

具有季节性影响的营养盐-浮游植物模型的稳定性分析

李成宇¹, 杨洪^{1,2*}, 杨宇翔¹

(1. 江苏海洋大学 理学院, 江苏连云港 222005;

2. 江苏海洋大学 江苏省海洋资源开发研究院, 江苏连云港 222005)

摘要: 该文研究具有季节周期性影响的营养盐-浮游植物生态系统的最终有界性、强持续生存性和稳定性. 首先, 考虑季节性影响的连续化, 证明了非自治系统解的正性和最终有界性. 其次, 给出非自治系统解的一致强持续生存性和全局稳定性的充分条件. 最后, 对该系统参数选取合适的数值, 仿真一致强持续生存性和全局稳定性, 并分析了季节性强度控制常数和浮游植物释放毒素毒性振幅控制常数对营养盐-浮游植物系统的影响.

关键词: 富营养化; 浮游生物模型; 非自治系统; 全局稳定性

中图分类号: O175.13

文献标识码: 文章编号: 1000-4424(2025)03-0305-10

§1 引言

在水生环境的食物链中, 浮游植物作为生产者, 并将水体中的营养转化为生物化学能的形式固定下来, 固定的能量约占第一营养级总和的40%^[1], 其中约有7%会导致水体富营养化^[2]. 近年来, 由于工业化、城市化, 导致有利于浮游植物生长的营养物排放增加, 特别是长江中下游地区的绝大部分湖泊已经处于富营养化或者正在富营养化中^[3-4]. 因此, 水体富营养化会影响鱼类的生长、产生毒素污染、影响居民供水和旅游业发展等^[5-7].

对于水体富营养化现象, 许多学者通过建立数学模型进行研究, 从模型构建方法上, 可以分为三种机制: 自底向上型^[8-13]、自顶向下型^[14-16]和两者兼顾型^[17-19]. 比如, Huppert等人^[8]通过

收稿日期: 2023-10-26 修回日期: 2024-03-31

*通讯作者, E-mail: yanghonghit@163.com

基金项目: 江苏省科技协会智库项目(JSKX0125034); 中国博士后基金(2020M681521); 江苏省创新创业训练计划(202211641079Y; 202311641064Y); 江苏省博士后项目(2021K456C); 连云港市博士后项目(LYG20210012); 江苏省海洋生物资源与环境重点实验室开放课题(SH20201209); 国家自然科学基金(72174079)

自底向上方法, 构建了一个营养盐-浮游植物模型

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a - bNP - eN, \\ \frac{dP}{dt} = cNP - dP, \end{cases}$$

其中 N , P 分别表示水下生态系统中的营养盐浓度和浮游植物种群密度. 通过分析发现, 营养物质浓度超过一定水平就会产生水华现象. 2005年, Huppert等人^[10]在文献[8]的基础之上考虑了季节性影响, 引入了季节性周期函数 $\beta(t)$, 具体形式为

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a - b\beta(t)NP - eN, \\ \frac{dP}{dt} = c\beta(t)NP - dP, \end{cases}$$

其中

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta^+ = 1 + \delta_1, & \text{活跃季节(High Season)} \\ \beta^- = 1 - \delta_1, & \text{不活跃季节(Low Season)} \end{cases} \quad (1)$$

他们发现含有季节因素的模型具有跳跃现象, 同时水体的富营养化会被抑制. Chakraborty等人^[11]也通过自底向上的方法构建模型, 并在文献[10]的基础上考虑了浮游植物的毒素影响, 选取了毒性周期函数 $\theta(t)$, 具体形式为

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a - bNP - eN, \\ \frac{dP}{dt} = cNP - dP - \frac{\theta(t)P^2}{\mu^2 + P^2}. \end{cases}$$

这里

$$\theta(t) = \lambda(1 - \delta \sin(\omega t)).$$

并且为了模拟富营养化的跳跃现象, 保留了不连续的 $\beta(t)$ 函数, 同时发现在浮游植物动力学中, 毒素影响是不能被忽略的. 由于 $\beta(t)$ 函数的不连续性, Chakraborty等人^[11]并未分析含有该项模型的稳定性. 因此, 大多数的研究者考虑季节性影响时都考虑它的不连续性, 很少在研究中把这种影响连续化. 于是, 下面Chakraborty等人^[11]研究的模型

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a - \frac{bNP}{N + \gamma} - eN, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{cNP}{N + \gamma} - dP - \frac{\theta P^2}{\mu^2 + P^2} \end{cases}$$

为基础, 考虑季节因素的影响, 并且浮游植物生长过程中不需要吸收太多的营养盐, 同时考虑Holling II型功能反应函数, 提出营养盐-浮游植物动力学模型

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a - \frac{b\beta(t)NP}{N + \gamma} - eN, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{c\beta(t)NP}{N + \gamma} - dP - \frac{\theta(t)P^2}{\mu^2 + P^2}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 N , P 分别表示水下生态系统中的营养盐浓度和浮游植物种群密度. 系统(2)满足初始条件

$$N(t_0) = N_0 > 0, P(t_0) = P_0 > 0. \quad (3)$$

函数 $\beta(t)$ 和 $\theta(t)$ 是时间周期函数, 时间 t 以年为单位, 于是 $\omega = 2\pi$. 其余参数均为正常数, 具体的生物学意义见表1.

本文旨在保留跳跃现象前提下, 解决 $\beta(t)$ 函数的不连续性问题, 在数值上等效的情况下,

表 1 模型(2)参数的生物意义

符号	含义
a	持续的外界营养流入量
b	最大营养吸收率
c	最大营养转化率
d	平均死亡率
e	平均营养流失率
γ	半饱和常数
μ	半饱和常数
δ_1	季节性强度控制常数
δ_2	毒性振幅控制常数
λ	毒性均值控制常数
ω	季节频率
τ	季节周期
$\beta(t)$	季节性周期函数
$\theta(t)$	毒性周期函数

对 $\beta(t)$ 函数进行Fourier展开, 使得 $\beta(t)$ 函数连续化, 并在Chakraborty等人^[11]的基础上对系统进行研究和分析. 于是, 在(1)的基础上, 对季节性周期函数 $\beta(t)$ Fourier连续化形如

$$\beta(t) = 1 + \frac{4\delta_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\omega t]}{2n-1}. \quad (4)$$

其中 $0 < \delta_1 < 1$. 对于毒性周期函数 $\theta(t)$, 直接选取Chakraborty等人^[11]提供的形式, 具体为

$$\theta(t) = \lambda(1 - \delta_2 \sin(\omega t)), \quad (5)$$

其中 $0 < \delta_2 < 1$.

为了之后证明的方便, 引入以下记号.

对于 $[0, +\infty)$ 上的有界连续函数 $f(x)$,

$$f^s = \sup_{[0, +\infty)} f(x) = \max_{[0, +\infty)} f(x), \quad f^i = \inf_{[0, +\infty)} f(x) = \min_{[0, +\infty)} f(x).$$

对于具有 n 个种群的动力系统

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(t, \mathbf{x}(t)), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \geq 0$, 每个 $x_i(t)$ 表示第 i 个种群在时刻 t 的种群数量(种群密度), $f(t, \mathbf{x}(t)) = (f_1[t, x_1(t)], f_2[t, x_2(t)], \dots, f_n[t, x_n(t)])$ 是 n 维连续向量函数.

定义1 若存在常数 $m > 0$, 使得对系统(6)每一个解 $\mathbf{x}(t)$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf x_i(t) > m, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

则称种群 x_i 是一致强持续生存的.

§2 系统解的性质

定理2.1 在初始条件(3)下, 则 $\forall t \geq t_0$, 系统(2)的解 $N(t) > 0, P(t) > 0$, 并且最终有界.

证 对于 $N(t)$ 来说, 当 $N(t_0) > 0$ 时, 由方程(2)得

$$N(t) = \left\{ \exp \int_{t_0}^t \left(\frac{b\beta(t)P(t)}{N(t) + \gamma} + e \right) dt \right\} \cdot \left\{ N(t_0) + a \int_{t_0}^t \exp \left[- \int_{\xi}^t (b\beta(t) \frac{P(t)}{N(t) + \gamma} + e) dt \right] d\xi > 0. \right.$$

由上式可知, 对于 $\forall t \geq t_0$, 有 $N(t) > 0$.

对于 $P(t)$ 来说, 利用反证法, 证明 $P(t)$ 的正性. 假设存在某一时刻 T_0 , 使得 $P(T_0) = 0$. 当 $t_0 \leq t \leq T_0$ 时, 由方程(2)有

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = c\beta(t) \frac{N(t)}{N(t) + \gamma} - d - \theta(t) \frac{P(t)}{\mu^2 + P(t)^2}.$$

由 $c\beta(t) \frac{N(t)}{N(t) + \gamma} > 0$ 和 $\theta(t) = \lambda(1 - \delta_2 \sin(\omega t)) \leq \lambda(1 + \delta_2)$ 得

$$\frac{P'(t)}{P(t)} \geq -d - \lambda(1 + \delta_2) \frac{P(t)}{\mu^2 + P(t)^2},$$

在 $t_0 < t < T_0$ 上积分得

$$P(T_0) \geq P(t_0) e^{-\int_{t_0}^{T_0} [d + \lambda(1 + \delta_2) \frac{P(\xi)}{\mu^2 + P(\xi)^2}] d\xi} > 0. \quad (7)$$

由式(7)得 $P(T_0) > 0$, 与假设 $P(T_0) = 0$ 矛盾, 所以假设不成立. 即对于 $\forall t \geq t_0$, 有 $P(t) > 0$.

构造函数 $W(t) = N(t) + \frac{b}{c}P(t)$, 若 $W(t)$ 有上界, 且满足解的正性, $N(t), P(t)$ 有上界. 由系统(2)可知

$$W'(t) = N'(t) + \frac{b}{c}P'(t) = a - eN(t) - \frac{db}{c}P(t) - F(t),$$

其中

$$F(t) = \frac{b}{c} \lambda(1 - \delta_2 \sin(\omega t)) \frac{P(t)^2}{\mu^2 + P(t)^2}.$$

令 $\eta = \min\{e, d\}$, 整理得

$$W'(t) = N'(t) + \frac{b}{c}P'(t) \leq a - \eta W(t) - F(t).$$

在初始条件(3)下, $W(t_0) = N(t_0) + \frac{b}{c}P(t_0) > 0$, 利用比较原理可得

$$W(t) \leq W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \eta dt} + \int_{t_0}^t [a - F(v)] e^{-\int_{\xi}^t \eta dv} d\xi \leq \frac{M_{aF}}{\eta} - (\frac{M_{aF}}{\eta} - W(t_0)) e^{-\int_{t_0}^t \eta dt}. \quad (8)$$

这里 M_{aF} 为函数 $a - F(t), t \geq t_0$ 的上界. 因此 $P(t), N(t)$ 是最终有界的.

§3 系统持久性和稳定性

定理3.1 若系统(2)满足

$$c\beta^i \frac{N^i}{N^i + \gamma} > d, \quad a > b\beta^s P^s, \quad (9)$$

则系统(2)的解 N, P 是一致强持续的.

证 对于系统(2)来说, 根据解的正性, 有

$$\frac{dN}{dt} \leq a - eN,$$

可知当 $0 < N(t_0) \leq \frac{a}{e} = N^s$ 时, 有 $N(t) \leq \frac{a}{e}$, 对一切 $t \geq t_0$.

设 $W = N + \frac{b}{c}P$, 于是

$$\dot{W} = a - eN - \frac{bd}{c}P - \frac{b}{c} \cdot \frac{\theta P^2}{\mu^2 + P^2}. \quad (10)$$

令 $k = \min\{e, d\}$, 由于解的正性, 于是对于(10)有

$$\dot{W} + kW \leq a,$$

得到 $W \leq \frac{a}{k}$, 对一切 $t \geq t_0$. 于是 $\frac{b}{c}P \leq \frac{a}{k}$, 即 $\forall t \geq t_0, P \leq \frac{ac}{kb} = \tilde{P}$. 另外

$$\frac{dP}{dt} \leq \left[c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} - d \right] P - \theta^i \frac{P^2}{\mu^2 + P^2} \leq \left[c\beta^s \frac{N^s}{N^s + r} - d \right] P - \theta^i \frac{P^2}{\mu^2 + \tilde{P}^2} =$$

$$P \left[c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} - d - \frac{\theta^i}{\mu^2 + \tilde{P}^2} P \right].$$

当 $c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} - d \geq 0$, 即 $\frac{\left(c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} - d \right) (\mu^2 + \tilde{P}^2)}{\theta^i} > 0$, 则当

$$0 < P(t_0) < \frac{(c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} - d)(\mu^2 + \tilde{P}^2)}{\theta^i} = P^s$$

时可知, $\forall t \geq t_0, P(t) \leq P^s$. 再由 $\frac{dN}{dt} \geq a - b\beta^s P^s - eN$, 记 $\tilde{a} = a - b\beta^s P^s$, 知 $N(t) \geq$

$N(t_0)e^{-et} + \frac{\tilde{a}}{e} > \frac{\tilde{a}}{e} = N^i$. 并且

$$\frac{dP}{dt} \geq \left[c\beta^i \frac{N^i}{N^i + \gamma} - d \right] P - \theta^s \frac{P^2}{\mu^2 + P^2} \geq \left[c\beta^i \frac{N^i}{N^i + r} - d \right] P - \theta^s \frac{P^2}{\mu^2} =$$

$$P \left[c\beta^i \frac{N^i}{N^i + \gamma} - d - \frac{\theta^s}{\mu^2} P \right].$$

于是当 $P(t_0) \geq \frac{\theta^s}{\mu^2} \cdot (c\beta^i \frac{N^i}{N^i + \gamma} - d) = P^i$ 时, 则 $\forall t \geq t_0, P(t) \geq P^i$. 综上所述, 有 $N^i \leq N \leq N^s$ 和 $P^i \leq P \leq P^s$, 由定义1可知, 系统(2)是一致强持续生存的.

容易得出系统(2)存在半平凡平衡点 $E_0(\frac{a}{e}, 0)$, 为了寻找正平衡解 $E_*(t) = (N_*(t), P_*(t))$, 可以得出以下结论.

引理3.1 当系统(2)满足条件

$$\frac{ad + ed\gamma}{ac} < \beta^i, \quad (11)$$

则系统(2)存在正平衡解 $E_*(t)$.

证 寻找正平衡解 $E_*(t) = (N_*(t), P_*(t))$, 需求解方程

$$\begin{cases} F_1 = a - b\beta(t) \frac{N_* P_*}{N_* + \gamma} - eN_* = 0, \\ F_2 = c\beta(t) \frac{N_* P_*}{N_* + \gamma} - dP_* - \theta(t) \frac{P_*^2}{\mu^2 + P_*^2} = 0. \end{cases}$$

解方程 $F_1 = 0$, 可得 $P_* = \frac{(a - eN_*)(N_* + \gamma)}{b\beta(t)N_*}$, 为了使得 $P_* > 0$, 需要 $N_* < \frac{a}{e}$. 代入方程 $F_2 = 0$ 得

$$S(N_*) = \frac{c}{b} - \frac{d(N_* + \gamma)}{b\beta(t)N_*} - \frac{\theta(t)(a - eN_*)(N_* + \gamma)^2}{b^2\beta^2(t)N_*^2\mu^2 + (a - eN_*)^2(N_* + \gamma)^2} = 0.$$

$\lim_{N_* \rightarrow 0^+} S(N_*) = -\infty$, 若 $S\left(\frac{a}{e}\right) > 0$, 即 $\frac{ad + ed\gamma}{ac} < \beta^i$, 则根据零点定理可知, 方程 $S(N_*) = 0$ 在区间 $(0, \frac{a}{e})$ 内至少存在一个正根.

定理3.2 在条件(11)下, 系统(2)满足

$$\frac{a}{N^{s2}} > \frac{\beta^s(bP^s - c\gamma)}{(N^i + \gamma)^2}, \quad \mu^2 > P^{s2}. \quad (12)$$

则系统(2)正平衡解 $E_*(t)$ 是全局稳定的.

证 下面用Lyapunov第二方法, 证明系统(2)关于正平衡解 $E_*(t)$ 是全局稳定的.

令 $\bar{N}(t) = \ln N(t)$, $\bar{P}(t) = \ln P(t)$, $\bar{N}_*(t) = \ln N_*(t)$, $\bar{P}_*(t) = \ln P_*(t)$, 由系统(2)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\bar{N} - \bar{N}_*) &= \frac{a}{N} - \frac{a}{N_*} - b\beta(t) \left(\frac{P}{N + \gamma} - \frac{P_*}{N_* + \gamma} \right) = \\ &= -\frac{a}{NN_*}(N - N_*) - \frac{b\beta(t)}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)}[PN_* - P_*N + \gamma(P - P_*)] = \\ &= -\frac{a}{NN_*}(N - N_*) - \frac{b\beta(t)}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)}[-P(N - N_*) + (N + \gamma)(P - P_*)] = \\ &= \left[\frac{b\beta(t)P}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)} - \frac{a}{NN_*} \right] (N - N_*) - \frac{b\beta(t)}{N_* + \gamma}(P - P_*), \\ \frac{d}{dt}(\bar{P} - \bar{P}_*) &= c\beta(t) \left[\frac{N}{N + \gamma} - \frac{N_*}{N_* + \gamma} \right] - \theta(t) \left(\frac{P}{\mu^2 + P^2} - \frac{P_*}{\mu^2 + P_*^2} \right) = \\ &= \frac{c\beta(t)}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)}\gamma(N - N_*) - \frac{\theta(t)(\mu^2 P - \mu^2 P_* - PP_*(P - P_*))}{(\mu^2 + P^2)(\mu^2 + P_*^2)} = \\ &= \frac{c\beta(t)\gamma}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)}(N - N_*) - \frac{\theta(t)(\mu^2 - PP_*)}{(\mu^2 + P^2)(\mu^2 + P_*^2)}(P - P_*). \end{aligned}$$

考虑Lyapunov函数 $V(t) = |\bar{N}(t) - \bar{N}_*(t)| + |\bar{P}(t) - \bar{P}_*(t)|$, $t \geq 0$. 沿着系统(2)的轨线计算 $V(t)$ 的右导数有

$$\begin{aligned} D^+V(t) &\leq D^+|\bar{N}(t) - \bar{N}_*(t)| + D^+|\bar{P}(t) - \bar{P}_*(t)| = \\ &= \frac{\bar{N}(t) - \bar{N}_*(t)}{|\bar{N}(t) - \bar{N}_*(t)|} \frac{d}{dt}(\bar{N} - \bar{N}_*) + \frac{\bar{P}(t) - \bar{P}_*(t)}{|\bar{P}(t) - \bar{P}_*(t)|} \frac{d}{dt}(\bar{P} - \bar{P}_*) \leq \\ &= -\left[\frac{a}{NN_*} - \frac{b\beta(t)P}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)} - \frac{c\beta(t)\gamma}{(N + \gamma)(N_* + \gamma)} \right] |N(t) - N_*(t)| - \\ &= \left[\frac{b\beta(t)}{N_* + \gamma} + \frac{\theta(t)(\mu^2 - PP_*)}{(\mu^2 + P^2)(\mu^2 + P_*^2)} \right] |P(t) - P_*(t)| \leq \\ &= -\left[\frac{a}{N^{s^2}} - \frac{\beta^s(bP^s - c\gamma)}{(N^i + \gamma)^2} \right] |N(t) - N_*(t)| - \\ &= \left[\frac{b\beta^i}{N^s + \gamma} + \frac{\theta^i(\mu^2 - P^{s^2})}{(\mu^2 + P^{s^2})^2} \right] |P(t) - P_*(t)| \leq \\ &= -\alpha\{|N(t) - N_*(t)| + |P(t) - P_*(t)|\}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\alpha = \min \left\{ \frac{a}{N^{s^2}} - \frac{\beta^s(bP^s - c\gamma)}{(N^i + \gamma)^2}, \frac{b\beta^i}{N^s + \gamma} + \frac{\theta^i(\mu^2 - P^{s^2})}{(\mu^2 + P^{s^2})^2} \right\} > 0.$$

要保证 $\alpha > 0$, 需满足

$$\frac{a}{N^{s^2}} > \frac{\beta^s(bP^s - c\gamma)}{(N^i + \gamma)^2}, \quad \mu^2 > P^{s^2}.$$

由(13)式得 $V(t) + \alpha \int_0^t (|N(s) - N_*(s)| + |P(s) - P_*(s)|)ds \leq V(0) < +\infty$, 因此

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \int_0^t (|N(s) - N_*(s)| + |P(s) - P_*(s)|)ds \leq \frac{V(0)}{\alpha} < +\infty,$$

故有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |N(t) - N_*(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |P(t) - P_*(t)| = 0,$$

则系统(2)是全局稳定的.

§4 数值模拟

选取参数值如表2并且 $\omega = 2\pi, \tau = 1$, 并计算条件(9), (11)和(12)的参数值进行数值模拟.

表 1 数据模拟的参数取值

符号	含义	数值	参考文献
a	持续的外界营养流入量	$0.075\text{g}/\text{m}^3$	[8]
b	最大营养吸收率	$1.0\text{m}^3/(\text{g} \cdot \text{年})$	[8]
c	最大营养转化率	$1.0\text{m}^3/(\text{g} \cdot \text{年})$	[8]
d	平均死亡率	$0.1/\text{年}$	[8]
e	平均营养流失率	$0.3/\text{年}$	[8]
γ	半饱和常数	$0.035\text{g}/\text{m}^3$	[15]
μ	半饱和常数	$0.035\text{g}/\text{m}^3$	[15]
δ_1	季节性强度控制常数	0.1	[10]
δ_2	毒性振幅控制常数	0.1	[11]
λ	毒性均值控制常数	$0.2/\text{年}$	[11]

首先, 计算定理3.1中定义的营养盐浓度和浮游植物种群密度的上界和下界.

$$N^s = 0.2500, P^s = 0.0061, N^i = 0.2278, P^i = 0.0038.$$

其次, 验证条件(9).

$$c\beta^i \frac{N^i}{N^i + \gamma} = 0.7801 > 0.1 = d, \quad a = 0.075 > 0.0067 = b\beta^s P^s,$$

$$c\beta^s \frac{N^s}{N^s + \gamma} = 0.9649 < 2.6714 = d + \frac{\theta^i}{2\mu}.$$

接着, 验证条件(11).

$$\frac{ad + ed\gamma}{ac} = 0.1140 < 0.9000 = \beta^i.$$

最后验证条件(12).

$$\frac{a}{N^s{}^2} = 1.2000 > -0.4610 = \frac{\beta^s(bP^s - c\gamma)}{(N^i + \gamma)^2},$$

$$\mu^2 = 0.0012 > 0.000036758 = P^s{}^2.$$

故所取参数满足条件(9), (11), (12).

首先观察在不同初值下的最终有界性和一致强持续生存性, 初值为 $N(0) = 0.236$ 和 $P(0) = 0.0048$, $\beta(t)$ 选取为函数(4), 系统(2)具体数值模拟如图1. 可以看出, 数值模拟的结果满足最终有界性和一致强持续生存性.

另外, 对于函数

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta^+ = 1 + \delta_1, & \text{活跃季节(High Season)} \\ \beta^- = 1 - \delta_1 & \text{不活跃季节(Low Season)} \end{cases}$$

不连续的情况也进行了数值模拟, 初值为 $N(0) = 0.236$ 和 $P(0) = 0.0048$, 如图2. 可以看出, 图2中 $\beta(t)$ 选取不连续函数, 与图1中选取 $\beta(t)$ 连续性相比较, 数值模拟的结果也与几乎完全相同.

下面观察季节性影响, 函数 $\beta(t)$ 在不同的 δ_1 情况下的表现, 如图3. 可以看出随着 δ_1 不断增大, 季节性影响也不断增大. 且围绕若无季节影响曲线($\delta_1 = 0$)上下波动.

最后观察毒性影响函数 $\theta(t)$ 在不同的 δ_2 情况下的表现, 如图4. 可以看出随着 δ_2 不断增大, 毒性影响也不断增大, 且围绕若无毒性影响曲线($\delta_2 = 0$)上下波动.

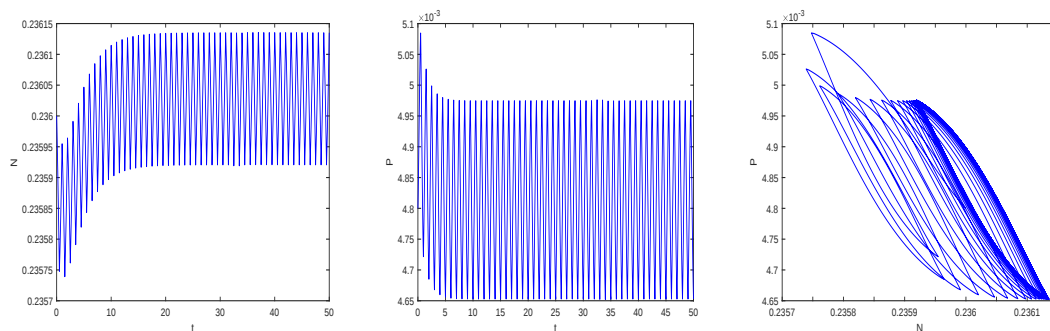


图 1 系统(2)在初始条件为 $N(0) = 0.236$ 和 $P(0) = 0.0048$ 时 $\beta(t)$ 函数连续的数值模拟,此时正平衡解是局部渐近稳定的

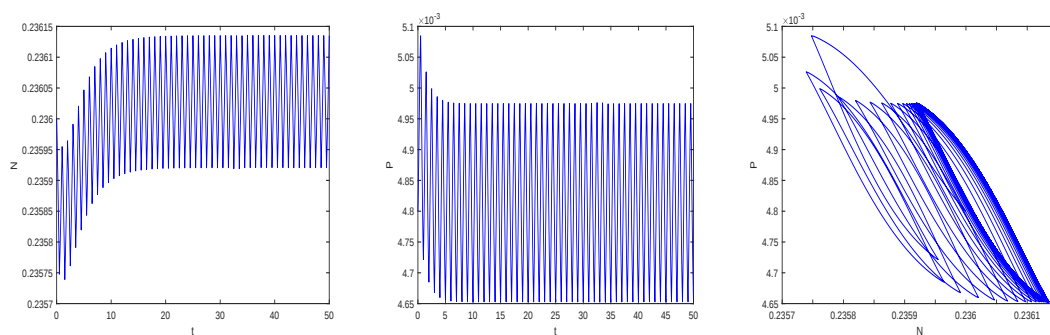


图 2 系统(2)在初始条件为 $(N(0), P(0)) = (0.236, 0.0048)$ 并且 $\beta(t)$ 不连续的周期解数值模拟

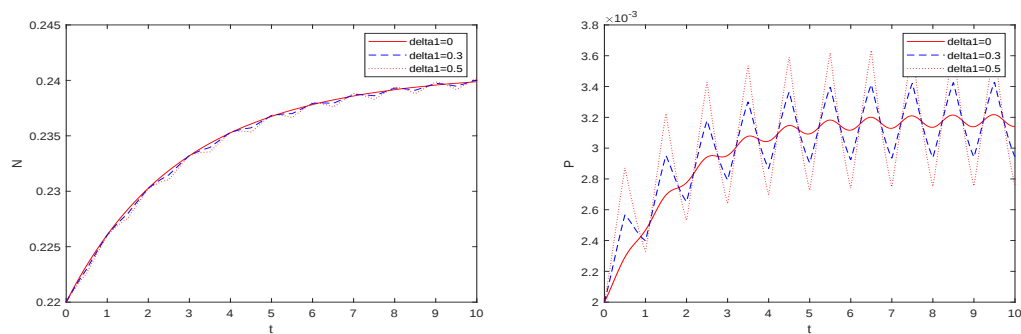
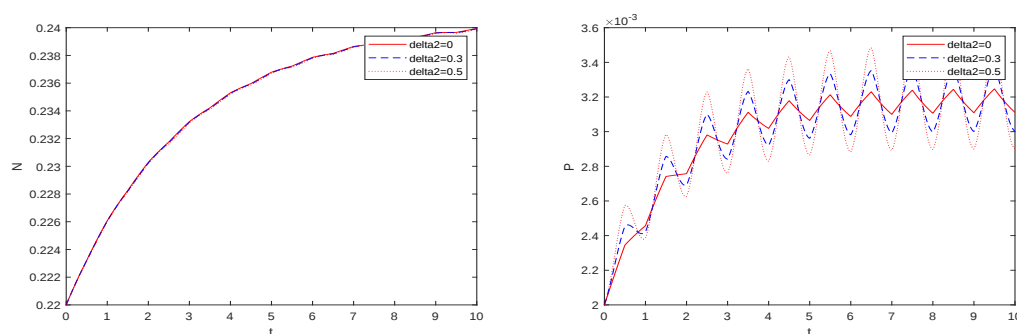


图 3 系统(2)随着控制参数 δ_1 变化的数值模拟

图 4 系统(2)随着控制参数 δ_2 变化的数值模拟

参考文献:

- [1] Falkowski P G. The role of phytoplankton photosynthesis in global biogeochemical cycles[J]. Photosynthesis Research, 1994, 39(3): 235-258.
- [2] Hay M E, Kubanek J. Community and ecosystem level consequences of chemical cues in the plankton[J]. Journal of Chemical Ecology, 2002, 28(10): 2001-2016.
- [3] 秦伯强, 高光, 朱广伟, 等. 湖泊富营养化及其生态系统响应[J]. 科学通报, 2013, 58(10): 855-864.
- [4] 王延军, 徐敏, 孟凡生, 等. 长江中游黄盖湖富营养化趋势分析及原因诊断[J]. 湖泊科学, 2023, 35: 1183-1193.
- [5] 李媛, 张家卫, 魏杰, 等. 我国蓝藻水华的发生机理, 危害及防控利用研究进展[J]. 微生物学杂志, 2015, 35(4): 93-97.
- [6] 张瑞丽, 宋涛. 亳州城南调蓄水库水质现状及富营养化分析[J]. 当代化工研究, 2023, 16: 46-48.
- [7] 雷学铁, 栗启仲, 刘国强, 等. 防城港西湾富营养化季节性及其年际变化特征[J]. 科技通报, 2023, 39: 1-10.
- [8] Huppert A, Blasius B, Stone L. A model of phytoplankton blooms[J]. The American Naturalist, 2002, 159(2): 156-171.
- [9] Huppert A, Olinky R, Stone L. Bottom-up excitable models of phytoplankton blooms[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2004, 66: 865-878.
- [10] Huppert A, Blasius B, Olinky R, et al. A model for seasonal phytoplankton blooms[J]. Journal of Theoretical Biology, 2005, 236: 276-290.
- [11] Chakraborty S, Chatterjee S, Venturino E, et al. Recurring plankton bloom dynamics modeled via toxin-producing phytoplankton[J]. Journal of Biological Physics, 2007, 33(4): 271-290.
- [12] 杨洪, 马秋敏, 盛江林. 具有进化效应的SIR模型的稳定性和Hopf分支分析[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(1): 27-36.
- [13] 赵琛森, 杨洪, 李成宇. 具毒素浮游植物在生态系统中生长问题的分析—以赤潮异弯藻为例[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2024, 29(1): 133-142.
- [14] Subhendu, Chakraborty, P. K, et al. Spatial dynamics of a nutrient-phytoplankton system with toxic effect on phytoplankton[J]. Mathematical Biosciences, 2015, 264: 94-100.
- [15] 吴春鹤. 具有物质循环的营养-浮游植物模型动力学分析[D]. 信阳: 信阳师范学院, 2022.
- [16] Clothier D, Brindley J. Excitability of an age-structured plankton ecosystem[J]. Journal of mathematical biology, 1999, 39: 377-420.

- [17] Edwards A M, Brindley J. Zooplankton mortality and the dynamical behaviour of plankton population models[J]. Bulletin of mathematical biology, 1999, 61(2): 303-339.
- [18] Pitchford J W, Brindley J. Iron limitation, grazing pressure and oceanic high nutrient-low chlorophyll (hnlc) regions[J]. Journal of Plankton Research, 1999, 3: 525-547.
- [19] Pal S, Chatterjee S, Chattopadhyay J. Role of toxin and nutrient for the occurrence and termination of plankton bloom-results drawn from field observations and a mathematical model[J]. Biosystems, 2007, 90(1): 87-100.
- [20] Roy S, Alam S, Chattopadhyay J. Competing effects of toxin-producing phytoplankton on overall plankton populations in the bay of bengal[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2006, 68: 2303-2320.
- [21] Sarkar R R, Pal S, Chattopadhyay J. Role of two toxin-producing plankton and their effect on phytoplankton-zooplankton system-a mathematical study supported by experimental findings[J]. BioSystems, 2005, 80(1): 11-23.
- [22] 聂麟飞. 一般非自治捕食被捕食Kolmogorov 系统研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2006.
- [23] 贾建文. 具III类功能反应的非自治捕食系统的持续性和周期解[J]. 生物数学学报, 2001, 16(1): 59-62.
- [24] 张琰. 捕食种群受毒素影响的捕食-食饵模型的动力学研究[D]. 北京: 北京建筑大学, 2023.

Stability analysis of a nutrient-phytoplankton model with seasonal effects

LI Cheng-yu¹, YANG Hong^{1,2}, YANG Yu-xiang¹

(1. School of Sci., Jiangsu Ocean Univ., Lianyungang 222005, China;

2. Marine Resources Development Institute of Jiangsu, Jiangsu Ocean Univ., Lianyungang 222005, China)

Abstract: This paper studies the ultimate boundedness, strong persistence and stability of the nutrient-phytoplankton model with seasonal periodicity effects. Firstly, considering the continuity of seasonal effects, the positivity and ultimate boundedness of the solutions of the non-autonomous system are proved. Secondly, sufficient conditions for uniform strong persistence and global stability of the solutions of the non-autonomous system are given. Finally, appropriate values are selected for the system parameters to simulate the uniform strong persistence and global stability, and the effects of seasonal intensity control constant and toxicity amplitude control constant on the nutrient-phytoplankton system are analyzed.

Keywords: eutrophication; plankton model; nonautonomous systems; global stability

MR Subject Classification: 34D20