

Heston随机波动率与双指数跳扩散组合模型的双币种幂期权定价

韦铸娥¹, 奚欢^{2,*}

(1. 南宁学院 信息工程学院, 广西南宁 530200;
2. 上海财经大学浙江学院 统计系, 浙江金华 321013)

摘要: 在股价满足双指数分布的跳跃扩散模型下, 应用Heston随机波动率模型刻画波动率变化, 并综合考虑随机波动率对股价和汇率的关联性影响, 研究了双币种情形下的幂期权定价问题. 通过积分变换、偏微分方程求解和Fourier逆变换等方法, 分别得到了交割价格以国外货币和国内货币计价的双币种幂期权拟闭型定价公式. 数值分析结果表明, Heston随机波动率与双指数跳扩散组合模型能较好地捕捉金融市场中的“波动率微笑”现象, 且风险资产收益率的跳跃幅度和强度, 以及资产收益率和汇率分别与波动率的相关系数对期权价格都有正向影响. 此外, 在参数相同的情况下该模型比经典的Black-Scholes模型和Heston随机波动率模型具有更高的期权定价价格.

关键词: Heston随机波动率模型; 双指数分布; 双币种期权; 幂期权; Fourier逆变换

中图分类号: F830

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)04-0411-13

§1 引言

自1973年Black和Scholes^[1]应用标准几何布朗运动(BS模型)刻画资产收益率变化建立期权定价公式以来, 期权定价研究已成为金融衍生工具领域的核心内容和前沿课题之一, 这也为金融资产的风险管理、对冲和套期保值提供了灵活多变的投资策略, 极大地促进了经济繁荣.

双币种期权作为一种金融衍生品, 近年来在国际贸易及跨境金融投资中广泛使用. 其特点在于能够在不同的市场之间实现货币交易, 并有效应对外汇风险. 其基础资产多在境外市场, 而通过本币在国内市场进行结算, 这样的设计使其成为对冲外汇风险的一个重要工具. 在双币种定价研究中, 最初的理论框架主要建立在BS模型的基础上, Reiner^[2]的研究为该领域的理论奠定了基础. 随着金融市场的持续发展与复杂性增加, 后续研究开始探讨更为复杂和贴近市场实际情况的双币种定价模型. Wong等人^[3]提出了双指数跳跃扩散模型, 考虑资产价格跳跃的不对称

收稿日期: 2023-07-28 修回日期: 2025-04-07

*通讯作者, Email: Huanx_2020@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(11461008); 广西自然科学基金(2023GXNSFAA026333); 浙江省教育厅科研项目(Y201738176); 广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2022KY1782)

性以及双指数分布的特点. Lee等人^[4]探讨了利率波动对双币种期权价格的显著影响. 此外, 双币种期权的种类也在不断增多, 例如出现了双币种回望期权^[5], 因其特有的收益结构而引起了关注, 为投资者提供了更为丰富的投资选择. Battauz等人^[6]针对双币种美式期权的执行策略进行了深入研究, 其灵活的行权特性, 为投资者决策提供了重要参考. 在中国, 双币种期权的研究同样取得一定的成果. 如郭培栋等人^[7]对双币种博弈期权展开了深入探讨, 韦铸娥等人^[8]则通过随机波动率跳跃扩散模型对双币种任选项进行了定价研究. 幂期权是一种新式的奇异期权, 它的收益函数是标的资产价格的幂函数, 具有杠杆投资工具的强大作用. 关于幂期权的研究, 已有的工作主要是在不同金融模型环境下对单币种幂型期权进行展开, 如Heynen等人^[9]所提出的幂期权定价模型, 探索环境因素如何影响期权的定价. 魏广华等人^[10]探讨了随机利率对幂型期权的影响, 而张立东等人^[11]研究不确定性环境下幂期权的特性, Liu等人^[12]利用Ornstein-Uhlenbeck模型分析了市场波动性与幂期权之间的关系.

双币种幂期权是由双币种期权与幂期权结合而成的一种金融衍生品. 这种期权在双币种期权的收益函数基础上引入了幂函数的效果, 能够在保证双币种期权固有特征的前提下, 有效地对冲国际贸易面临的风险, 并通过幂函数的形式实现收益. 目前, 关于双币种幂期权的研究文献仍然相对有限. 较为具代表性的研究工作包括Lee等人^[13]和Lee等人^[14]在经典几何布朗运动框架下, 运用鞅理论分析了四种不同收益形式的双币种对称幂型期权的定价问题, 并推导出了相应的定价解析公式. 此外, Javed^[15]则关注了在布朗运动与Poisson跳跃相互作用下双币种幂期权及其复合形式的定价研究.

需要注意的是, 上述双币种幂期权的研究工作都是在经典的BS模型下进行的, 而金融资产的价格变化过程并不服从高斯过程. 因此, 很多学者对BS模型进行了改进或扩展以便能更加有效地刻画金融资产价格的市场变化规律, 减小期权定价的系统误差. 常见的改良工作有: (1) 在BS模型中引入复合Poisson过程刻画突发事件或重要信息对金融资产价格的影响(如Merton^[16], Kou^[17]等); (2) 应用随机波动率模型(SV模型)反映资产收益率的波动时变性和集聚性, 捕捉金融市场中的“波动率微笑”和“杠杆效应”现象(如Heston^[18], 邓国和^[19], Susanne等人^[20]等); (3) 同时引入复合Poisson过程和随机波动率跳跃扩散模型(SVJ模型)来刻画资产价格及其波动率的跳跃变化特征(如Bates^[21], Scott^[22], 邓国和等人^[23], 施秋红^[24]等). 大量的文献研究表明, 金融资产收益率是有偏的, 具有尖峰厚尾和“波动微笑”特征, 且资产收益与波动之间存在着杠杆效应, 随机波动率模型能较好地捕捉到金融资产收益率的杠杆效应和“波动率微笑”现象^[25-28], 而双指数跳跃扩散模型在尖峰、厚尾拟合上更符合金融理论建模和实际需要^[17, 29-31]. 同时, 该类过程能同时反映市场受到冲击时的快速上涨和下跌跳跃, 更符合真实金融市场情形.

鉴于此, 本文应用Heston随机波动率模型与跳扩散过程来刻画双币种幂期权中标的资产价格和汇率的变动, 并假定汇率和国外风险资产价格受到随机波动率因素的影响, 且风险资产受突发事件或重要信息冲击时的跳跃风险服从双指数分布, 研究双币种幂期权定价问题. 本文余下部分安排如下: §2构建Heston随机波动率模型以及双指数跳扩散模型, 同时运用偏微分方程求解在定价过程中所需的联合条件特征函数. §3运用积分变换和Fourier逆变换等技术手段进行推导双币种幂型期权的定价公式. §4是该模型的数值实例分析.

§2 模型及预备知识

2.1 模型

考虑一个无套利和无摩擦的金融市场, 它的所有不确定源由完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 刻画. 定义概率空间上的三维标准布朗运动 $\{W_t = (W_t^1, W_t^2, W_t^3)', t \geq 0\}$ 和一维纯跳跃过程 Z_t . 假定 Z_t 与 W_t 相互独立, σ -代数流 $\mathcal{F}_t$ 由 W_t 和 Z_t 联合生成, 且满足通常条件的参数族. 由于跳跃的存在, 故市场是不完全的. 在风险中性测度 P 下, 假设交易期限 $[0, T]$ 内 t 时刻以外币计价的资产对数价格 $X_t = \ln S_t$ 和对数汇率 $Y_t = \ln F_t$ 满足动态过程

$$d \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_f - q - \frac{1}{2}V_t - \rho_1 V_t - \lambda k \\ r_d - r_f - \frac{1}{2}V_t \\ \alpha(\theta - V_t) \end{pmatrix} dt + \sqrt{V_t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v \end{pmatrix} dW_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dZ_t. \quad (1)$$

其中 r_d 和 r_f 分别表示国内和国外市场上的无风险利率, q 表示资产的外币红利支付率, 相关系数 $\text{corr}(dW_t^1, dW_t^2) = \rho_1$, $\text{corr}(dW_t^1, dW_t^3) = \rho_2$, $\text{corr}(dW_t^2, dW_t^3) = \rho_3$. 此外, 波动率的均值回复速率 α , 长期均值 θ 和波动率 σ_v 均为非负常数, 满足 $2\alpha\theta \geq \sigma_v^2$. 跳跃过程 $\{Z_t, t \geq 0\}$ 是定义为

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} J_k \quad (2)$$

的复合Poisson过程, 这里 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度参数为 λ 的Poisson过程, $J = \{J_k\}_{k \geq 1}$ 是独立同分布的随机变量序列, 表示以国外资产收益率的跳跃大小. 假设 Z_t 的跳跃幅度分布具有跳变换

$$\zeta(c) = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - c} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + c}, \quad (3)$$

其中 $c \in \mathbf{C}, k = \zeta(1) - 1$, η_1 和 η_2 均为正实数, 且满足 $\eta_1 > 1$ 和 $\eta_2 > 0$. k, η_1, η_2 为资产收益率的跳跃服从双指数分布时的参数, 分别表示收益率的向上跳跃幅度, 向下跳跃幅度以及向上跳跃的概率.

注1 (3)的变换结果来源于下述假定: 资产收益率跳跃大小 J 服从双指数分布, 即 J 有密度函数 $f(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} \mathbf{1}_{(x \geq 0)} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 x} \mathbf{1}_{(x < 0)}$, 其中 $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ 为示性函数.

注2 (1)-(3)包括了一些常见的市场模型. 例如, 如果忽略风险资产收益中的跳跃项, 则该模型简化为Heston随机波动率模型(SV); 而当既不考虑资产收益率的跳跃, 又不将随机波动率对资产及汇率收益率的影响考虑在内时, 该模型则简化为经典的BS模型.

2.2 联合条件特征函数

设 X_t, Y_t 和 V_t 满足模型(1)-(3), 记 $\psi(t, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T) = E[e^{iu_1 X_T + iu_2 Y_T + iu_3 V_T} | \mathcal{F}_t] = E[e^{iu_1 X_T + iu_2 Y_T + iu_3 V_T} | X_t = x, Y_t = y, V_t = v] = E_t[e^{iu_1 X_T + iu_2 Y_T + iu_3 V_T}]$ 为随机向量 (X_T, Y_T, V_T) 基于 t 时刻观测值 (x, y, v) 的联合条件特征函数, 其中 $E_t[\cdot]$ 是基于概率测度 P 下的条件期望, 且 u_1, u_2, u_3 为复数, $t \in [0, T], i = \sqrt{-1}$.

引理2.1 设 X_t, Y_t 和 V_t 满足模型(1)-(3), 则联合条件特征函数 $\psi(t, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T)$ 具有

解析表达式 $\exp\{iu_1x + iu_2y + A(\tau, u_1, u_2, u_3)v + B(\tau, u_1, u_2, u_3)\}$, 其中

$$A(\tau, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2) - \frac{2\gamma(u_1, u_2)}{c(u_1, u_2, u_3)} \right], \quad (4)$$

$$B(\tau, u_1, u_2, u_3) = \frac{\alpha\theta}{\sigma_v^2} \left[a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2) \right] \tau - \frac{2\alpha\theta}{\sigma_v^2} \ln \frac{c(u_1, u_2, u_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \\ [(r_f - q - \lambda k)iu_1 + \lambda\zeta(iu_1) - \lambda]\tau + (r_d - r_f)iu_2\tau, \quad (5)$$

$$c(u_1, u_2, u_3) = 1 - g(u_1, u_2, u_3)e^{-\gamma(u_1, u_2)\tau}, d(u_1, u_2, u_3) = 1 - g(u_1, u_2, u_3),$$

$$a(u_1, u_2) = \alpha - \sigma_v \sum_{j=1}^2 iu_j \rho_{j+1},$$

$$b(u_1, u_2) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 u_j(u_j + i) - \rho_1 u_1(u_2 + i),$$

$$\gamma(u_1, u_2) = \sqrt{a^2(u_1, u_2) - 2b(u_1, u_2)\sigma_v^2},$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = \frac{i u_3 \sigma_v^2 - a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2)}{i u_3 \sigma_v^2 - a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2)}, \quad \tau = T - t.$$

证 记 $\psi = \psi(t, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T)$, $\nabla = (\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial v})$, 则由多维半鞅Itô公式和Feynman-Kac定理可知 ψ 满足

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}v \nabla \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2\sigma_v \\ \rho_1 & 1 & \rho_3\sigma_v \\ \rho_2\sigma_v & \rho_3\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \nabla' \psi + \begin{pmatrix} r_f - q - \frac{1}{2}v - \rho_1v - \lambda k \\ r_d - r_f - \frac{1}{2}v \\ \alpha(\theta - v) \end{pmatrix}' \nabla' \psi + \\ \lambda E_t[\psi(t, u_1, u_2, u_3; x + J, y, v, T) - \psi(t, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T)], \quad (6)$$

其中边界条件满足 $\psi(T, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T) = e^{iu_1X_T + iu_2Y_T + iu_3V_T}$.

由于模型(1)-(3)具有仿射结构, 故方程(6)具有指数形式的解, 即 $\psi = \exp\{iu_1x + iu_2y + A(t, u_1, u_2, u_3)v + B(t, u_1, u_2, u_3)\}$. 于是将其代入(6), 则待定系数 $A(t) = A(t, u_1, u_2, u_3)$ 和 $B(t) = B(t, u_1, u_2, u_3)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 A^2 - (\alpha - \sigma_v \sum_{j=1}^2 iu_j \rho_{j+1})A - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 u_j(u_j + i) - \rho_1 u_1(u_2 + i) = 0, \\ A(T) = iu_3, \end{cases} \quad (7)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \alpha\theta A + (r_f - q - \lambda k)iu_1 + (r_d - r_f)iu_2 + \lambda\zeta(iu_1) - \lambda = 0, \\ B(T) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

仿照文献[19]求解微分方程方法, 先解方程(7), 令 $\tau = T - t$, 于是方程(7)可变换为方程

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma_v^2 A^2 - a(u_1, u_2)A + b(u_1, u_2), \\ A(0) = iu_3. \end{cases} \quad (9)$$

将方程(9)中的第一个式子左右两端在 $[0, \tau]$ 同时积分得

$$\int_0^\tau \frac{dA}{\frac{1}{2}\sigma_v^2 A^2 - a(u_1, u_2)A + b(u_1, u_2)} = \tau.$$

根据不定积分公式 $\int \frac{dx}{ax^2 - bx + c} = \frac{1}{-\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left[\frac{2ax - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax - b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right]$ 有

$$\frac{1}{-\gamma(u_1, u_2)} \left(\ln \frac{\sigma_v^2 A(\tau) - a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2)}{\sigma_v^2 A(\tau) - a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2)} - \ln \frac{\sigma_v^2 A(0) - a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2)}{\sigma_v^2 A(0) - a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2)} \right) = \tau,$$

进一步, 由初始条件 $A(0) = iu_3$ 有

$$\frac{\sigma_v^2 A(\tau) - a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2)}{\sigma_v^2 A(\tau) - a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2)} = \frac{\sigma_v^2 iu_3 - a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2)}{\sigma_v^2 iu_3 - a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2)} e^{-\gamma(u_1, u_2)\tau},$$

整理结果可得到(4).

下面计算 $B(t)$ 的表达式. 由方程(8)可得

$$B(\tau) = \alpha\theta \int_0^\tau A(s)ds + [(r_f - q - \lambda k)iu_1 + (r_d - r_f)iu_2 + \lambda\zeta(iu_1) - \lambda]\tau. \quad (10)$$

将(4)代入(10)中的积分部分, 有

$$\int_0^\tau A(s)ds = \frac{1}{\sigma_v^2} \left[a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2) \right] \tau - \frac{1}{\sigma_v^2} \ln \frac{c(u_1, u_2, u_3)}{d(u_1, u_2, u_3)}, \quad (11)$$

结合(10)和(11)结果可得结果(5), 从而引理得证.

注3 (1) 当 $\lambda = 0, \alpha > 0$ 且 $\sigma_v > 0$ 时, SVJ模型退化成SV模型, 此时

$$\begin{aligned} A(\tau, u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{\sigma_v^2} \left[a(u_1, u_2) + \gamma(u_1, u_2) - \frac{2\gamma(u_1, u_2)}{c(u_1, u_2, u_3)} \right], \\ B(\tau, u_1, u_2, u_3) &= \frac{\alpha\theta}{\sigma_v^2} \left[a(u_1, u_2) - \gamma(u_1, u_2) \right] \tau - \frac{2\alpha\theta}{\sigma_v^2} \ln \frac{c(u_1, u_2, u_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \\ &\quad (r_f - q)iu_1\tau + (r_d - r_f)iu_2\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

(2) 当 $\lambda = 0$ 且 $\alpha = \sigma_v = 0$ 时, SVJ模型退化成BS模型, 此时

$$\begin{aligned} A(\tau, u_1, u_2, u_3) &= iu_3 + b(u_1, u_2)\tau, \\ B(\tau, u_1, u_2, u_3) &= (r_f - q)iu_1\tau + (r_d - r_f)iu_2\tau. \end{aligned}$$

§3 主要结果

本节分别在收益函数的指数项为对称情形及非对称情形下, 考虑以下两种类型的双币种期权定价问题: 一类是期权交割价格以外国货币计价, 另一类是期权交割价格以本国货币计价.

3.1 期权交割价格以国外货币计价

假设双币种看涨期权的到期日和以外币计价的交割价格分别为 T 与 K_1 , 于是在到期日为 T 时, 以外币计价的双币种期权的收益为

$$\begin{cases} [e^{Y_T}(e^{X_T} - K_1)^+]^m, & \text{对称期权,} \\ e^{mY_T}(e^{mX_T} - K_1^m)^+, & \text{非对称期权.} \end{cases} \quad (13)$$

其中指数 $m \geq 0$, $(x)^+ = \max\{x, 0\}$. 当 $m = 1$ 时, (13) 为以外币计价的双币种欧式看涨期权; 当 $m = 2$ 时, (13) 中的第一个式子为买入 $(e^{X_T} - K_1)^+$ 份双币种欧式期权.

定理1 设 X_t, Y_t, V_t 满足模型(1)-(3), 则以外币计价的双币种对称看涨幂期权在 t 时刻的价格为

$$C_1^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T) = \frac{1}{2\pi} e^{-r_d \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta_1 + iz)k} \psi(t, z - i\beta_1 - im, -im, 0; x, y, v, T) \frac{\Gamma(iz + \beta_1) \Gamma(m+1)}{\Gamma(iz + \beta_1 + m+1)} dz, \quad (14)$$

其中 $k = \ln K_1$, $\beta_1 > 0$ 为阻尼因子常数, $\Gamma(a)$ 是参数为 a 的 Gamma 函数.

证 设 $C_1^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T)$ 为以外币计价的双币种对称看涨幂期权在 t 时刻的价值, 则在风险中性测度 P 下由无套利原理可知

$$C_1^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T) = E_t \left\{ e^{-r_d(T-t)} [e^{Y_T} (e^{X_T} - K_1)^+]^m | \mathcal{F}_t \right\} = e^{-r_d(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^y (e^x - e^k)^+]^m P_{X_T, Y_T} dx dy, \quad (15)$$

这里 P_{X_T, Y_T} 是随机变量 X_T, Y_T 在风险中性测度 P 下的联合密度函数, $k = \ln K_1$.

令 $G_t(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y [(e^x - e^k)^+]^m P_{X_T, Y_T} dx dy$, 考虑到 $G_t(k)$ 在实数域上可能不平方可积, 为确保收敛性, 根据 Carr 和 Madan^[32] 的做法, 引入阻尼因子 $\beta_1 > 0$, 使得 $g_t(k) = e^{\beta_1 k} G_t(k)$ 在实数域上平方可积, 这样可以分别构造 $g_t(k)$ 的 Fourier 变换及逆变换

$$F(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izk} g_t(k) dk, \quad (16)$$

$$g_t(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-izk} F(z) dz. \quad (17)$$

于是 $G_t(k) = e^{-\beta_1 k} g_t(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-(\beta_1 + iz)k} F(z) dz$, 其中 $F(z)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iz + \beta_1)k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^y (e^x - e^k)^+]^m P_{X_T, Y_T} dx dy \right) dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(iz + \beta_1)k} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{+\infty} e^{my} (e^x - e^k)^m P_{X_T, Y_T} dx dy \right) dk = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x e^{(iz + \beta_1)k} e^{ym} (e^x - e^k)^m dk \right) P_{X_T, Y_T} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{m(x+y)} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(iz + \beta_1)(t+x)} (1 - e^t)^m dt \right) P_{X_T, Y_T} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+iz+\beta_1)x + my} \left(\int_0^1 s^{(iz + \beta_1 - 1)} (1-s)^m ds \right) P_{X_T, Y_T} dx dy = \\ &= E_t [e^{i(z - i\beta_1 - im)X_T + i(-im)Y_T}] \int_0^1 s^{(iz + \beta_1 - 1)} (1-s)^m ds = \\ &= \psi(t, z - i\beta_1 - im, -im, 0; x, y, v, T) \frac{\Gamma(iz + \beta_1) \Gamma(m+1)}{\Gamma(iz + \beta_1 + m+1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

综合(15)-(18), 定理得证.

定理2 设 X_t, Y_t, V_t 满足模型(1)-(3), 则以外币计价的双币种非对称看涨幂期权在 t 时刻的

价格为

$$C_2^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T) = \frac{e^{-r_d \tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m e^{-(\beta_1 + iz)k}}{(\beta_1 + iz)(\beta_1 + iz + m)} \psi(t, z - i\beta_1 - im, -im, 0; x, y, v, T) dz. \quad (19)$$

证 设 $C_2^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T)$ 为以外币计价的双币种非对称看涨幂期权在 t 时刻的价值, 则由无套利原理有

$$C_2^{(1)}(t, x, y, v, K_1, T) = E_t \left\{ e^{-r_d(T-t)} [e^{mY_T} (e^{mX_T} - K_1^m)^+] | \mathcal{F}_t \right\} = e^{-r_d(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{my} [(e^{mx} - K_1^m)^+] P_{X_T, Y_T} dx dy$$

仿照定理1的证明过程可得到(19), 限于篇幅原因, 证明过程略.

3.2 期权交割价格以国内货币计价

假设双币种看涨幂期权的到期日和以国内货币计价的交割价格分别为 T 与 K_2 , 于是, 在到期日为 T 时, 以国内货币计价的双币种看涨幂期权的收益为

$$\begin{cases} [(e^{X_T + Y_T} - K_2)^+]^m, & \text{对称幂期权,} \\ (e^{m(X_T + Y_T)} - K_2^m)^+, & \text{非对称幂期权.} \end{cases} \quad (20)$$

其中指数 $m \geq 0$. 当 $m = 1$ 时, (20) 是以国内货币计价的双币种欧式看涨期权; 当 $m = 2$ 时, (20) 中的第一个式子是买入 $(e^{X_T + Y_T} - K_2)^+$ 份以国内货币计价的双币种欧式期权.

定理3 设 X_t, Y_t, V_t 满足模型(1)-(3), 则以国内货币计价的双币种对称看涨幂期权在 t 时刻的价格为

$$C_1^{(2)}(t, x, y, v, K_2, T) = \frac{1}{2\pi} e^{-r_d \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta_2 + iz)\hat{k}} \psi(t, z - i\beta_2 - im, z - i\beta_2 - im, 0; x, y, v, T) \frac{\Gamma(iz + \beta_2)\Gamma(m+1)}{\Gamma(iz + \beta_2 + m+1)} dz,$$

其中 $\hat{k} = \ln K_2$, $\beta_2 > 0$ 为阻尼因子常数, $\Gamma(a)$ 是参数为 a 的Gamma函数.

证明过程与定理1类似.

定理4 设 X_t, Y_t, V_t 满足模型(1)-(3), 则以国内货币计价的双币种非对称看涨幂期权在 t 时刻的价格为

$$C_2^{(2)}(t, x, y, v, K_2, T) = \frac{e^{-r_d \tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m e^{-(\beta_2 + iz)\hat{k}}}{(\beta_2 + iz)(\beta_2 + iz + m)} \psi(t, z - i\beta_2 - im, z - i\beta_2 - im, 0; x, y, v, T) dz.$$

其中 $\hat{k} = \ln K_2$, $\beta_2 > 0$ 为阻尼因子常数, $\Gamma(a)$ 是参数为 a 的Gamma函数.

证明过程与定理1类似.

§4 数值实例分析

本节应用数值计算实例分析考察Heston随机波动率与双指数跳扩散组合模型(SVJ模型)下双币种看涨幂期权的价格影响因素. 以对称幂期权为主要分析对象. 首先, 研究SVJ模型下双币种看涨幂期权的“隐含波动率微笑”. 其次, 分析SVJ模型相较于BS模型及SV模型在双币种幂期

权定价上的差异性. 最后, 在SVJ模型下对期权的主要特征参数进行分析.

数值计算实例中的模型参数设定借鉴已有的研究文献, 其中利率 r_d, r_f 取值参考文献[8], 标的资产的波动率, 跳跃风险参数参考文献[23], 汇率变动的参数值设定是基于假设值, 类似文献[7], 其余参数设置参考文献[32], 保证 $\psi(t, u_1, u_2, u_3; x, y, v, T) < +\infty$, 详细的模型参数设置见表1. 为确保模型在计算过程中的稳定性和收敛性, 关于阻尼因子的选取依据见文献[32-33], 这里选择阻尼因子 $\beta_1 = 0.06$ 和 $\beta_2 = 0.06$. 期权定价的公式以广义积分的形式呈现, 为了解决复杂的无穷积分问题, 利用Mathematica9.0中的NIntegrate函数进行数值积分, 该函数能够自动选择最适合的数值积分方法.

表1 参数表					
参数符号	参数含义	参数值	参数符号	参数含义	参数值
σ_v	方差波动率	0.1	θ	长期均值	0.15
α	均值的回复速率	2	t	期权初始时间	0
T	期权到期时间	0.25	ρ_1	汇率与资产价格的相关系数	0.1
ρ_2	资产收益率的杠杆效应系数	0.3	ρ_3	汇率的杠杆效应系数	0.4
r_d	国内无风险利率	0.03	r_f	国外无风险利率	0.01
q	风险资产的红利支付率	0.02	p	风险资产收益率上跳的概率	0.6
η_1	资产收益率的上跳幅度	3	η_2	资产收益率的下跳幅度	1
λ	跳跃强度	0.6	F_0	初始汇率	8
v	方差初始值	0.04	K_1	以外币计价的交割价格	6
S_0	标的资产价格	8	K_2	以本国货币计价的交割价格	6

图1和图2是以SVJ模型为基础, 将两类双币种看涨期权的价格作为基准计算BS模型中相应双币种期权的隐含波动率. 可以发现, 两类双币种期权的隐含波动率曲线都存在明显的“微笑”现象, 随着幂指数 m 的增大“微笑”现象的开口变得更加宽阔, 即隐含波动率曲线的曲率显著降低; 随着幂指数 m 的增大, 右尾的偏度也随之增大. 此外, 相对于第一类期权, 第二类期权的隐含波动率曲线关于幂指数 m 的变化差异性要小一些.

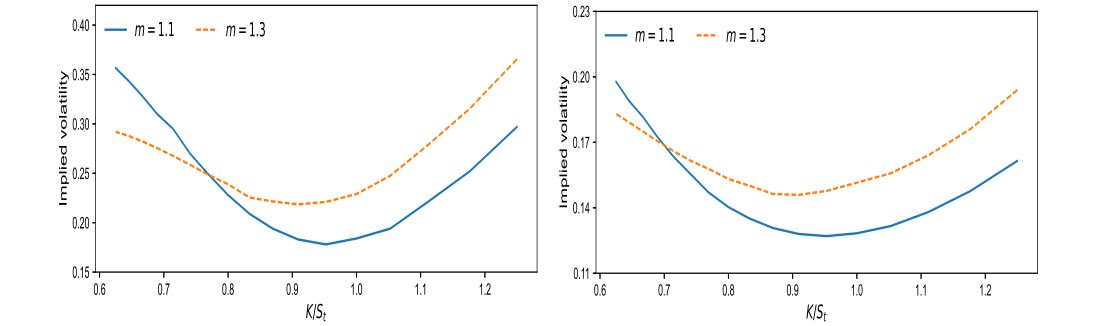


图1 第一类双币种期权的隐含波动率曲线

图2 第二类双币种期权的隐含波动率曲线

表2和表3是比较SVJ模型, BS模型和SV模型下的期权价格差异性. 由表2和表3可知, SVJ模型和SV模型下的两类双币种期权价格都高于BS模型下的对应期权价格, 说明期权的随机波动及风险补偿价格是正向的, 这符合基本的金融市场特征. SVJ模型的期权价格高于SV模型下的对应的期权价格, 这是由于SVJ模型中的标的资产跳参数对期权的价格有正向调

节作用,体现了资产收益率的跳跃现象对期权价格的显著影响.相对第二类双币种幂期权,第一类双币种幂期权的价格受SVJ模型的影响更显著,这是由于第一类双币种幂期权的交割价格是以国外货币计价,波动率对汇率的杠杆作用较强.此外,实验结果还显示出两类双币种幂期权价格在幂指数 m 有小幅增加的情况下会出现对应几何级数的增加变化,说明双币种幂型期权价格对于幂指数 m 非常敏感,也体现出指数幂收益结构对双币种期权收益的重要影响,这也意味着有必要设置合理的幂指数来调节幂型双币种期权投资者的投资风险.

表2 三类模型下第一类双币种幂期权价格之比较

F_0	S_0	$m = 1.1$			$m = 1.3$		
		SVJ	SV	BS	SVJ	SV	BS
8	7	12.8095	10.5147	10.1156	24.5306	17.5144	16.3614
	8	23.3973	21.2191	21.0592	46.0187	38.4069	37.5652
	9	35.0641	32.9572	32.8369	71.8805	63.6957	62.9027
	10	47.2264	45.1654	45.04853	100.6540	91.8905	91.0600
10	7	16.3731	13.4399	12.9298	32.7862	23.4088	21.8678
	8	29.9066	27.1224	26.9180	61.506	51.3320	50.2076
	9	44.8191	42.1261	41.9724	96.0714	85.1321	84.0721
	10	60.3651	57.7308	57.5812	134.5290	122.8160	121.7060
12	7	20.0093	16.4246	15.8012	41.5554	29.6698	27.7166
	8	36.5482	33.1457	32.8959	77.9567	65.062	63.6363
	9	54.7725	51.4814	51.2936	121.7670	107.9020	106.558
	10	73.7709	70.5516	70.3688	170.5110	155.6640	154.2580

表3 三类模型下第二类双币种幂期权价格之比较

F_0	S_0	$m = 1.1$			$m = 1.3$		
		SVJ	SV	BS	SVJ	SV	BS
8	7	74.2066	73.7902	73.7235	165.6350	162.4480	161.9270
	8	87.3355	86.8665	86.7902	200.7040	196.9600	196.3460
	9	100.6480	100.1250	100.0390	237.2550	232.9330	232.2230
	10	114.1230	113.5450	113.4490	275.1590	270.2390	269.4300
10	7	97.3037	96.7943	96.7108	227.9860	223.8100	223.1240
	8	114.1230	113.5450	113.4490	275.1590	270.2390	269.4300
	9	131.1720	130.5250	130.4160	324.2850	318.5920	317.6550
	10	148.4270	147.7080	147.5870	375.1970	368.7050	367.6360
12	7	120.9170	120.3110	120.2100	294.5860	289.3590	288.4990
	8	141.5020	140.8111	140.6960	354.6270	348.4580	347.4420
	9	162.3640	161.5880	161.4570	417.1210	409.9730	408.7940
	10	183.4740	182.6100	182.4640	481.8600	473.7010	472.3540

表4考察SVJ模型中的第一类双币种看涨幂期权重要特征参数 $\lambda, \eta_1, \eta_2, \rho_2$ 和 ρ_3 对期权价格的影响.除了 $\lambda, \eta_1, \eta_2, \rho_2$ 和 ρ_3 以外,模型其他参数取值来自表1.结果显示,模型参数 λ, η_1 和 η_2 对双币种看涨幂期权的定价具有正面影响.这表明,随着风险资产价格的提升,双币种看涨幂期权的

价值亦随之上升. 这是由于跳跃的强度与幅度导致的风险资产价格变化更为显著, 从而增强了其对冲效果, 最终提高了期权的内在价值. 此外, 相关系数 ρ_2 与 ρ_3 同样对期权回报造成正向影响. 随着这两个相关系数值的增加, 方差与风险资产收益及汇率之间的相关性将增强, 更高的相关系数会使得风险资产和汇率处于较高的水平, 从而提升期权行使的价值.

表4 SVJ模型参数 $\lambda, \eta_1, \eta_2, \rho_2$ 和 ρ_3 对第一类双币种幂期权价格的影响

K_1	$\rho_2 = -0.3, \rho_3 = -0.4$		$\rho_2 = 0.3, \rho_3 = 0.4$	
	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.9$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.9$
$\eta_1 = 0.3, \eta_2 = 0.1$				
11	0.7788	2.9675	0.8843	3.0895
12	0.1548	0.8754	0.2078	0.9880
13	0.0242	0.2050	0.0420	0.2675
14	0.0031	0.0391	0.0076	0.0635
$\eta_1 = 3, \eta_2 = 1$				
11	4.4503	6.6698	4.4638	6.6839
12	3.8745	5.8413	3.8807	5.8491
13	3.4156	5.1735	3.4200	5.1797
14	3.0396	4.6236	3.0434	4.6290

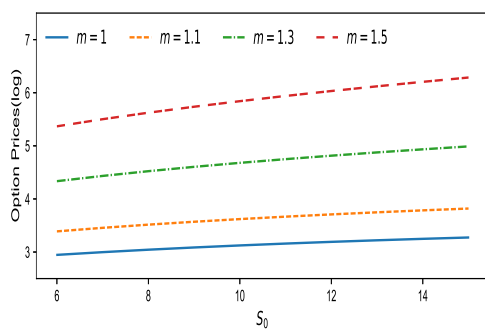


图3 基础资产初始价格对期权价格的影响

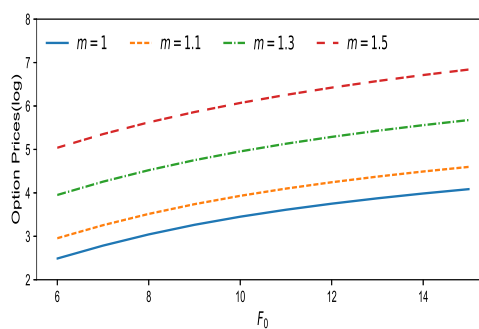


图4 汇率初始价格对期权价格的影响

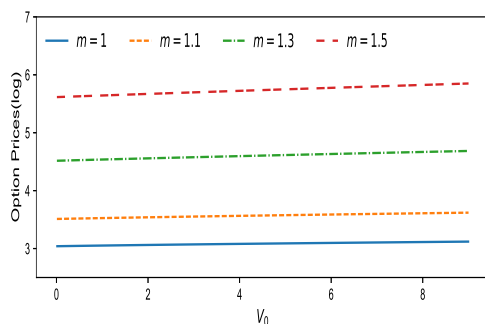


图5 方差初始值对期权价格的影响

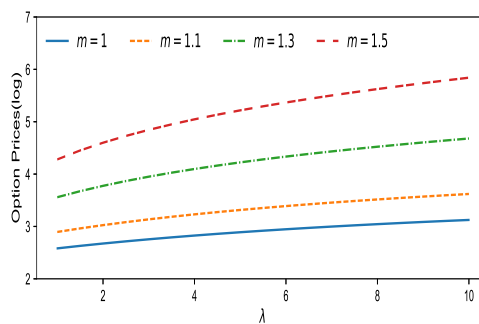


图6 跳跃强度对期权价格的影响

图3-图6分别给出了第一类双币种看涨幂期权对数价格在不同幂指数下关于标的资产初始价格 S_0 , 汇率初始价格 F_0 , 方差初始值 v_0 和跳跃强度参数 λ 的变化情况. 实验结果表明, 该种期权的价格会随着幂指数、资产初始价格、汇率初始价格、方差初始值和跳跃强度的上涨而显著上升, 随着初始方差的变大而缓慢上涨, 这也提醒投资者需要重视基础资产和汇率的波动对期权价值的显著影响. 同时, 高方差值通过加大市场的波动性, 提供更多的获利机会. 然而, 跳跃强度参数带来额外的利润机会, 但同时也带来更高的市场不确定性, 从而增加投资风险. 幂指数的增加会导致期权价格的加速增长, 尤其是分别在较高的参数 S_0 , F_0 , v_0 和 λ 范围内, 值的区别变得更加明显, 期权具有更高的幂指数, 其所蕴含的潜在收益更为丰富, 这也反映出它更强的风险承担能力和收益预期. 这些研究结果不仅支持理论分析, 还为投资者在制定期权投资策略时提供实践支撑.

§5 结论

在本研究中, 利用Heston随机波动率双指数分布的跳跃扩散模型来描述标的资产的动态过程. 通过采用数学工具, 如积分变换、偏微分方程的求解以及Fourier逆变换, 推导出了双币种幂期权定价公式. 该模型能够较好地捕捉金融资产收益率的尖峰和厚尾特征, 并有效解释“波动率微笑”现象. 与传统的BS模型及简单Heston模型相比, 此模型在期权定价方面具有更高的定价能力. 通过对参数敏感性进行分析和数值模拟, 验证了本研究提出的模型理论, 为未来的研究奠定坚实的基础.

参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Reiner E. Quanto mechanic from Black-Scholes to blackscholes[J]. Risk Publication, 1992, 5(2): 59-63.
- [3] Wong H Y, Lau K Y, Chan N H. Quanto options under double exponential jump diffusion[J]. Statistics, 2007, 852: 1-31.
- [4] Lee Y, Lee J. Local volatility for quanto option prices with stochastic interest rates[J]. Korean Journal of Mathematics, 2015, 23(1): 81-91.
- [5] Lee Hangsuck, Ha Hongjun, Lee Minha. Partial quanto lookback options[J]. North American Journal of Economics & Finance, 2023, 64: 1062-9408.
- [6] Battauz Anna, De Donno Marzia, Sbuelz Alessandro. On the exercise of American quanto options[J]. North American Journal of Economics & Finance, 2022. 62: 101738.
- [7] 郭培栋, 张寄洲. 双币种博弈期权[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(24): 21-29.
- [8] 韦铸娥, 何家文. 随机波动率跳扩散模型的双币种任选期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(12): 94-101.
- [9] Heynen R C, Kat H M. Pricing and hedging power options[J]. Financial Engineering and the Japanese Markets, 1996, 3(3): 253-261.
- [10] 魏广华, 袁明霞, 王丙均, 等. 随机利率下数字幂型期权的定价[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(12): 55-60.
- [11] 张立东, 孙艳美. 不确定环境下幂期权的定价研究[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2020, 53(2): 1-6.

- [12] Liu Yang, Lio Waichon. Power option pricing problem of uncertain exponential Ornstein - Uhlenbeck model[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2024,178: 114293.
- [13] Lee Y, Yoo H S, Lee J. Pricing formula for power quanto options with each type of payoffs at maturity[J], Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017, 13(9): 6695-6702.
- [14] Lee J, Lee Y. Pricing symmetric type of power quanto options[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2019, 56(2): 351-364.
- [15] Javed H. Pricing of Quanto power options and related exotic options[J]. Results in Applied Mathematics, 2023, 18: 100371.
- [16] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3: 125-144.
- [17] Kou S G. A jump diffusion model for option pricing[J]. Management Science, 2002, 48(8): 1086-1101.
- [18] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6: 327-343.
- [19] 邓国和. Heston模型的欧式任选期权定价与对冲策略[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2012, 30(3): 36-43.
- [20] Susanne K, Ulrich N. On the pricing of forward starting options in Heston's model on stochastic volatility[J]. Finance and Stochastics Volume, 2005, 9(2): 233-250.
- [21] Bates D. Jumps and stochastic volatility exchange rate processes implicit in deutsche mark option[J]. Reviews of Financial studies, 1996, 9: 69-107.
- [22] Scott L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 413-426.
- [23] 邓国和, 杨向群. 随机波动率与双指数跳扩散组合模型的美式期权定价[J]. 应用数学学报, 2009, 32(2): 236-255.
- [24] 施秋红. 带跳的随机波动率模型下的期权定价研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2014.
- [25] 陈欢瑜. 基于随机波动率模型的猪粮比价波动特征研究[D]. 北京: 商务部国际贸易经济合作研究院, 2023.
- [26] 郁瑞澜, 商豪. 基于随机波动率模型的沪深300ETF期权定价[J]. 湖北工业大学学报, 2021, 36(4): 116-120.
- [27] 孙有发, 吴碧云, 郭婷, 等. 非仿射随机波动率模型下的50ETF期权定价: 基于Fourier-Cosine方法[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(4): 888-904.
- [28] 叶五一, 陆欣, 陈鹏展. 中国波指隐含的波动率风险溢价研究: 基于带跳随机波动率模型的实证分析[J]. 系统工程学报, 2023, 38(6): 765-777.
- [29] Kou S G, Wang Hui. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. Management Science, 2004, 50(9): 1178-1192.
- [30] 祝兆媚, 商豪. 基于双指数跳扩散模型的沪深300ETF期权定价研究[J]. 湖北工业大学学报, 2025, 40(1): 104-120.
- [31] 宫晓莉, 熊熊, 庄新田. 广义双指数分布的跳跃扩散模型下股指期货波动研究[J]. 管理科学, 2018, 31(3): 149-159.
- [32] Carr P, Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform[J]. Journal of Computational Finance, 1999, 2: 61-73.
- [33] Dempster M A H, Hong S G. Spread option valuation and the fast Fourier transform[C]. In Mathematical finance-Bachelier congress 2000 (pp. 203-220). Berlin: Springer, 2002.

Pricing power quanto option based on double exponential jump-diffusion model with Heston stochastic volatility

WEI Zhu-e¹, XI Huan²

- (1. College of Information Engineering, Nanning University, Nanning 530200, China;
2. Department of Statistics, Shanghai University of Finance and Economics Zhejiang College, Jinhua 321013, China)

Abstract: Under the jump diffusion model with double exponential distribution of stock prices, the Heston stochastic volatility model is applied to characterize the volatility changes, and the correlation effects of stochastic volatility on stock prices and exchange rates are comprehensively considered to study the pricing problem of power options under the dual currency scenario. By using methods such as integral transformation, solution of partial differential equations, and Fourier inverse transformation, the quasi-closed-form pricing formulas of dual currency power options priced in foreign and domestic currencies are obtained, respectively. Numerical analysis results show that the combined model of Heston stochastic volatility model and the double exponential jump diffusion model can better capture the "volatility smile" phenomenon in financial markets, moreover the jump amplitude and intensity of risk asset returns, as well as the correlation coefficients of risk asset returns and exchange rates with volatility respectively all have a positive impact on the option price. In addition, the model has a higher option pricing than the classical Black-Scholes model and Heston stochastic volatility model under the same parameter conditions.

Keywords: Heston stochastic volatility model; double exponential distribution; quanto option; power options; Fourier inversion transform

MR Subject Classification: 60E10; 91G20