

基于张量核范数与广义全变分正则化 的张量补全模型与算法

徐 智^{1,2}, 王川龙^{1,2}

(1. 太原师范学院 数学与统计学院, 山西晋中 030619;

2. 太原师范学院 智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 山西晋中 030619)

摘 要: 为了克服全变分正则(TV)在图像补全过程中出现的“阶梯效应”, 该文给出了张量广义全变分(TTGV)的定义, 提出一种基于张量核范数(TNN)与TTGV的张量补全模型. 使用交替方向乘子法(ADMM)将原问题转化为几个子问题的求解, 提出模型的算法框架, 并给出了算法的收敛性分析. 将提出的算法和其他三种不同类型的张量补全方法对不同采样率的彩色图像和灰度视频进行张量补全. 数值实验证明, 该文提出的算法在图像补全的视觉和质量方面均取得了更好的效果.

关键词: 张量奇异值分解; 张量核范数; 张量广义全变分; 张量补全; 交替方向乘子法

中图分类号: O242

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)03-0315-12

§1 引 言

张量补全问题旨在修复不完备张量的丢失信息, 其在彩色图像与视频处理^[1]、通信系统^[2]、机器学习^[3]等领域发挥着越来越重要的作用. 一般情况下, 图像补全问题可以表示为低秩矩阵补全模型

$$\min_{\mathbf{X}} \text{rank}(\mathbf{X}) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{X}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{O}). \quad (1)$$

其中, $\mathbf{X}$ 为待恢复矩阵, $\mathbf{O}$ 为观测到的不完备矩阵, Ω 为观测集, $\mathcal{P}_{\Omega}(\cdot)$ 为观测集上的投影算子. $\mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{X}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{O})$ 表示在观测集 Ω 上矩阵 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{O}$ 的元素相等. 灰度图像的低秩性可由矩阵秩或矩阵核范数来刻画. 对于多维图像, 图像的元素可重塑为一个矩阵, 这个过程称为高维数据的矩阵化或展开.

然而, 矩阵化通常会不可避免地破坏多维图像的内部结构. 张量作为矩阵的高阶形式, 为多维图像提供了一种更自然和贴切的表示形式. 图像补全问题可表示为低秩张量补全(low rank

收稿日期: 2023-11-29 修回日期: 2024-10-18

基金项目: 国家自然科学基金(12371381); 山西省高等学校科技创新项目(2023L241); 山西省科技创新人才团队专项资助(202204051002018); 2025年度山西省社会科学联合会重点课题“黄河一号旅游公路沿线文化遗产数字化保护与活化传播新模式研究”(SSKLZDKT2025197)

tensor completion, LRTC)模型

$$\min_{\mathcal{X}} \text{rank}(\mathcal{X}) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{O}). \quad (2)$$

其中 $\mathcal{X}$ 为待恢复张量, $\mathcal{O}$ 为观测到的不完备张量. 与矩阵秩不同, 张量的秩的定义不是唯一的, 不同方式的张量秩的定义方法对应着不同的张量分解形式. 例如, CP秩(CANDECOMP/PARAFAC, CP)是基于张量CP分解的一种秩的定义. 尽管计算CP秩是一个NP难的问题^[4], CP分解方法仍在张量恢复问题中取得了成功的应用^[5-6]. Tucker秩由张量的Tucker分解^[7]求得, 为张量沿各个模态的展开矩阵的秩构成的向量. Liu等人^[8]定义了张量核范数, 给出了基于张量Tucker秩的核范数最小化凸优化模型, 并提出了高精度低秩张量补全(high accuracy low rank tensor completion, HaLRTC)等三种算法.

张量奇异值分解(tensor singular value decomposition, t-SVD)^[9-10]是基于张量t积运算下针对三阶张量的一种矩阵奇异值分解的高阶推广形式, 是保持张量内部结构的一种强有力的工具. 在t-SVD的概念下, 多秩和管秩的概念吸引了相当的关注. 张量核范数(tensor nuclear norm, TNN)^[11]作为张量多秩的一种凸替代形式被提出. 基于t-SVD的低秩张量补全模型^[12]为

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_{\text{TNN}} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{O}), \quad (3)$$

其中 $\|\mathcal{X}\|_{\text{TNN}}$ 为三阶张量 $\mathcal{X}$ 的张量核范数.

全变分正则(total variation regularization, TV)^[13]是图像处理中一种经典的方法, 它能有效恢复图像边缘信息, 并促进保持图像的分片光滑特征. 大量的基于TV的图像补全方法被不断提出^[14-15]. 例如, 文献^[16]提出利用饱和度数值的TV进行彩图恢复. 文献^[17]提出基于张量Tucker分解下的核范数与TV的图像恢复模型(LRTV). 尽管TV正则化方法具有许多优点, 但是它却存在一个弊端, 即在光滑区域出现不理想的“阶梯效应”. 为了克服这个不利因素, Bredies等人^[18]提出了广义全变分正则(total generalized variation regularization, TGV)的概念. TV是由一阶导数计算得来, 不同于TV, TGV由一阶及更高阶导数计算得来. 诸多研究已将TGV成功应用于图像去噪^[19]、去模糊^[20]及压缩成像^[21]等领域. 受此启发, 本文提出一种张量广义全变分正则(TTGV), 并将其引入基于TNN的张量补全模型中. 新模型利用TNN保持图像的全局低秩先验信息. TTGV使用了图像的一阶及高阶导数, 使其不仅能有效保持图像的清晰边缘, 杜绝“阶梯效应”, 而且很大程度上有助于恢复图像的细节特征.

本文的主要工作包括三方面. 首先, 给出张量广义全变分正则(TTGV)的定义, 并提出了最小化TNN与TTGV的张量补全模型. 其次使用交替方向乘子法将原问题转化为不同子问题的求解, 并给出收敛性分析. 最后, 将本文提出方法分别对缺失信息的彩色图像和灰度视频进行张量补全, 并将数值实验结果与HaLRTC, TNN及LRTV三种张量补全模型进行比较, 然后分析了实验效果.

本文剩余部分结构安排如下: §2给出文中所用到的符号及预备知识. §3详细介绍本文算法的思想及对应的ADMM算法. §4展示和分析实验结果. §5为本文内容做概括性总结.

§2 符号与预备知识

本节将给出文中所用到的基本张量符号及一些重要的定义及定理.

本文中, 标量用小写字母表示, 如 $a, b, \dots$; 向量用小写黑体字母表示, 如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$; 矩阵用大写字母表示, 如 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$; 张量用大写花体字母表示, 如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. 对于三阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$,

分别使用MATLAB符号 $\mathcal{A}(i, :, :)$, $\mathcal{A}(:, i, :)$, $\mathcal{A}(:, :, i)$ 表示张量 $\mathcal{A}$ 的第 i 个水平切片, 侧切片及前切片. 为了表示方便, 将 $\mathcal{A}(:, :, i)$ 简写为 $\hat{\mathcal{A}}^{(i)}$. $\mathcal{A}(i, j, :)$ 表示固定前两个变量得到的管纤维. 张量 $\mathcal{A}$ 的第 (i, j, k) 个元素表示为 $\mathcal{A}_{i,j,k}$. 两个大小相同的张量的内积表示为 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i,j,k} a_{i,j,k} b_{i,j,k}$. $\mathcal{A}$ 的Frobenius范数可表示为 $\|\mathcal{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j,k} a_{i,j,k}^2}$. $\hat{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$ 为对 $\mathcal{A}$ 的第三个模态进行快速傅里叶变换(fast Fourier transform)的结果. 反之, $\mathcal{A} = \text{ifft}(\hat{\mathcal{A}}, [], 3)$ 为逆傅里叶变换.

定理2.1(t-SVD)^[10] 给定张量 $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 那么 $\mathcal{A}$ 的张量奇异值分解(t-SVD)为

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^H, \quad (4)$$

其中 $\mathcal{U} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$, $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ 为正交张量, $\mathcal{S} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为f-对角张量.

定义2.1(张量管秩与张量多秩)^[10] 给定张量 $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 张量管秩(tubal-rank)为 $\mathcal{S}$ 中非零对角管纤维(tubes)的个数, 表示为

$$\text{rank}_t(\mathcal{A}) = \#\{i : \mathcal{S}(i, i, :) \neq 0\},$$

其中 $\mathcal{S}$ 由 $\mathcal{A}$ 的t-SVD求得, 即 $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^H$. 张量多秩(multi-rank)可表示为 $\text{rank}_m(\mathcal{A}) \in \mathbf{R}^{n_3}$, 其第 i 个元素为 $\hat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 的第 i 个前切片的秩. 张量管秩与多秩之间的关系为 $\text{rank}_t(\mathcal{A}) = \max(\text{rank}_m(\mathcal{A}))$.

定义2.2(TNN)^[11] 张量 $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的张量核范数(TNN)为 $\hat{\mathcal{A}}$ 的所有前切片的秩的和的平均值, 即

$$\|\mathcal{A}\|_{\text{TNN}} := \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\hat{\mathcal{A}}^{(i)}\|_*,$$

其中 $\hat{\mathcal{A}}^{(i)}$ 为 $\hat{\mathcal{A}}$ 的第 i 个前切片, TNN为张量平均秩在单位球上的凸包络.

定义2.3(TGV)^[18] 假定 $\Phi \in \mathbf{R}^d$, $d \in \mathbf{N}$, $d \geq 1$ 为非空封闭域. 图像 $u : \Phi \rightarrow \mathbf{R}^+$ 的具有正权重 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) > 0$ 的二阶广义全变分定义为

$$\text{TGV}_{\alpha}^2(u) = \sup \left\{ \int_{\Phi} u \text{div}^2 v dx \mid v \in C_c^2(\Phi, \text{Sym}^2(\mathbf{R}^d)), \|v\|_{\infty} \leq \alpha_0, \|\text{div} v\|_{\infty} \leq \alpha_1 \right\}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{S}^{d \times d}$ 为所有对称矩阵构成的集合, $C_c^2(\Phi, \mathbf{S}^{d \times d})$ 为 Φ 上紧支撑的对称 $d \times d$ 矩阵域空间.

(5)可等价地写为

$$\text{TGV}_{\alpha}^2(u) = \min_{p \in \mathbf{V}} \alpha_1 \|Du - p\|_1 + \alpha_0 \|\mathcal{E}(p)\|_1, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{V} = C_c^2(\Phi, \mathbf{R}^2)$ 为 Φ 上紧支撑的二阶向量域空间, $\mathcal{E}(p) = \frac{1}{2}(Dp + (Dp)^T)$, $D = (D_1; D_2)$, D_1 及 D_2 分别为沿着水平和垂直方向的一阶向前差分算子.

下面将二维图像的TGV定义延伸至三阶张量的广义全变分正则(TTGV), 并给出如下定义:

定义2.4(TTGV) 给定三阶张量 $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 则 $\mathcal{X}$ 的广义全变分正则(TTGV)可定义为

$$\begin{aligned} \text{TTGV}_{\alpha}^2(\mathcal{X}) &= \sum_{i=1}^{n_3} \text{TGV}_{\alpha}^2(\mathcal{X}^{(i)}) = \\ &= \min_{p \in \mathbf{V}} \sum_{i=1}^{n_3} \alpha_1 \|D\mathcal{X}^{(i)} - p\|_1 + \alpha_0 \|\mathcal{E}(p)\|_1. \end{aligned} \quad (7)$$

§3 基于张量核范数与广义全变分正则化的张量补全模型与算法

本节提出一种基于TNN和TTGV的张量补全模型(TNN-TGV), 假定 $\mathcal{O} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为一非完备张量, 张量补全问题可表示为优化问题

$$\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X}\|_{\text{TNN}} + \lambda \text{TTGV}_{\alpha}^2(\mathcal{X}), \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathcal{O}), \quad (8)$$

其中 $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为待补全的目标张量, $\mathcal{P}_\Omega(\cdot)$ 为在采样集 $\Omega \in \{0, 1\}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 上的投影算子, λ 是一个正参数. (8) 目标函数中第一项的 TNN 具有使用全局先验信息刻画张量低秩的作用, 第二项使用 TTGV 具有保持图像边缘和细节信息的作用.

可使用 ADMM 方法^[22] 有效求解(8). 为了便于求解, 引入示性函数

$$\mathcal{S}_\Psi(\mathcal{X}) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \mathcal{X} \in \Psi, \\ \infty, & \text{其他,} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\Psi := \{\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}, \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{O})\}$. 在引入两个辅助变量 $\mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{Z}$ 的情况下, 则(9)可等价表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}} \quad & \|\mathcal{Y}\|_{\text{TNN}} + \lambda \text{TTGV}_\alpha^2(\mathcal{Z}) + \mathcal{S}_\Psi(\mathcal{X}), \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{Y} = \mathcal{X}, \mathcal{Z} = \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 的增广拉格朗日函数(the augmented Lagrangian function) 为

$$\begin{aligned} L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}, \mathcal{B}) = & \|\mathcal{Y}\|_{\text{TNN}} + \lambda \text{TTGV}_\alpha^2(\mathcal{Z}) + \mathcal{S}_\Psi(\mathcal{X}) + \\ & \langle \mathcal{X} - \mathcal{Y}, \mathcal{W} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_F^2 + \\ & \langle \mathcal{X} - \mathcal{Z}, \mathcal{B} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Z}\|_F^2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{B}$ 为拉格朗日乘子(Lagrange multiplier), β 为非负惩罚参数. 在 ADMM 算法框架下, 问题(11)的最小化问题可转化为以下几个子问题的求解.

1) 关于 $\mathcal{Y}$ 的子问题 固定其余变量, 提取与 $\mathcal{Y}$ 有关的项, 则变量 $\mathcal{Y}$ 可通过

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{k+1} = & \arg\min_{\mathcal{Y}} \|\mathcal{Y}\|_{\text{TNN}} + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X}_k - \mathcal{Y} + \frac{\mathcal{W}_k}{\beta}\|_F^2 = \\ & \arg\min_{\mathcal{Y}} \frac{1}{\beta} \|\mathcal{Y}\|_{\text{TNN}} + \frac{1}{2} \|\mathcal{X}_k - \mathcal{Y} + \frac{\mathcal{W}_k}{\beta}\|_F^2 \end{aligned} \quad (12)$$

求解. 假设 $\mathcal{X}_k + \frac{\mathcal{W}_k}{\beta}$ 的 t-SVD 为 $\mathcal{X}_k + \frac{\mathcal{W}_k}{\beta} = \mathcal{U} * \mathcal{D} * \mathcal{V}^H$, 则(12)可通过张量软阈值算法(t-SVT)^[23] 求解, 即

$$\mathcal{Y}_{k+1} = \mathcal{U} * \mathcal{D}_{\frac{1}{\beta}} * \mathcal{V}^H, \quad (13)$$

其中 $\mathcal{D}_{\frac{1}{\beta}} = \text{ifft}((\hat{\mathcal{D}} - \frac{1}{\beta})_+, [], 3)$, $\hat{\mathcal{D}} = \text{fft}(\mathcal{D}, [], 3)$, 且 $a_+ = \max(a, 0)$.

2) 关于 $\mathcal{Z}$ 的子问题 从(11)提取关于 $\mathcal{Z}$ 的项, 得 $\mathcal{Z}$ 的子问题为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{k+1} = & \arg\min_{\mathcal{Z}} \lambda \text{TTGV}_\alpha^2(\mathcal{Z}) + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X}_k - \mathcal{Z} + \frac{\mathcal{B}_k}{\beta}\|_F^2 = \\ & \arg\min_{\mathcal{Z}} \frac{\beta}{2\lambda} \|\mathcal{Z} - (\mathcal{X}_k + \frac{\mathcal{B}_k}{\beta})\|_F^2 + \text{TTGV}_\alpha^2(\mathcal{Z}). \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式的求解可转化为 $\mathcal{Z}_{k+1}$ 的每个前切片 $\mathcal{Z}_{k+1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n_3$ 的求解, 根据定义 2.4, $\mathcal{Z}_{k+1}^{(i)}$ 可由

$$\mathcal{Z}_{k+1}^{(i)} = \arg\min_{\mathcal{Z}^{(i)}, p} \frac{\beta}{2\lambda} \|\mathcal{Z}^{(i)} - (\mathcal{X}_k^{(i)} + \frac{\mathcal{B}_k^{(i)}}{\beta})\|_F^2 + \alpha_1 \|D\mathcal{Z}^{(i)} - p\|_1 + \alpha_0 \|\mathcal{E}(p)\|_1 \quad (15)$$

求解. 本文使用原始-对偶方法(primal-dual method)^[19] 有效的求解(15)式.

3) 关于 $\mathcal{X}$ 的子问题 提取(11)中关于 $\mathcal{X}$ 的项, 则 $\mathcal{X}$ 可通过问题

$$\mathcal{X}_{k+1} = \arg\min_{\mathcal{X}} \mathcal{S}_\Psi(\mathcal{X}) + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}_{k+1} + \frac{\mathcal{W}_k}{\beta}\|_F^2 + \frac{\beta}{2} \|\mathcal{X} - \mathcal{Z}_{k+1} + \frac{\mathcal{B}_k}{\beta}\|_F^2 \quad (16)$$

求解. 那么 $\mathcal{X}$ 可通过

$$\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{P}_{\Omega^c}(\frac{\beta \mathcal{Y}_{k+1} + \beta \mathcal{Z}_{k+1} - \mathcal{W}_k - \mathcal{B}_k}{2\beta}) + \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{O}) \quad (17)$$

更新, 其中 Ω^c 为 Ω 的补集.

算法1 求解TNN-TGV的ADMM算法

输入: 不完备张量 $\mathcal{O}$, 观测集 Ω , 最大迭代次数 $N_{\max}$.

初始化: $\mathcal{X}_0 = \mathcal{Y}_0 = \mathcal{Z}_0 = \mathcal{W}_0 = \mathcal{B}_0 = \{0\}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $k = 0$.

1: 当 不满足收敛条件且 $k < N_{\max}$ 时

2: 通过(13)更新 $\mathcal{Y}_{k+1}$.

3: 通过(15)更新 $\mathcal{Z}_{k+1}$.

4: 通过(17)更新 $\mathcal{X}_{k+1}$.

5: 通过(18), (19)更新拉格朗日乘子 $\mathcal{W}_{k+1}$ 和 $\mathcal{B}_{k+1}$.

6: 结束

输出: 估计的完备张量 $\mathcal{X}$.

4) 更新拉格朗日乘子

$$\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k + \beta(\mathcal{X}_{k+1} - \mathcal{Y}_{k+1}), \quad (18)$$

$$\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k + \beta(\mathcal{X}_{k+1} - \mathcal{Z}_{k+1}). \quad (19)$$

最终, 求解的模型的ADMM算法见算法1.

下面给出算法1的收敛性分析.

定理3.1 求解问题(10)的算法1以线性速率收敛.

证 具有线性等式约束的可分离凸问题的最小化问题

$$\min \sum_{j=1}^q f_j(x_j), \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^q A_j x_j = b \quad (20)$$

的ADMM求解算法具有线性收敛速率^[24], 其中 f_j 为凸函数, A_j 为算子矩阵.

为了证明算法1的收敛性, 可以将问题(10)转化为(20)的形式. 由 $\Psi := \{\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}, \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{O})\}$, 对于 $\forall \mathcal{R}, \mathcal{Q} \in \Psi$, 及 $t \in [0, 1]$, 有 $t\mathcal{R} + (1-t)\mathcal{Q} \in \Psi$, 则 Ψ 为凸集, 示性函数 $\mathcal{S}_\Psi$ 为凸函数. 假设 $f_1(\mathcal{X}) = \mathcal{S}_\Psi(\mathcal{X})$, $f_2(\mathcal{Y}) = \|\mathcal{Y}\|_{\text{TNN}}$, 及 $f_3(\mathcal{Z}) = \lambda \text{TTGV}_\alpha^2(\mathcal{Z})$, 且(10)约束可写为

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{I} \end{pmatrix} \mathcal{X} + \begin{pmatrix} -\mathcal{I} \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{Y} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathcal{I} \end{pmatrix} \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathcal{I}$ 为单位算子, 0为零张量. 函数 $f_1(\mathcal{X})$, $f_2(\mathcal{Y})$ 及 $f_3(\mathcal{Z})$ 均为凸函数, 问题(10)为(20)的一种特殊形式, 则由(10)经ADMM算法形成的算法1以线性速率收敛, 定理得证.

§4 数值实验

本节通过对彩图和灰度视频进行补全, 将本文提出的模型(TNN-TGV)与HaLRTC算法^[8], t-SVD方法^[12]和LRTV模型^[17]进行对比. 本文所有数值实验均在笔记本电脑(16GB)进行, 处理器为Intel(R) Core(TM) i5-12500H CPU@2.50 GHz, 软件平台为MATLAB R2021a. 本文采用峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)^[25]的数值大小来衡量张量补全效果. 通常情况下, 较好的图像补全效果对应着一个较高的PSNR和SSIM值.

4.1 彩色图像补全

本小节中, 分别针对5个彩色测试图像在不同采样率下进行张量补全, 并对其相应的效果进行对比. 所有彩色图像均可视为 $256 \times 256 \times 3$ 的三阶张量. 表1为四种方法在不同采样率下进行张量补全后的PSNR和SSIM数值对比结果, 其中最高数值用加粗字体标注. 从表1的数据可以得出, 在彩色图像补全实验中TNN-TGV取得了最高的PSNR值和SSIM值. 图1展示了四种方法在采样率为10%的情况下, 对所有测试图片的补全效果. 可以明显看出, TNN-TGV 对于全局和局部信息的补全效果均优于其他3种方法, 其补全得到的图像边缘和轮廓内部的光滑区域都是最接近于原图像的.

表1 HaLRTC, t-SVD, LRTV及TNN-TGV模型对于彩图在不同采样率下的补全效果对比

图像	采样率	10%		20%		30%		40%	
	方法	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
peppers	HaLRTC	18.02	0.4338	21.19	0.6001	24.01	0.7754	26.30	0.8490
	t-SVD	17.07	0.2450	20.51	0.4461	23.43	0.6104	25.90	0.7304
	LRTV	20.53	0.7016	24.33	0.8036	26.77	0.8730	28.84	0.9116
	TNN-TGV	21.85	0.7339	25.33	0.8511	27.80	0.9026	29.71	0.9316
lena	HaLRTC	20.44	0.5314	23.59	0.7064	26.04	0.8110	28.05	0.8704
	t-SVD	18.97	0.3515	22.60	0.5559	25.41	0.7028	27.90	0.8076
	LRTV	21.79	0.7168	25.82	0.8197	27.28	0.8751	29.61	0.9120
	TNN-TGV	23.27	0.7206	26.46	0.8315	28.81	0.8944	30.46	0.9246
ballon	HaLRTC	22.10	0.5994	26.24	0.7728	28.79	0.8489	31.05	0.8995
	t-SVD	20.07	0.3793	24.24	0.5913	27.36	0.7375	30.01	0.8381
	LRTV	25.41	0.7983	28.58	0.8586	30.58	0.8901	32.53	0.9157
	TNN-TGV	27.30	0.8239	29.65	0.8703	31.54	0.9019	33.40	0.9284
starfish	HaLRTC	17.19	0.3517	20.31	0.5754	22.49	0.7120	24.67	0.8117
	t-SVD	16.91	0.2959	20.67	0.5259	23.50	0.6855	26.48	0.8085
	LRTV	20.55	0.5949	23.19	0.7421	25.25	0.8291	27.12	0.8834
	TNN-TGV	22.36	0.6945	24.72	0.8040	26.41	0.8611	28.37	0.9069
baboon	HaLRTC	18.07	0.3272	20.16	0.4988	21.71	0.6231	23.11	0.7202
	t-SVD	17.10	0.2482	19.49	0.4262	21.29	0.5668	23.02	0.6804
	LRTV	19.83	0.4338	21.53	0.5901	22.87	0.6967	24.05	0.7202
	TNN-TGV	20.60	0.4948	21.97	0.6186	23.28	0.7153	24.52	0.7885

4.2 灰度视频补全

本小节针对3个不同规模的灰度视频图像进行补全, 每个视频均可看作为一个三阶张量. 表2列举了3个视频数据在不同采样率下的补全结果. 与其他方法相对比, 本文提出方法取得了最高的PSNR和SSIM数值结果. 视觉效果方面, 图2展示了4种方法对于视频图像stefan在不同采样率下某一帧的补全效果. 同样可以看出, TNN-TGV模型不仅可以补全丢失信息, 又能较为准确的保持全局和局部信息, 获得最优质的补全效果. 图3中的折线图表示采样率10%情况下, 对视频stefan补全的每一帧的PSNR和SSIM值. 很明显, 对于视频每一帧图像的补全效果中, 本文方法均取得最高数值. 图4为针对视频图像suzie在采样率10%的条件下, 原视频与4种不同补全方法恢复得到的视频沿着某一个管纤维的像素值, 由此图可以看出, 使用本文提出的方法恢复得到的视频像素值是最接近于原像素值的.

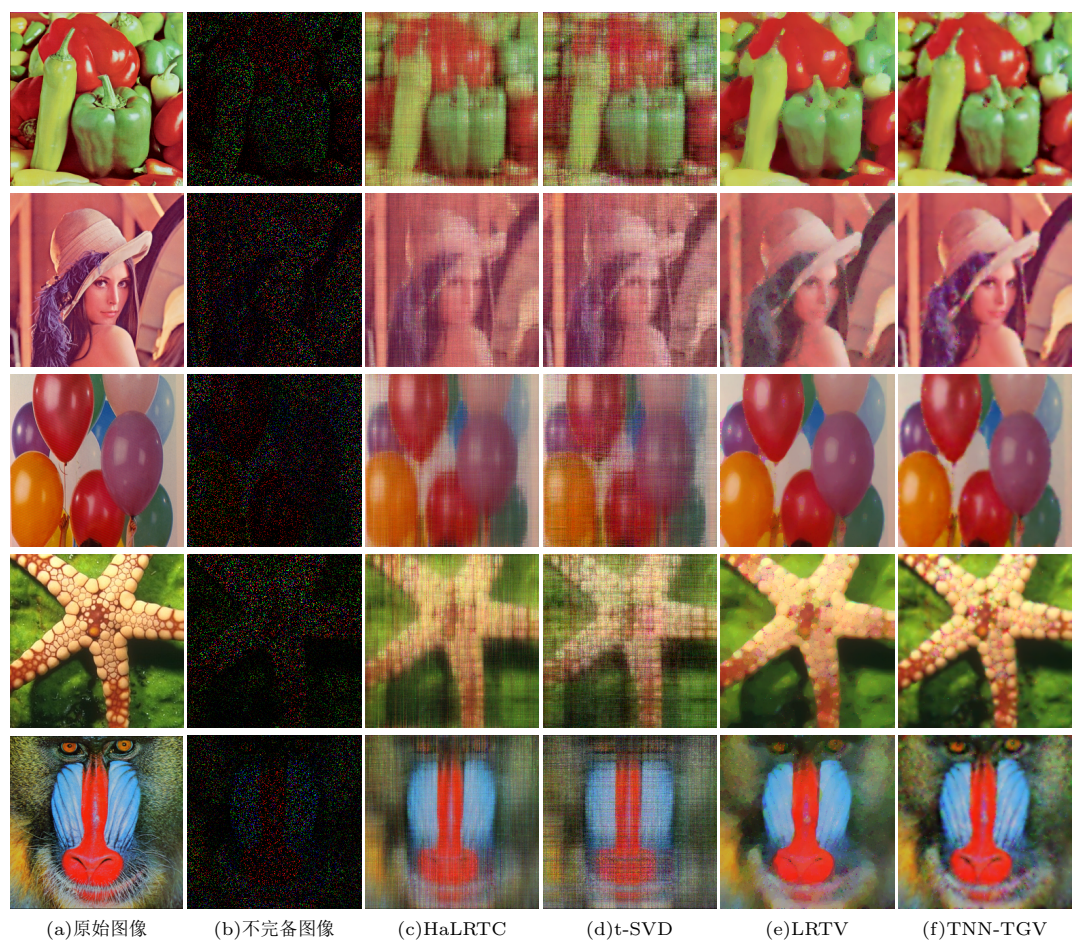


图1 采样率10%情况下, 不同方法针对彩色图像的补全效果

表2 HaLRTC, t-SVD, LRTV及TNN-TGV模型对于灰度视频在不同采样率下的补全效果对比

视频	采样率	10%		20%		30%		40%	
	方法	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
bus 256 × 256 × 30	HaLRTC	18.07	0.4342	19.99	0.5757	21.67	0.6818	23.25	0.7661
	t-SVD	19.69	0.3996	20.31	0.5144	22.45	0.5993	24.21	0.7100
	LRTV	18.66	0.4840	20.81	0.6314	22.25	0.7346	23.68	0.8117
	TNN-TGV	19.80	0.5284	21.33	0.6615	22.80	0.7611	24.33	0.8333
stefan 288 × 352 × 20	HaLRTC	18.55	0.4876	20.11	0.6156	21.64	0.7179	23.25	0.7994
	t-SVD	18.95	0.3987	20.47	0.5281	22.01	0.6385	23.66	0.7317
	LRTV	19.18	0.5599	21.37	0.7030	23.16	0.7990	24.86	0.8652
	TNN-TGV	20.28	0.6077	22.10	0.7361	23.77	0.8211	25.42	0.8795
suzie 144 × 176 × 75	HaLRTC	23.34	0.6966	26.11	0.7726	28.77	0.8589	31.05	0.9108
	t-SVD	26.61	0.7113	29.40	0.8062	31.45	0.8636	33.24	0.9028
	LRTV	26.41	0.7805	29.97	0.8689	32.20	0.9112	33.13	0.9384
	TNN-TGV	28.77	0.8438	31.05	0.8990	33.43	0.9287	35.10	0.9488

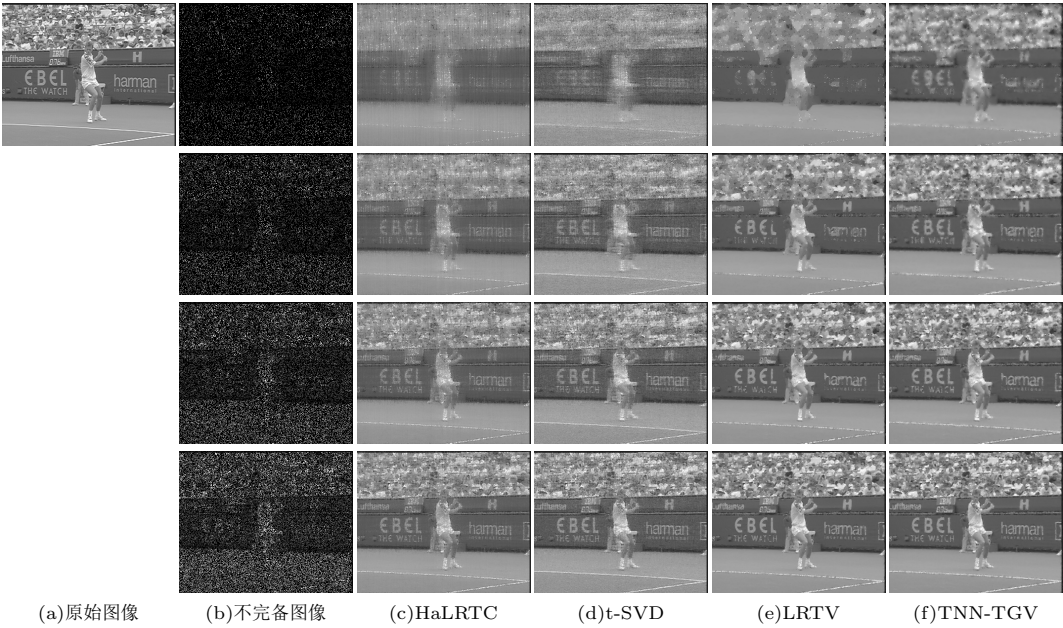


图2 不同采样率下, 视频stefan的补全效果, 自上而下采样率分别为10%, 20%, 30%及40%

4.2 收敛性行为与参数设置

以视频stefan为例, 图5展示了视频在不同采样率下待补全张量 $\mathcal{X}$ 在迭代过程中相对误差的变化情况. 由图5可得待求张量 $\mathcal{X}$ 的相对误差 $\frac{\|\mathcal{X}_{k+1}-\mathcal{X}_k\|_F}{\|\mathcal{X}_k\|_F}$ 在迭代过程中大体上保持单调下降的趋势, 直至收敛至给定的误差限.

本文提出的算法的停止准则为当迭代次数达到最大迭代次数 $N_{\max} = 500$, 或者 $\mathcal{X}$ 的相对误差满足 $\frac{\|\mathcal{X}_{k+1}-\mathcal{X}_k\|_F}{\|\mathcal{X}_k\|_F} \leq 10^{-5}$. (8)式中正则化参数 λ 用于权衡保真项和正则项的权重比例, 实验中的最佳参数 λ 可取值于区间 $[0.1, 0.6]$, 步长为0.1. 正则项 $\text{TTGV}_{\alpha}^2(\mathcal{X})$ 内部参数 α_0 与 α_1 用于平衡一阶TV和二阶TV的比重, 一般设置为 $\alpha_0 = 1.0, \alpha_1 = 1.5$. 三种对比方法的参数均按照文献中建议的方式取值.

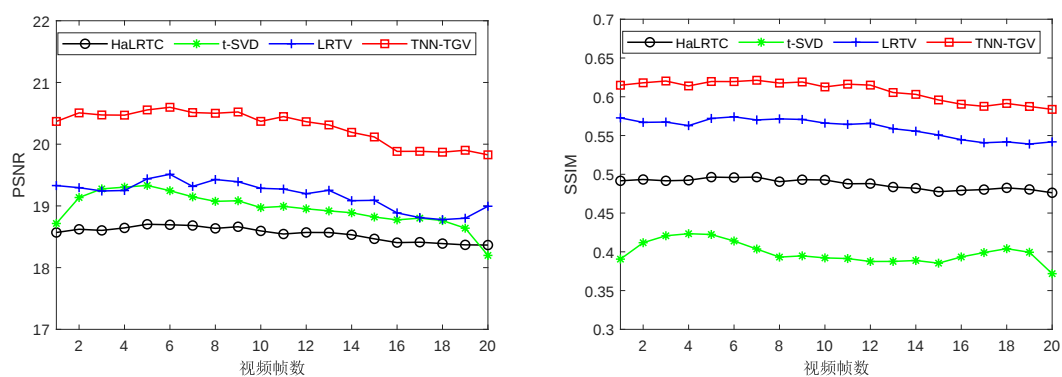


图3 不同方法对采样率为10%情况下视频stefan的补全结果的每一帧PSNR和SSIM 值

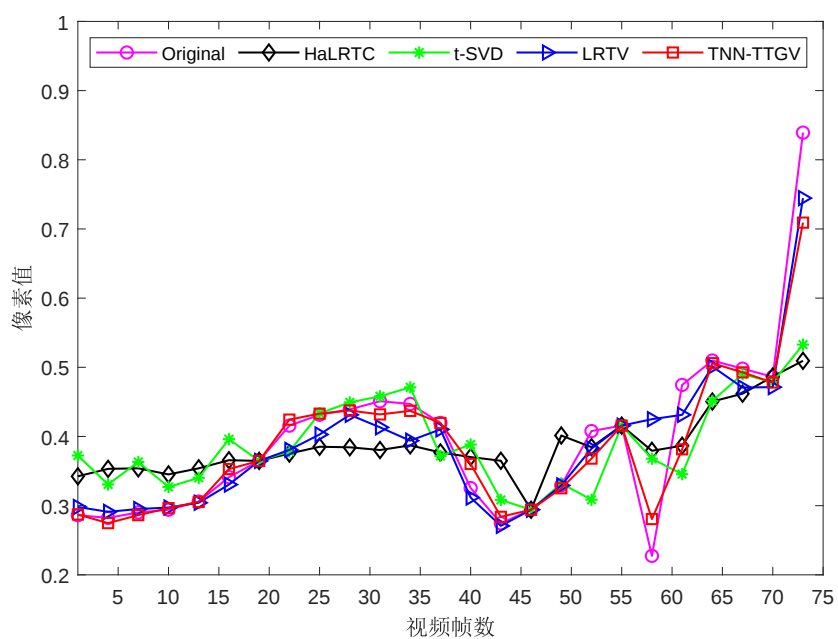


图4 采样率为10%情况下, 原视频suzie与不同补全方法恢复得到的管纤维像素值

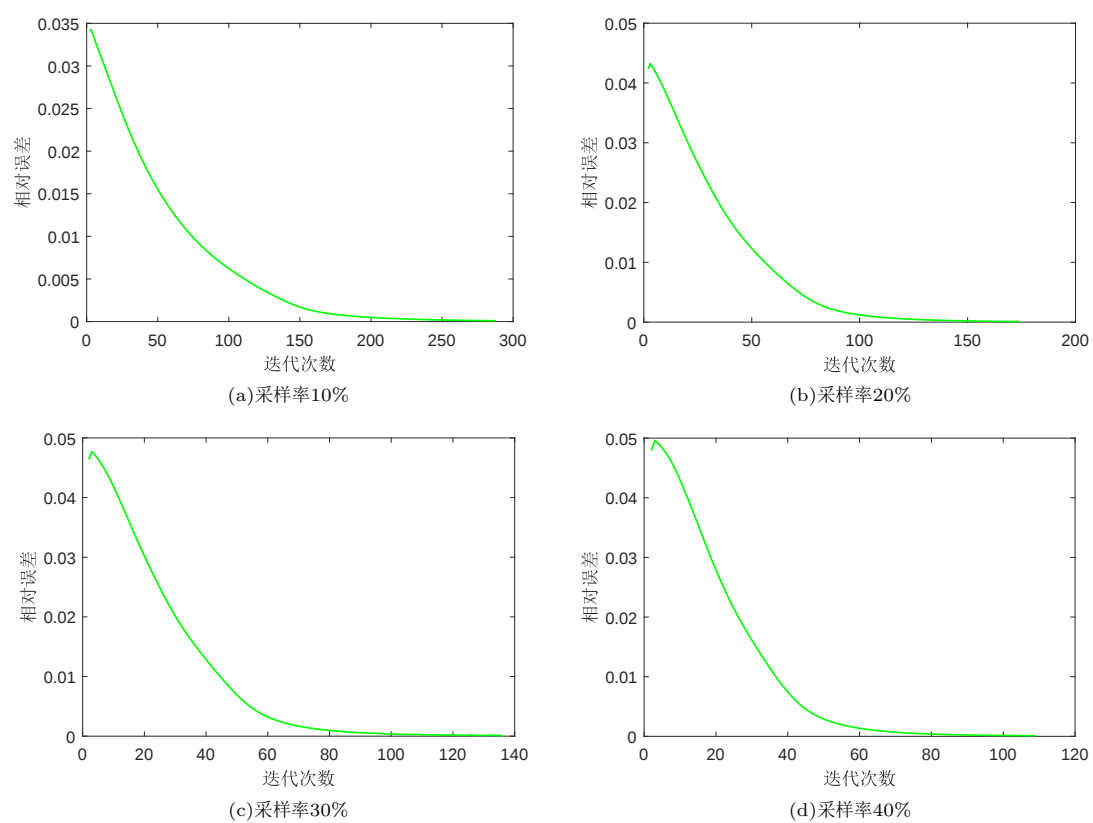


图5 视频stefan在不同采样率下 $\mathcal{X}$ 的相对误差随迭代次数的变化曲线

§5 总结

本文提出了一种张量广义全变分正则的定义, 并给出了最小化张量核范数与广义全变分的张量补全模型. 模型中张量核范数用于获取图像的全局低秩先验信息, 张量广义全变分即可保持图像的局部特征, 对保持图像的边缘也具有很大的作用, 且可有效解决传统TV引起的“阶梯效应”. 本文使用经典的ADMM算法求解模型, 并给出了算法的收敛性分析. 针对彩色图像和灰度视频的实验结果表明, 本文提出的张量补全模型在图像恢复中取得了较好的实验效果.

致谢 本文是作者在南开大学数学科学学院访问学习期间完成的, 感谢杨庆之教授对本文提出的宝贵修改意见.

参考文献:

- [1] Zhao Xile, Xu Wenhao, Jiang Taixiang, et al. Deep plug-and-play prior for low-rank tensor completion[J]. *Neurocomputing*, 2020, 400: 137-149.
- [2] Sidiropoulos N D, Lathauwer L D, Fu Xiao, et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(13): 3551-3582.
- [3] Signoretto M, Dinh Q T, Lathauwer L D, et al. Learning with tensors: a framework based on convex optimization and spectral regularization[J]. *Machine Learning*, 2014, 94: 303-351.
- [4] Hillar C J, Lim L H. Most tensor problems are NP-hard[J]. *Journal of the ACM (JACM)*, 2013, 60(6): 1-39.
- [5] Yang Yuning. The epsilon-alternating least squares for orthogonal low-rank tensor approximation and its global convergence[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2020, 41(4): 1797-1825.
- [6] Zeng Chao, Ng M K. Incremental CP tensor decomposition by alternating minimization method[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2021, 42(2): 832-858.
- [7] Xu Ting, Huang Tingzhu, Deng Liangjian, et al. Hyperspectral image superresolution using unidirectional total variation with tucker decomposition[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2020, 13: 4381-4398.
- [8] Liu Ji, Musialski P, Wonka P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, 35(1): 208-220.
- [9] Braman K. Third-order tensors as linear operators on a space of matrices[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2010, 433(7): 1241-1253.
- [10] Kilmer M E, Braman K, Hao Ning, et al. Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, 34(1): 148-172.
- [11] Lu Canyi, Feng Jiashi, Chen Yudong, et al. Tensor robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank tensors via convex optimization[C]//*Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2016: 5249-5257.
- [12] Zhang Zeming, Aeron S. Exact tensor completion using t-SVD[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 65(6): 1511-1526.
- [13] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20: 89-97.
- [14] Ji Tengyu, Huang Tingzhu, Zhao Xile, et al. Tensor completion using total variation and low-rank matrix factorization[J]. *Information Sciences*, 2016, 326: 243-257.
- [15] Ding Meng, Huang Tingzhu, Ji Tengyu, et al. Low-rank tensor completion using matrix factorization based on tensor train rank and total variation[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 81: 941-964.

- [16] Jia Zhigang, Ng M K, Wang Wei. Color image restoration by saturation-value total variation[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2019, 12(2): 972-1000.
- [17] Yokota T, Hontani H. Simultaneous tensor completion and denoising by noise inequality constrained convex optimization[J]. IEEE Access, 2019, 7: 15669-15682.
- [18] Bredies K, Kunisch K, Pock T. Total generalized variation[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2010, 3(3): 492-526.
- [19] Feng Wensen, Lei Hong, Gao Yang. Speckle reduction via higher order total variation approach[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(4): 1831-1843.
- [20] Shama Muga, Huang Tingzhu, Liu Jun, et al. A convex total generalized variation regularized model for multiplicative noise and blur removal[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 276: 109-121.
- [21] Knoll F, Hammernik K, Zhang Chi, et al. Deep-learning methods for parallel magnetic resonance imaging reconstruction: A survey of the current approaches, trends, and issues[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2020, 37(1): 128-140.
- [22] He Bingsheng, Yuan Xiaoming. Block-wise alternating direction method of multipliers for multiple-block convex programming and beyond[J]. The SIAM Journal of Computational Mathematics, 2015, 1: 145-174.
- [23] Lu Canyi, Feng Jiashi, Chen Yudong, et al. Tensor Robust Principal Component Analysis with A New Tensor Nuclear Norm[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2020, 42(4): 925-938.
- [24] Hong Mingyi, Luo Zhiqian. On the linear convergence of the alternating direction method of multipliers.[J]. Mathematical Programming, 2017, 162(1): 165-199.
- [25] Wang Zhou, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13 (4): 600-612.

Tensor completion model and algorithm based on tensor nuclear norm and total generalized variation regularization

XU Zhi, WANG Chuan-long

- (1. School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China;
- 2. Shanxi Key Laboratory for Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China)

Abstract: To overcome the staircase effect caused by total variation (TV) regularization in image completing processing, this article introduces the definition of tensor total generalized variation (TTGV) regularization, and proposes a tensor completion model based on tensor nuclear norm (TNN) and TTGV. The alternating direction method of multipliers (ADMM) algorithm is used to transform the original problem into several subproblems for easily solving. The algorithm framework and convergence analysis of this model is presented. The proposed algorithm and other three comparison methods are employed to complete color images and gray videos with different sampling rates. Sufficient numerical experiments prove that the algorithm proposed by this article performs better than the compared models in the aspects of vision and quality.

Keywords: tensor singular value decomposition; tensor nuclear norm; tensor total generalized variation regularization; Tensor completion; the alternating direction method of multipliers algorithm

MR Subject Classification: 65D18; 65K10