

伪辛空间上格的秩生成函数 和特征多项式及Poincaré多项式

莫晓云¹, 陈修焕², 赵燕冰^{3*}

(1. 河南建筑职业技术学院 基础教学部, 河南郑州 450064;

2. 海南经贸职业技术学院 人文艺术学院, 海南海口 571127;

3. 张家口职业技术学院 基础部, 河北张家口 075000)

摘要: 利用有限域上伪辛空间中子空间的计数定理, 研究了有限伪辛群作用下子空间轨道生成格的秩生成函数、特征多项式和Poincaré多项式, 并且确定了它们的表示式.

关键词: 格; 伪辛空间; 秩生成函数; 特征多项式; Poincaré多项式

中图分类号: O152.8

文献标识码: 文章编号: 1000-4424(2025)03-0345-10

§1 引言

偏序集和格中的秩生成函数和特征多项式的介绍和研究出现在一些早期文献[1-4]中. 有限域上的典型群几何有着很好的性质, 利用这些性质, 文献[5-8]研究了有限线性空间、有限辛空间、有限酉空间和有限正交空间中由子空间轨道生成格的秩生成函数和特征多项式问题, 文献[7-8]也给出了在有限典型群作用下, 由子空间轨道生成格的Poincaré多项式并给出了相应的定义和表示式. 伪辛空间中的情况较其他有限空间复杂, 本文借鉴了文献[7-8]的一些研究方法, 补充了文献[5]中在有限伪辛群 $PS_n(\mathbb{F}_q)$ 作用 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 下, 子空间轨道生成格的秩生成函数和Poincaré多项式, 并重新给出了它的特征多项式, 而且计算方法要比文献[5]更为简便. 本文沿用文献[1, 5]中的名词术语和符号, 并引用[5, 9]中的一些结果.

本文用 $[M_1, M_2, \dots, M_l]$ 表示分块对角矩阵, 其主对角线上依序是方阵 $M_1, M_2, \dots, M_l$. 设 $n = 2\nu + \delta$, ν 是非负整数, 而 $\delta = 0, 1$, 或 2 . 引进符号

$$S_{2\nu+\delta} = \begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} & \\ I^{(\nu)} & 0 & \\ & & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{cases} \emptyset, & \text{如果 } \delta = 0, \\ 1, & \text{如果 } \delta = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

收稿日期: 2023-11-01 修回日期: 2024-04-11

*通讯作者, E-mail: 18931311531@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(11971146)

根据文献[5, 9]可知, 设 $\mathbb{F}_q$ 是特征为2的有限域. 令 $S_{2\nu+\delta}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上一个 $n \times n$ 非奇异非交错对称矩阵, $\mathbb{F}_q$ 上一个 $n \times n$ 矩阵 T 如果满足 $TS_{2\nu+\delta}{}^tT = S_{2\nu+\delta}$ 则称 T 为关于 $S_{2\nu+\delta}$ 的伪辛矩阵, tT 为 T 的转置矩阵. 关于 $S_{2\nu+\delta}$ 的伪辛矩阵是非奇异的, 并且他们关于矩阵的乘法形成一个群, 叫做 $\mathbb{F}_q$ 上关于 $S_{2\nu+\delta}$ 的伪辛群, 表示为 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q, S_\delta)$. 将 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q, S_\delta)$ 简记为 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$. 群 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的作用

$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)} \times PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}, ((x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+\delta}), T) \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+\delta})T,$
向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 与群 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的作用被称作特征为2的有限域上的伪辛空间[5, 9].

本文只讨论 $\delta = 1, 2$ 的情形, $S_{2\nu+\delta}$ 简记为 S_δ , $\delta = 0$ 的情形同辛空间, 辛空间上的情形参阅文献[5, 7].

令 P 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上的一个 m 维子空间, 秩为 m 的 $m \times (2\nu + \delta)$ 矩阵也用 P 表示, 它的行向量生成一个子空间 P , 称矩阵 P 为这个子空间 P 的表示矩阵. 在 $2\nu + \delta$ 维伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的一个 m 维子空间 P 叫做关于 S_δ 的一个 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 型子空间, 其中 $\tau = 0, 1, 2$ 且 $\varepsilon = 0, 1$, 如果 $PS_{2\nu+\delta}{}^tP$ 合同于下列三种形式之一, 其中 $0 \leq s \leq [\frac{m}{2}]$,

$$M(m, 2s + \tau, s) = \begin{cases} [S_{2s}, 0^{(m-2s)}], & \tau = 0, \\ [S_{2s}, 1, 0^{(m-2s-1)}], & \tau = 1, \\ [S_{2s}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, 0^{(m-2s-2)}], & \tau = 2, \end{cases}$$

且满足两个条件: 1. $PS_\delta{}^tP$ 合同于 $M(m, 2s + \tau, s)$; 2. $\varepsilon = 0, e_{2\nu+1} \notin P$ 或 $\varepsilon = 1, e_{2\nu+1} \in P$.

$\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 在 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下划分成一些轨道, 显然 $\{0\}$ 与 $\{\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\}$ 是两个平凡轨道[5, 9].

§2 预备知识

首先回顾文献[5-6]中格、秩生成函数与特征多项式等一些相关概念, 以及文献[9]关于典型群几何学中伪辛的一些基本知识.

定义2.1^[3, 6] 若 P 是秩 n 的分次偏序集, 并且其中有 p_i 个元素的秩为 i , 则称多项式

$$F(P, q) = \sum_{i=0}^n p_i q^i$$

为 P 的秩生成函数. 当 P 是一个格 L 时, $F(P, q)$ 就称为格 L 的秩生成函数.

注 为了区别有限伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中素数幂 q , 在下文, 秩生成函数 $F(P, q)$ 用 $F(P, t)$ 代替.

定义2.2^[5-7] 设 P 是有最小元0和最大元1的有限偏序集, 并且 P 上有秩函数 r (秩函数概念见[5], p12)和Möbius函数 μ , 那么多项式 $\chi(P, x) = \sum_{a \in P} \mu(0, a)x^{r(1)-r(a)}$ 叫做 P 上的特征多项式.

命题2.1^[5, 9] 在伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中, $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 型子空间存在当且仅当

$$(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} (0, 0), (1, 0), (1, 1) \text{ 或 } (2, 0), & \text{若 } \delta = 1, \\ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0) \text{ 或 } (2, 1), & \text{若 } \delta = 2, \end{cases} \quad (1)$$

且

$$2s + \max\{\tau, \varepsilon\} \leq m \leq \nu + s + \left[\frac{\tau + \delta - 1}{2}\right] + \varepsilon. \quad (2)$$

用 $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)} = \mathcal{M}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 表示 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中全体 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 型子空间的集合且 $|\mathcal{M}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)| = N(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$. $N(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 由文献[9]定理4.14给出. $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)}$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的子空间集在伪辛群 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的一条轨道[5, 9].

类似文献[5], 令 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 是由 $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)}$ 中所有非空子空间的交构成的集合, 约定 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + \delta)}$ 是 $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)}$ 中零个子空间的交. 如果按子空间的反包含关系规定 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 的偏序 $\geq$, 即对于伪辛空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + \delta)}$ 的子空间 U, V , 有 $U \subset V \Leftrightarrow U \geq V$, 那么 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 作成有限格, 称为由伪辛群 $PS_{2\nu + \delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的子空间轨道 $\mathcal{M}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 生成的格, 简记为 $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$, 由[5]中定理7.2知 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的最小元为 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + \delta)}$, 最大元为 $\bigcap_{X \in \mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)}} X$.

命题2.2^[5] 设 $n = 2\nu + 1 > m \geq 1$, 并且 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0), (1, 0), (1, 1)$ 或 $(2, 0)$. 如果 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 满足(2), 那么

$$(a) \text{ 如果 } (\tau, \varepsilon) = (0, 0), \text{ 那么 } \mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu + 1) \text{ 由 } \mathbb{F}_q^{(2\nu + 1)} \text{ 和满足} \quad m - m_1 \geq s - s_1 \geq 0 \quad (3)$$

的所有 $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 型子空间组成.

(b) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 1)$, 那么 $\mathcal{L}(m, 2s + 1, s, 1; 2\nu + 1)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 1)}$ 和满足(3)的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 1)$ 型子空间组成.

(c) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 或 $(2, 0)$, 那么 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, 0; 2\nu + 1)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 1)}$ 和满足

$$m - m_1 \geq s - s_1 + \lceil \frac{\tau - \tau_1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{|\tau - \tau_1|}{2} \rceil \quad (4)$$

的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间组成.

命题2.3^[5] 设 $n = 2\nu + 2 > m \geq 1$, 而 $\varepsilon = 0$ 且 $\tau = 0, 1$ 或 2 . 如果 $(m, 2s + \tau, s, 0)$ 满足(2), 那么

(a) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$, 则 $\mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu + 2)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 2)}$ 和满足(3)的所有 $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 型子空间组成.

(b) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0), (2, 0)$, 则 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, 0; 2\nu + 2)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 2)}$ 和满足(4)的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间组成.

命题2.4^[5] 设 $n = 2\nu + 2 > m \geq 1$, 并且 $(\tau, \varepsilon) = (0, 1)$ 或 $(2, 1)$. 如果 $(m, 2s + \tau, s, 1)$ 满足(2), 那么

(a) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 1)$, 则 $\mathcal{L}(m, 2s, s, 1; 2\nu + 2)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 2)}$ 和满足(3)的所有 $(m_1, 2s_1, s_1, 1)$ 型子空间组成.

(b) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (2, 1)$, 则 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 1; 2\nu + 2)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu + 2)}$ 和满足

$$m - m_1 \geq s - s_1 + \frac{\tau - \tau_1}{2} \geq \frac{\tau - \tau_1}{2}, \quad \tau - \tau_1 = 0 \text{ 或 } 2. \quad (5)$$

的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 1)$ 型子空间组成.

在下文中, 为了表述上的方便, 记

$$f(x, y, z; \tau_1) = \sum_{m_1=2s_1+z+\tau_1}^{m-s+s_1-x} \sum_{s_1=0}^{\min\{[(m_1-z-\tau_1)/2], s-y\}} N(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon_1; 2\nu + \delta),$$

其中 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon_1)$ 满足(1)和(2)而 $\varepsilon_1 = 0$ 或 1 , $\tau_1 = 0, 1$ 或 2 .

引理2.1 设 $1 \leq m_1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, $\mathbb{F}_q^{(2\nu + \delta)}$ 上子空间 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon_1)$ 满足(1)和(2). 设 $P \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 且 $P \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu + \delta)}$, 令 $\dim P = m_1$, 用 $N(P)$ 表示 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 中 P 的个数, 则

I) $\delta = 1$ 时, 有

1) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 满足(3), 那么 $N(P) = f(0, 0, 0; 0)$.

- 2) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 1)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 1)$ 满足(3), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(0, 0, 1; 0) + f(0, 0, 0; 1) + f(0, 0, 0; 2).$$
- 3) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(0, 0, 0; 1) + f(0, 1, 0; 2).$$
- 4) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(1, 0, 0; 1) + f(0, 0, 0; 2).$$

II) $\delta = 2$ 时, 有

- 1) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 满足(3), 那么 $N(\mathbf{P}) = f(0, 0, 0; 0).$
- 2) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(0, 0, 0; 1) + f(0, 1, 0; 2).$$
- 3) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(1, 0, 0; 1) + f(0, 0, 0; 2).$$
- 4) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 1)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1, s_1, 1)$ 满足(3), 那么 $N(\mathbf{P}) = f(0, 0, 1; 0).$
- 5) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (2, 1)$ 且子空间 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 1)$ 满足(5), 那么

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 1; 0) + f(0, 0, 0; 2).$$

证 这里只证明情形I)的1)和3), 其它情形类似.

1) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$, 由于 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 上子空间 $(m, 2s, s; 0)$ 和 $(m_1, 2s_1, s_1; 0)$ 满足(2)和(3). 所以由(2)得

$$2s_1 \leq m_1 \leq \nu + s_1. \quad (6)$$

由(3)得 $m - m_1 \geq s - s_1 \geq 0$, 给定 m_1 则得 s_1 满足 $0 \leq s_1 \leq \min\{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor, s\}$. 故当 $(m_1, 2s_1, s_1; 0)$ 满足(2)和(3)时, $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu + 1)$ 中 $(m_1, 2s_1, s_1; 0)$ 型子空间的个数是

$$\sum_{s_1=0}^{\min\{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor, s\}} N(m_1, 2s_1, s_1, 0; 2\nu + 1).$$

由(3)变形为 $m_1 \leq m - s + s_1$, 而 $m - s + s_1 \leq \nu + s_1$. 由(6)可知 $2s_1 \leq m_1 \leq m - s + s_1$. 因此当 $(m_1, 2s_1, s_1; 0)$ 满足(2)和(3)时, 由命题2.2可知 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 中所有 $(m_1, 2s_1, s_1; 0)$ 型子空间 $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$)的个数 $N(\mathbf{P})$ 为

$$\sum_{m_1=2s_1}^{m-s+s_1} \sum_{s_1=0}^{\min\{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor, s\}} N(m_1, 2s_1, s_1; 2\nu + 1) = f(0, 0, 0; 0). \quad (7)$$

3) 如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$, 由于 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 上子空间 $(m, 2s + 1, s; 0)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1; 0)$ 满足命题2.1和(4). 由(2)得

$$\begin{cases} 2s_1 \leq m_1 \leq \nu + s_1, & \tau_1 = 0, \\ 2s_1 + 1 \leq m_1 \leq \nu + s_1, & \tau_1 = 1, \\ 2s_1 + 2 \leq m_1 \leq \nu + s_1 + 1, & \tau_1 = 2. \end{cases} \quad (8)$$

由(4)得

$$m - m_1 \geq s - s_1 + \lceil \frac{1 - \tau_1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{|1 - \tau_1|}{2} \rceil \Rightarrow \begin{cases} m - m_1 \geq s - s_1 + 1 \geq 1, & \tau_1 = 0, \\ m - m_1 \geq s - s_1 \geq 0, & \tau_1 = 1, \\ m - m_1 \geq s - s_1 \geq 1, & \tau_1 = 2. \end{cases} \quad (9)$$

类似证明1)中, 可将(8)和(9)变形为

$$\begin{cases} 0 \leq s_1 \leq \min\{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor, s\}, & 2s_1 \leq m_1 \leq m - s + s_1 - 1, \quad \tau_1 = 0, \\ 0 \leq s_1 \leq \min\{\lfloor \frac{m_1-1}{2} \rfloor, s\}, & 2s_1 + 1 \leq m_1 \leq m - s + s_1, \quad \tau_1 = 1, \\ 0 \leq s_1 \leq \min\{\lfloor \frac{m_1-2}{2} \rfloor, s-1\}, & 2s_1 + 2 \leq m_1 \leq m - s + s_1, \quad \tau_1 = 2. \end{cases} \quad (10)$$

根据(10), 类似1)可证得格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 中所有 $(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1; 0)$ 型子空间 $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$, $\tau_1 = 0, 1, 2$)的个数分别是

$$\begin{cases} \sum_{m_1=2s_1}^{m-s+s_1-1} \sum_{s_1=0}^{\min\{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor, s\}} N(m_1, 2s_1, s_1, 0; 2\nu+1) = f(1, 0, 0; 0), & \tau_1 = 0, \\ \sum_{m_1=2s_1+1}^{m-s+s_1} \sum_{s_1=0}^{\min\{\lfloor \frac{m_1-1}{2} \rfloor, s\}} N(m_1, 2s_1+1, s_1, 0; 2\nu+1) = f(0, 0, 0; 1), & \tau_1 = 1, \\ \sum_{m_1=2s_1+2}^{m-s+s_1} \sum_{s_1=0}^{\min\{\lfloor \frac{m_1-2}{2} \rfloor, s-1\}} N(m_1, 2s_1+2, s_1, 0; 2\nu+1) = f(0, 1, 0; 2), & \tau_1 = 2. \end{cases}$$

即如果 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$, 当 $(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1; 0)$ 满足(2)和(4)时, 格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 中所有 $(m_1, 2s_1+\tau_1, s_1; 0)$ 型子空间 $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$)的个数是

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(0, 0, 0; 1) + f(0, 1, 0; 2).$$

引理2.2^[5] 设 $n = 2\nu + \delta > m \geq 1$, 而 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 满足

$$(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} (1, 0) \text{ 或 } (2, 0), & \text{如果 } \delta = 1, \\ (0, 0), (1, 0), (2, 0) \text{ 或 } (2, 1), & \text{如果 } \delta = 2, \end{cases} \quad (11)$$

和(2). 对于 $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 定义

$$r(\mathbf{X}) = \begin{cases} m + 1 - \dim \mathbf{X}, & \text{如果 } \mathbf{X} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}, \\ 0, & \text{如果 } \mathbf{X} = \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}, \end{cases} \quad (12)$$

则 $r : \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta) \rightarrow \mathbb{N}$ 是格 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的秩函数.

§3 主要结果

定理3.1 设 $1 \leq m_1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, 令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 且 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{P}$ 为 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon)$ 型子空间, 子空间 $(m, 2s + \tau, s, \varepsilon)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon)$ 满足(1)和(2), 则

1) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 的秩生成函数是 $F(\mathcal{L}, t) = f(1, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + f(0, 0, 0; 1)t^{m+1-m_1} + f(0, 1, 0; 2)t^{m+1-m_1} + 1$.

2) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s+2, s, 0; 2\nu+1)$ 的秩生成函数是 $F(\mathcal{L}, t) = f(1, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + f(1, 0, 0; 1)t^{m+1-m_1} + f(0, 0, 0; 2)t^{m+1-m_1} + 1$.

3) $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 满足(3), 格 $\mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu+2)$ 的秩生成函数是

$$F(\mathcal{L}, t) = f(0, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + 1.$$

4) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+2)$ 的秩生成函数是 $F(\mathcal{L}, t) = f(1, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + f(0, 0, 0; 1)t^{m+1-m_1} + f(0, 1, 0; 2)t^{m+1-m_1} + 1$.

5) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s+2, s, 0; 2\nu+2)$ 的秩生成函数是

$$F(\mathcal{L}, t) = f(1, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + f(1, 0, 0; 1)t^{m+1-m_1} + f(0, 0, 0; 2)t^{m+1-m_1} + 1.$$

证 只证情形1)的 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$, 其它情形类似.

令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$. 由引理2.2知, 对于 $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, $r: \mathcal{L}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{N}$ 是格 $\mathcal{L}$ 的秩函数.

设 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$, 由命题2.2可知 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 和满足(4)的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间组成. 考虑到 $\mathcal{L}$ 中子空间的构成, 如果 $\mathbf{P} = \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$, 那么 $r(\mathbf{P}) = 0$, 所以 $\mathcal{L}$ 中秩为0的子空间个数是1. 如果 $\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$, 令 $\dim \mathbf{P} = m_1$ 且 $\mathbf{P}$ 为 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间, 满足(2)和(4). 这样格 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 中秩为 $i = m+1 - m_1 \neq 0$ 的子空间个数由 $\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 的子空间个数确定. 由[5]中的定理7.13可知

$$\mathcal{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) \subset \mathcal{L}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) \subset$$

$$\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, 0; 2\nu+1),$$

所以 $N(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) = |\mathcal{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)|$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中满足(2)和(4)的 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型的子空间个数^[9].

因此, 格 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 中秩为 $i = m+1 - m_1 \neq 0$ 的子空间个数由 $\mathbf{P} \neq \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 的个数给出, 由引理2.1可知为

$$N(\mathbf{P}) = f(1, 0, 0; 0) + f(0, 0, 0; 1) + f(0, 1, 0; 2).$$

又 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 中秩为0的子空间个数是1, 所以根据定义2.1有 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 的秩生成函数是

$$F(\mathcal{L}, t) = f(1, 0, 0; 0)t^{m+1-m_1} + f(0, 0, 0; 1)t^{m+1-m_1} + f(0, 1, 0; 2)t^{m+1-m_1} + 1.$$

[5]已给出 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 的特征多项式, 现在用一种简便的方法重新给出.

定理3.2 设 $n = 2\nu+1 > m \geq m_1 \geq 1$ 且 $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$, 或 $(2, 0)$, $(m, 2s+\tau, s, 0)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间满足(1)和(2)且满足(4). 则

1) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, 格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(0, 1, 0; 2)g_{m_1}(x),$$

2) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, 格 $\mathcal{L}(m, 2s+2, s, 0; 2\nu+1)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 2)g_{m_1}(x),$$

其中 $g_{m+1}(x), g_{m_1}(x)$ 为 Gauss 多项式, x 为未定元[见5, p11].

证 只证情形1), 情形2)类似可证.

由(12)可知 r 是格 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 上的秩函数. 由命题2.2可知 $\mathcal{L}(m, 2s+\tau, s, 0; 2\nu+1)$ 由 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 和满足(4)的所有 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间组成.

设 $\mathbf{W}_i (i = 1, 2, \dots)$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 的 $m+1$ 维子空间, $\mathcal{S}_i$ 是 $\mathbf{W}_i$ 的 m 维子空间的集合, 而 $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}_i)$ 是按子空间的反包含关系规定的偏序且由 $\mathcal{S}_i$ 生成的格^[5]. $\mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{m+1})$ 是 $\mathbb{F}_q^{m+1}$ 子空间集按反包含关系生成的格, 记 $\mathbf{W}_0 = \mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1)$. 对于 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0 \setminus \{\mathbf{W}_0\}$ 且 $1 \leq \dim \mathbf{P} = m_1 \leq m$, 则存在某一个 $\mathcal{L}_i (i = 1, 2, \dots)$ 使得 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_i$, 不妨设 $i = 1$, 即 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1$. 对于 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1$, 就有 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0$. 规定

$$\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}} = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{L}_0 | \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}\} = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{L}_0 | \mathbf{Q} \geq \mathbf{P}\}$$

和

$$\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}} = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{L}_1 | \mathbf{Q} \subset \mathbf{P}\} = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{L}_1 | \mathbf{Q} \geq \mathbf{P}\},$$

显然 $\mathcal{L}_0^{\mathbf{W}_0} = \mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1^{\mathbf{W}_1} = \mathcal{L}_1$. 任取 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1 \setminus \{\mathbf{W}_1\}$, 由[5]的命题1.17, 有 $\chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}}, x) = g_{m_1}(x)$ (其

中 $g_{m_1}(x)$ 是Gauss多项式). 因为 $\mathbf{W}_1 \cong \mathbb{F}_q^{m+1}$, 所以 $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1) \cong \mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{m+1})$. 考虑到同构的格有相同的秩函数和特征多项式, 所以 $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1)$ 和 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{m+1})$ 有相同的秩函数 r' .

$$r'(\mathbf{X}) = \begin{cases} m+1 - \dim \mathbf{X}, & \text{如果 } \mathbf{X} \in \mathcal{L}_1 \setminus \{\mathbf{W}_1\}, \\ 0, & \text{如果 } \mathbf{X} = \mathbf{W}_1 \end{cases}$$

和 $r'(\mathbf{X}) = m+1 - \dim \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{m+1})$, 并且特征多项式 $\chi(\mathcal{L}_1, x) = \chi(\mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{m+1}), x)$, 而 $\mathcal{L}_0$ 的最大元和最小元分别是0和 $\mathbf{W}_0$, $\mathcal{L}_1$ 的最大元和最小元分别是0和 $\mathbf{W}_1$, 所以 $\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{L}_1$ 的特征多项式分别是

$$\chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{W}_0} x) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0^{\mathbf{W}_0}} \mu(\mathbf{W}_0, \mathbf{P}) x^{r(0)-r(\mathbf{P})} \quad \text{和} \quad \chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{W}_1} x) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1^{\mathbf{W}_1}} \mu(\mathbf{W}_1, \mathbf{P}) x^{r'(0)-r'(\mathbf{P})}.$$

对上述两个等式进行Möbius反演, 可得

$$x^{m+1} = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0^{\mathbf{W}_0}} \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}, x) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0} \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}, x) \quad \text{和} \quad x^{m+1} = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1^{\mathbf{W}_1}} \chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}}, x) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1} \chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}}, x),$$

因此

$$\chi(\mathcal{L}_0, x) = \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{W}_0}, x) = x^{m+1} - \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0 \setminus \{\mathbf{W}_0\}} \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}, x) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1} \chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}}, x) - \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0 \setminus \{\mathbf{W}_0\}} \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}, x).$$

因为 $\chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{W}_1}, x) = g_{m+1}(x)$, 并且对于 $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1 \setminus \{\mathbf{W}_1\}$, 有 $\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}} = \mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}$, 所以

$$\chi(\mathcal{L}_0, x) = g_{m+1}(x) + \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1 \setminus \{\mathbf{W}_1\}} \chi(\mathcal{L}_1^{\mathbf{P}}, x) - \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{L}_0 \setminus \{\mathbf{W}_0\}} \chi(\mathcal{L}_0^{\mathbf{P}}, x).$$

可以断言, 在 $m \neq 2\nu+1$ 时, $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 和 $\mathcal{L}(\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)})$ 中满足(2)和(4)的 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间是相同的. 实际上, $\mathcal{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+1)}$ 中满足(2)和(4)的 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间的集合, 由[5]中的定理7.13可知

$\mathcal{M}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) \subset \mathcal{L}(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) \subset \mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$. 所以断言成立.

取定满足(2)和(4)的 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$, 那么由[9]中的定理4.14, 可知 $\mathcal{L}(m, 2s+1, s, 0; 2\nu+1)$ 中 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 型子空间的个数是 $N(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1)$. 因为 $\mathcal{L}_1 \setminus \{\mathbf{W}_1\}$ 中 m_1 维子空间的个数是 $\begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q$. 所以

$$\chi(\mathcal{L}_0, x) = g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q g_{m_1}(x) - \sum_{(\tau_1)} N(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0; 2\nu+1) g_{m_1}(x),$$

其中 (τ_1) 表示 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(2)和(4)且 $\tau_1 = 0, 1, 2$. 根据引理2.1得

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}_0, x) &= g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q g_{m_1}(x) - \\ &\quad f(1, 0, 0; 0) g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 1) g_{m_1}(x) - f(0, 1, 0; 2) g_{m_1}(x). \end{aligned}$$

定理3.3 设 $n = 2\nu+2 > m \geq m_1 \geq 1$ 且 $(\tau, \varepsilon) = (0, 0), (1, 0)$ 或 $(2, 0)$, $(m, 2s+\tau, s, \varepsilon)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, \varepsilon_1)$ 型子空间满足(1)和(2), 则

1) $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 满足(3), 格 $\mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu+2)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \begin{bmatrix} m+1 \\ m_1 \end{bmatrix}_q g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 0) g_{m_1}(x).$$

2) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + 1, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s + 1, s, 0; 2\nu + 2)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M})), x$ 为

$$g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(0, 1, 0; 2)g_{m_1}(x).$$

3) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + 2, s_1, 0)$ 满足(4), 格 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 0; 2\nu + 2)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M})), x$ 为

$$g_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 2)g_{m_1}(x).$$

证明与定理3.2类似, 此处略.

定理3.4 设 $n = 2\nu + 2 > m \geq m_1 \geq 1$, $2s + 1 \leq m - 1 \leq \nu + s + 1$ 且 $(\tau, \varepsilon) = (2, 1)$, $(m, 2s + 2, s, 1)$ 和 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 1)$ 型子空间满足(1), (2)及(5), 则格 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 1; 2\nu + 2)$ 上的特征多项式为

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}(\mathcal{M})), x = & g_{m-1}(x) + g_m(x) + \sum_{m_1=0}^{m-1} \left[\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) + \sum_{m_1=0}^{m-2} \left[\begin{matrix} m-1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) - \\ & \sum_{m_1=2s_1}^{m-2-s+s_1} \sum_{s_1=0}^{\min\{[m_1/2], s\}} N(m_1, s_1; 2\nu)g_{m_1}(x) - x^{2\nu+1} - \\ & f(2, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(1, 1, 0; 2)g_{m_1}(x). \end{aligned}$$

证 根据(2)得 $2s + 2 \leq m \leq \nu + s + 2$ 那么根据文献[5]的定理7.37有

$$\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 1; 2\nu + 2) \cong \mathcal{L}(m - 1, 2s + 1; 2\nu + 1).$$

再由文献[5]的定理7.36有格 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 1; 2\nu + 2)$ 上的特征多项式 $\chi(\mathcal{L}(\mathcal{M})), x$ 为

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}(\mathcal{M})), x = & \chi(\mathcal{L}(m - 1, 2s + 1; 2\nu + 1), x) = \\ & \chi(\mathcal{L}(m - 1, 2s + 1, s, 0; 2\nu + 1), x) + \chi(\mathcal{L}(m - 1, 2s + 1, s, 1; 2\nu + 1), x) - x^{2\nu+1}. \end{aligned} \quad (a)$$

由定理3.2可知如果 $n = 2\nu + 1 > m - 1 \geq m_1 \geq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}(m - 1, 2s + 1, s, 0; 2\nu + 1), x) = & g_m(x) + \sum_{m_1=0}^{m-1} \left[\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) - \\ & f(2, 0, 0; 0)g_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1)g_{m_1}(x) - f(1, 1, 0; 2)g_{m_1}(x). \end{aligned} \quad (b)$$

由文献[5]定理7.5、文献[7]定理7可知如果 $n = 2\nu + 1 > m - 1 \geq m_1 \geq 1$ 且 $2s_1 \leq m_1 \leq \nu + s_1$, 则有

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{L}(m - 1, 2s + 1, s, 1; 2\nu + 1), x) = & g_{m-1}(x) + \sum_{m_1=0}^{m-2} \left[\begin{matrix} m-1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q g_{m_1}(x) - \\ & \sum_{m_1=2s_1}^{m-2-s+s_1} \sum_{s_1=0}^{\min\{[m_1/2], s\}} N(m_1, s_1; 2\nu)g_{m_1}(x). \end{aligned} \quad (c)$$

所以将(b)和(c)代入(a)定理得证.

下面给出伪辛空间中有限伪辛群作用下子空间轨道生成格的Poincaré多项式的一些结果.

设 $1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)} = \mathcal{M}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 在 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的轨道, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, \varepsilon; 2\nu + \delta)$ 是 $\mathcal{M}^{(\delta, \varepsilon)}$ 生成的格. 由[5]中的命题1.3, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 有Möbius函数.

再由[5]的推论7.14及推论7.23可知: 格 $\mathcal{L}(m, 2s + \tau, s, 0; 2\nu + \delta)$ 的最大元和最小元分别

为 $\bigcap_{\mathbf{X} \in \mathcal{M}^{(\delta,0)}} \mathbf{X} = \{0\}$ (维数为0的子空间) 和 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$, 那么格 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的Poincaré多项式有如下定义.

定义3.1 设 $1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, 而 $(m, 2s + \tau, s, 0)$ 满足命题2.1, 对于 $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ 由(12)给出 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的秩函数 r , 并且 x 是未定元, 格 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的Poincaré多项式为

$$\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x) = \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})} \mu(\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}, \mathbf{X}) (-x)^{r(\mathbf{X})}. \quad (13)$$

定理3.5 设 $1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, $\mathcal{M}^{(\delta,0)} = \mathcal{M}(m, 2s + \tau, s, 0; 2\nu + \delta)$ 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 在 $PS_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 作用下的轨道, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 是由 $\mathcal{M}^{(\delta,0)}$ 生成的格, 而 $(m, 2s + \tau, s, 0)$ 满足命题2.1, 对于 $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, 由(12)式给出 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 的秩函数 r , 并且 x 是未定元, 那么

$$\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x) = (-x)^{m+1} \chi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), -x^{-1}).$$

证明类似文献[8].

如果 $h \leq m + 1$, 令 $\psi_h(x) = (-x)^{m+1} g_h(-x^{-1}) = (-x)^{m-h+1} (1+x)(1+qx) \cdots (1+q^{h-1}x)$, 那么由引理2.1, 定理3.1, 定理3.2和定理3.5可得定理3.6.

定理3.6 设 $1 \leq m_1 \leq m \leq 2\nu + \delta - 1$, $(m, 2s + \tau, s, 0)$ 与 $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足命题2.1, 那么

1) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4)的 $\mathcal{L}(m, 2s + 1, s, 0; 2\nu + 1)$ 的Poincaré多项式 $\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$\psi_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0) \psi_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 1) \psi_{m_1}(x) - f(0, 1, 0; 2) \psi_{m_1}(x).$$

2) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4)的 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 0; 2\nu + 1)$ 的Poincaré多项式 $\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$\psi_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0) \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1) \psi_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 2) \psi_{m_1}(x).$$

3) $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1, s_1, 0)$ 满足(3)的 $\mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu + 2)$ 的Poincaré多项式

$$\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x) \text{ 为 } \psi_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q \psi_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 0) \psi_{m_1}(x).$$

4) $(\tau, \varepsilon) = (1, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4)的 $\mathcal{L}(m, 2s + 1, s, 0; 2\nu + 2)$ 的Poincaré多项式 $\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$\psi_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0) \psi_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 1) \psi_{m_1}(x) - f(0, 1, 0; 2) \psi_{m_1}(x).$$

5) $(\tau, \varepsilon) = (2, 0)$ 时, $(m_1, 2s_1 + \tau_1, s_1, 0)$ 满足(4)式的 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 0; 2\nu + 2)$ 的Poincaré多项式 $\pi(\mathcal{L}(\mathcal{M}), x)$ 为

$$\psi_{m+1}(x) + \sum_{m_1=0}^m \left[\begin{matrix} m+1 \\ m_1 \end{matrix} \right]_q \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 0) \psi_{m_1}(x) - f(1, 0, 0; 1) \psi_{m_1}(x) - f(0, 0, 0; 2) \psi_{m_1}(x).$$

根据定理3.4给出的特征多项式及定理3.5同样可以得到 $\delta = 2$, $(\tau, \varepsilon) = (2, 1)$ 时格 $\mathcal{L}(m, 2s + 2, s, 1; 2\nu + 2)$ 的Poincaré多项式.

其它几种情形 根据文献[5](见p171)可知

当 $\delta = 1$, $(\tau, \varepsilon) = (0, 0)$ 且 $2s \leq m \leq \nu + s, m \neq 2\nu + 1$ 时,

$$\mathcal{L}(m, 2s, s, 0; 2\nu + 1) \cong \mathcal{L}(m, s; 2\nu).$$

当 $\delta = 1$, $(\tau, \varepsilon) = (1, 1)$ 且 $2s + 1 \leq m \leq \nu + s + 1$ 时,

$$\mathcal{L}(m, 2s + 1, s, 1; 2\nu + 1) \cong \mathcal{L}(m - 1, s; 2\nu).$$

当 $\delta = 2$, $(\tau, \varepsilon) = (0, 1)$ 且 $2s + 1 \leq m \leq \nu + s + 1, m \neq 2\nu + 2$ 时,

$$\mathcal{L}(m, 2s, s, 1; 2\nu + 2) \cong \mathcal{L}(m - 1, s; 2\nu).$$

所以, 这三种格的秩生成函数, 特征多项式可参阅文献[7]中的格 $\mathcal{L}(m, s; 2\nu)$ 情形给出. 对于这几种情形的Poincaré多项式可根据定理3.5给出的特征多项式与Poincaré多项式的关系, 类似定理3.6可以给出.

参考文献:

- [1] Aigner M. Combinatorial Theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [2] Huo Yuanji, Liu Yingsheng, Wan Zhexian. Lattices generated by transitive sets of subspaces under finite classical groups II, the orthogonal case of odd characteristic[J]. Communications in Algebra, 1992, 9: 2685-2727.
- [3] Richard P S. Enumerative Combinatorics Volume 1[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [4] Gao You, You Hong. Lattices generated by orbits of subspaces under finite singular classical groups and its characteristic polynomeal[J]. Communications in Algebra, 2003, 6: 2927-2950.
- [5] 万哲先, 霍元极. 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [6] 李艳, 赵燕冰, 霍元极. 有限正交空间中格的秩生成函数和特征多项式[J]. 高校应用数学学报, 2022, 37(3): 337-344.
- [7] 霍元极. 有限格中的秩生成函数和Poincaré多项式[J]. 应用数学学报, 2022, 45(6): 781-794.
- [8] 徐峰, 赵燕冰, 霍元极. 偶特征有限正交空间中格的秩生成函数和Poincaré多项式[J]. 数学进展, 2024, 53(2): 250-256.
- [9] Wan Zhexian. Geometry of Classical groups over Finite Fields (Second Edition)[M]. Beijing: Science Press, 2002.

Rank-generating functions and characteristic polynomials and Poincaré polynomials of lattice in finite the pseudo-symplectic space

MO Xiao-yun¹, CHEN Xiu-huan², ZHAO Yan-bing³

- (1. Department of Basic Courses, Henan Technical college of Construction, Zhengzhou, 450064, China;
2. School of Humanities and Arts, Hainan College of Economics and Business, Haikou, 571127, China;
3. Department of Basic Courses, Zhangjiakou Vocational and Technical College, Zhangjiakou 075051, China)

Abstract: This paper is concerned with the study of the rank-generating function, the characteristic polynomial and the Poincaré polynomials of lattice generated by orbits of subspace under the action of finite pseudo-symplectic group. Their expressions are also determined using the counting theorems of subspaces in pseudo-symplectic space.

Keywords: lattices; pseudo-symplectic space; rank-generating function; characteristic polynomial; Poincaré polynomials

MR Subject Classification: 05E15; 06B35