}}$ 删除其中的 $\frac{a+b-1}{2}$ 个顶点. 从而根据孤立韧度的定义, 得到

$$\begin{aligned} I(G_3) &= \min_{m \in \{2, \dots, l\}} \left\{ \frac{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2} + m \frac{a+b-1}{2}}{m} \right\} = \\ &= \frac{a+b-1}{2} + \min_{m \in \{2, \dots, l\}} \left\{ \frac{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2}}{m} \right\} = \\ &= \frac{a+b-1}{2} + \frac{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2}}{l} = \frac{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor}{l}. \end{aligned}$$

设 $l(a+b-1)^2 + 4(bl-1) = 4m_{12}a + c_{12}$, 其中 $m_{12} \in \mathbf{N}$, $c_{12} \in \{0, 1, \dots, 4a-1\}$. 进而

$$I(G_3) = \frac{\frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} - \frac{c_{12}}{4a}}{l} = \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{4+c_{12}}{4a}.$$

因此有 $I(G_3) < \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $\lim_{l \rightarrow +\infty} I(G_3) = \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$. 由于 G_3 是有限图, $l < +\infty$, 因

此 $I(G_3)$ 的值只能随着 l 的增大而无限逼近 $\frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}$, 但不能到达该值. 设

$S = V(K_{\lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-1)}{2}})$, $T = V(lK_{\frac{a+b+1}{2}})$, 对任意 $x \in S$ 有 $f(x) = g(x) = a$ 成立; 对任意 $x \in T$ 有 $f(x) = g(x) = b$ 成立. 则有

$$\begin{aligned} f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G_3-S}(x) &= \\ a \lfloor \frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - a \frac{l(a+b-1)}{2} - lb \frac{a+b+1}{2} + l \frac{a+b+1}{2} (\frac{a+b+1}{2} - 1) &\leq \\ a (\frac{l(a+b-1)^2}{4a} + \frac{bl-1}{a}) - a l \frac{a+b-1}{2} - \frac{l(a+b+1)(b+1-a)}{4} &= -1. \end{aligned}$$

根据引理2.2可知 G_3 不存在分数 (g, f) -因子.

若 $b \equiv a \pmod{2}$, 则考察 $G_4 = K_{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2}} \vee (lK_{\frac{a+b}{2}})$, 其中 $1 \leq a \leq b$, $b \geq 2$, $l \geq 2$ 均为正整数. 首先验证(最后一步根据 $a=b$ 和 $b \geq a+2$ 两种情况分别验证)

$$\begin{aligned} \delta(G_4) &= \lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2} + \frac{a+b-2}{2} \geq \\ &= \lfloor \frac{2((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{2b-1}{a} \rfloor - \frac{2(a+b-2)}{2} + \frac{a+b-2}{2} = \\ &= \lfloor \frac{(a+b-1)^2-1}{2a} + \frac{2b-1}{a} \rfloor - \frac{a+b-2}{2} \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor. \end{aligned}$$

即 G_4 满足定理3.1中最小度的条件要求. 为了得到至少两个孤立点, 显然要删除

$K_{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2}}$ 中的所有顶点, 选择 m (其中 $m \in [2, l]$ 是整数) 个 $K_{\frac{a+b}{2}}$ 并对每个 $K_{\frac{a+b}{2}}$ 删除其中的 $\frac{a+b-2}{2}$ 个顶点. 从而根据孤立韧度的定义, 并设 $l((a+b-1)^2-1) + 4(bl-1) = 4m_{13}a + c_{13}$, 其中 $m_{13} \in \mathbf{N}$, $c_{13} \in \{0, 1, \dots, 4a-1\}$, 可得

$$\begin{aligned} I(G_4) &= \min_{m \in \{2, \dots, l\}} \left\{ \frac{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2} + m \frac{a+b-2}{2}}{m} \right\} = \\ &= \frac{a+b-2}{2} + \min_{m \in \{2, \dots, l\}} \left\{ \frac{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2}}{m} \right\} = \\ &= \frac{a+b-2}{2} + \frac{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2}}{l} = \\ &= \frac{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor}{l} = \frac{\frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} - \frac{c_{13}}{4a}}{l} = \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a} - \frac{4+c_{13}}{4a}. \end{aligned}$$

因此有 $I(G_4) < \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$ 且 $\lim_{l \rightarrow +\infty} I(G_4) = \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$. 同理, 由于 G_4 是有限图, $l < +\infty$, 因此 $I(G_4)$ 的值只能随着 l 的增大而无限逼近 $\frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}$, 但不能到达该值. 设 $S = V(K_{\lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - \frac{l(a+b-2)}{2}})$, $T = V(lK_{\frac{a+b}{2}})$, 对任意 $x \in S$ 有 $f(x) = g(x) = a$ 成立; 对任意 $x \in T$ 有 $f(x) = g(x) = b$ 成立. 则有

$$\begin{aligned} f(S) - g(T) + \sum_{x \in T} d_{G_4-S}(x) = \\ a \lfloor \frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \rfloor - a \frac{l(a+b-2)}{2} - lb \frac{a+b}{2} + l \frac{a+b}{2} \frac{a+b-2}{2} \leq \\ a \left(\frac{l((a+b-1)^2-1)}{4a} + \frac{bl-1}{a} \right) - al \frac{a+b-2}{2} - \frac{l(a+b)(b+2-a)}{4} = -1. \end{aligned}$$

根据引理2.2可知 G_4 不存在分数 (g, f) -因子.

参考文献:

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory [M]. Berlin: Springer, 2008.
- [2] 杨景波, 马英红, 刘桂真. 图的分数 (g, f) -因子[J]. 高校应用数学学报, 2001, 16(4): 385-390.
- [3] 马英红, 刘桂真. 图的分数因子与孤立初度[J]. 应用数学, 2006, 19(1): 188-194.
- [4] Gao Wei, Wang Weifan, Chen Yaojun. Tight isolated toughness bound for fractional (k, n) -critical graphs[J]. Discrete Appl Math, 2022, 322: 194-202.
- [5] 高伟, 王维凡, 陈耀俊. 分数 $[a, b]$ -因子的紧孤立初度条件[J]. 数学杂志, 2024, 44(3): 203-211.
- [6] Gao Wei, Wang Weifan, Chen Yaojun. Isolated toughness and fractional (a, b, n) -critical graphs[J]. Connect Sci, 2023, 35(1): 2181482.
- [7] 刘树利. 图的孤立初度与分数 (g, f) -因子的存在性[J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(10): 31-34.
- [8] Liu Guizhen, Zhang Lanju. Fractional (g, f) -factors of graph[J]. Acta Math Sci, Ser B, 2001, 21(4): 541-545.
- [9] Liu Guizhen, Zhang Lanju. Toughness and the existence of fractional k -factors of graphs[J]. Discrete Math, 2008, 308: 1741-1748.

Isolated toughness and fractional (g, f) -factor

GAO Wei¹, WANG Wei-fan²

(1. School of Math., Hohai Univ., Nanjing 211100, China;

2. School of Math. Sci., Zhejiang Normal Univ., Jinhua 321004, China)

Abstract: The isolated toughness condition for the existence of fractional (g, f) -factors in a graph is studied using subgraph dividing approach. It is proved that if $\delta(G) \geq \lfloor \frac{a^2+b^2+2ab+2a+2b-3}{4a} \rfloor$ and

$$I(G) \geq \begin{cases} \frac{(a+b-1)^2}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{if } a \not\equiv b \pmod{2}, \\ \frac{(a+b-1)^2-1}{4a} + \frac{b}{a}, & \text{if } a \equiv b \pmod{2}, \end{cases}$$

then G admits a fractional (g, f) -factor. Counterexamples are presented to illustrate that both the minimum degree and the isolated toughness bounds are tight.

Keywords: graph; isolated toughness; fractional (g, f) -factor

MR Subject Classification: 05C70