

一类具时滞环境容纳量的捕食模型的时空动力学

袁 樱¹, 甘文珍¹, 金龚逸²

(1. 江苏理工学院 数理学院, 江苏常州 213001;

2. 上海师范大学 数理学院, 上海 200234)

摘要: 文中研究了一类反应扩散问题, 该问题描述了有界区域上具扩散和时滞环境容纳量的捕食模型. 首先通过线性化方法和特征值理论讨论系统正平衡点在有(无)时滞情况下的稳定性. 其次探讨系统在正平衡点处产生Hopf分支的条件. 最后利用数值模拟探究初值条件, 扩散系数和时滞对空间模式的影响.

关键词: 捕食模型; 时滞环境容纳量; Hopf分支; 螺旋波; 靶波

中图分类号: O175.26

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)03-0294-11

§1 引言

众所周知, 为克服Malthus模型在文献[1]中种群无限增长的问题, 文献[2]假设了物种的增长受到环境容纳量 K 的限制, 并建立了经典的Logistic增长模型.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

其中 $N(t)$ 为种群在 t 时刻的密度, r 为种群的内在增长率, K 为环境容纳量. 此后, Logistic增长模型成为刻画种群自然增长的一个重要模型. 考虑到环境容纳量对物种增长的制约具有滞后性, 文献[3]建立了一类具时滞的Logistic增长模型

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right),$$

其中 τ 为时滞. 该模型可以更好地预测人口的增长. 在文献[3]的模型的基础上, 改进的Logistic模型得到了很多研究, 如加速型的Logistic模型^[4], 食物限制型的Logistic模型^[5], θ 型的Logistic模型^[6]等. 这些模型均假设环境容纳量是一个固定的常数. 然而, 在一些特殊情况下, 环境容纳量会由于种群的活动而发生变化. 譬如, 文献[7-8]假设物种可以通过某些创造性行为增加环境容纳量, 或者通过某些破坏性行为减少环境容纳量, 即

$$K(t) = K_0 + \beta N(t),$$

其中 K_0 为自然环境容纳量; β 为任意实数, 表示种群活动对于环境容纳量的影响程度. 近年来, 对变化的环境容纳量的研究也受到了重视. 文献[9]将环境容纳量单独看作一个仓室, 研究了环境容纳量对种群的影响. 文献[10]分析了变化的环境容纳量对一类具有捕获和毒素作用的捕食模型的正平衡点稳定性的影响. 文献[11]发现Logistic增长变化的环境容纳量是系统产生Hopf分支的重要条件.

大多数模型假设种群活动会立即影响环境容纳量, 然而现实中种群活动对环境容纳量的影响具有滞后性. 因此, 文献[7-8]建立了具有时滞环境容纳量的Logistic模型

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K_0 + \beta N(t-\tau)} \right). \quad (1)$$

β 和 τ 的共同作用能导致模型(1)具有复杂的动力学行为, 比如物种灭绝, 生存和无限增长. 文献[12]考虑了时滞环境容纳量, 探究了一类Dalggaard-Strulik模型, 发现时滞环境容纳量能够导致系统产生Hopf分支. 文献[13]首次将时滞环境容纳量引入捕食-食饵系统中, 并提出了

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left[1 - \frac{u(t)}{K_0 + \beta u(t-\tau)} \right] - \alpha u(t)v(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} = \epsilon \alpha u(t)v(t) - \mu v(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u(t)$, $v(t)$ 分别为食饵和捕食者在 t 时刻的密度, α 为捕食者对猎物的捕捉率, ϵ 为转化效率, μ 为捕食者的死亡率. 他们通过数值模拟发现, 在特定条件下, 时滞环境容纳量可以导致物种的灭绝. 文献[14]在系统(2)的基础上, 研究了一个具有恐惧效应和记忆的多时滞捕食-食饵系统, 得到了丰富的动力学行为.

在生物界中, 物种的分布往往是不均匀的, 并且物种迁移也是一种普遍存在的现象. 因此, 考虑物种的空间分布, 即研究反应扩散问题可以更深刻地揭示物种演化规律. 经典扩散^[15-16], 分数阶扩散^[17]和网络扩散^[18]均能够使系统产生更丰富的动力学行为. 当系统(2)中 $\tau = 0$ 时, 文献[19]分析了种群扩散和交错扩散对该系统产生Turing模式的影响, 并通过数值模拟呈现了系统的空间模式. 文献[20]研究了具扩散和时滞环境容纳量的Holling-II型捕食-食饵模型, 考虑了周期扩散和时滞对平衡点稳定性和Turing模式的影响, 展示了丰富的Turing斑图.

本文受以上工作的启发, 在系统(2)的基础上, 考虑种群扩散的影响, 得到系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D_1 \Delta u = ru(x, t) \left[1 - \frac{u(x, t)}{K_0 + \beta u(x, t-\tau)} \right] - \alpha u(x, t)v(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - D_2 \Delta v = \epsilon \alpha u(x, t)v(x, t) - \mu v(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \phi(x, t), v(x, t) = \varphi(x, t), & x \in \Omega \times [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3)$$

其中 D_1, D_2 分别为食饵和捕食者的扩散系数. 系统(3)中参数 β 为任意实数, 其他参数均为正常数. $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为Laplace算子. Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 光滑. 齐次Neumann条件 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0$ 说明在边界 $\partial\Omega$ 上种群流动的通量为零, 其中 $\vec{n}$ 为区域 Ω 的单位外法向量. $\phi(x, t), \varphi(x, t)$ 为 Ω 上大于等于零但不恒为零的连续函数.

本文主要讨论扩散和时滞对系统(3)正平衡点稳定性的影响, 利用数值模拟分析初始条件, 时滞, 扩散对系统(3)空间模式的影响. 具体安排如下: §2讨论系统(3)正平衡点的局部渐近稳定性, 特别是以时滞为分支参数, 研究系统(3)Hopf分支的存在性; §3通过数值模拟呈现系统(3)的空间模式.

§2 正平衡点的稳定性

本节主要讨论系统(3)正平衡点的稳定性. 首先, 讨论系统(2)和系统(3)正平衡点的存在性.

引理1 当条件

$$(H_1) \quad \beta > 1 - \frac{K_0 \epsilon \alpha}{\mu} \text{ 或 } \beta < -\frac{K_0 \epsilon \alpha}{\mu}$$

成立时, 系统(2)和系统(3)存在唯一的正平衡点

$$E_* = (u_*, v_*) = \left(\frac{\mu}{\epsilon \alpha}, \frac{r [K_0 \epsilon \alpha + (\beta - 1) \mu]}{\alpha (K_0 \epsilon \alpha + \beta \mu)} \right).$$

由文献[13]可知, 当时滞未出现(即 $\tau = 0$)和条件 (H_1) 成立时, 系统(2)的正平衡点 E_* 是局部渐近稳定的; 当时滞出现(即 $\tau \neq 0$)时, 系统(2)在正平衡点 E_* 处产生Hopf分支.

下面研究系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性. 令 $\bar{u} = u - u_*$, $\bar{v} = v - v_*$, 并代入系统(3), 省略上标得到系统(3)等价形式的线性化方程组

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + J_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + J_2 \begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 $D = \text{diag}(D_1, D_2)$,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{r u_*}{K_0 + \beta u_*} & -\alpha u_* \\ \epsilon \alpha v_* & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \frac{r \beta u_*^2}{(K_0 + \beta u_*)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据系统(3)的边界条件, 假设系统(3)的解为

$$(u, v) = (c_1, c_2) e^{\lambda t} \cos kx, k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 λ 为特征值, $k \geq 0$ 为波长. 将上式代入系统(4)得到对应的特征方程

$$\Delta(\lambda, k) = \lambda^2 + A_{1k} \lambda + A_{2k} - e^{-\lambda \tau} (B_{1k} \lambda + B_{2k}) = 0, \quad (5)$$

其中

$$A_{1k} = (D_1 + D_2) k^2 - a_1, A_{2k} = D_1 D_2 k^4 - a_1 D_2 k^2 - a_2 a_3, B_{1k} = b_1, B_{2k} = b_1 D_2 k^2.$$

引理2 假设条件 (H_1) 成立, 则

- (i) 当 $\tau = 0$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定;
- (ii) 当 $\tau > 0$ 且满足条件

$$(H_2) \quad \beta < -\frac{K_0 \epsilon \alpha}{2\mu}$$

时, 时滞 τ 存在临界值 $\tau_\pm^j (j \in \mathbf{N})$, 使系统(3)的特征方程(5)存在一对纯虚根.

证 (i) 当 $\tau = 0$ 时, 特征方程(5)变为

$$\lambda^2 + C_{1k} \lambda + C_{2k} = 0, \quad (6)$$

其中

$$C_{1k} = A_{1k} - B_{1k} = (D_1 + D_2) k^2 - (a_1 + b_1) = (D_1 + D_2) k^2 + \frac{r K_0 u_*}{(K_0 + \beta u_*)^2} > 0,$$

$$C_{2k} = A_{2k} - B_{2k} = D_1 D_2 k^4 - (a_1 + b_1) D_2 k^2 - a_2 a_3 =$$

$$D_1 D_2 k^4 + \frac{r K_0 u_*}{(K_0 + \beta u_*)^2} D_2 k^2 + \epsilon \alpha^2 u_* v_* > 0.$$

由韦达定理可知(6)式的根均具有负实部. 进一步由文献[21]的推论1.11得, 当 $\tau = 0$ 时, 系统(3)的

正平衡点 E_* 局部渐近稳定.

(ii) 假设 $\lambda = \pm i\omega$, 代入特征方程(5)化简得

$$(\mathrm{i}\omega)^2 + A_{1k}(\mathrm{i}\omega) + A_{2k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} [B_{1k}(\mathrm{i}\omega) + B_{2k}] = 0.$$

分离实部和虚部得

$$\begin{cases} -\omega^2 + A_{2k} &= B_{1k}\omega \sin(\omega\tau) + B_{2k} \cos(\omega\tau), \\ A_{1k}\omega &= B_{1k}\omega \cos(\omega\tau) - B_{2k} \sin(\omega\tau). \end{cases} \quad (7)$$

化简(7)式得

$$\omega^4 + E_{1k}\omega^2 + E_{2k} = 0, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} E_{1k} &= A_{1k}^2 - 2A_{2k} - B_{1k}^2 = (D_1^2 + D_2^2)k^4 - 2a_1D_1k^2 + a_1^2 + 2a_2a_3 - b_1^2 \\ &= (D_1^2 + D_2^2)k^4 + \frac{2ru_*}{K_0 + \beta u_*}D_1k^2 + a_1^2 + 2a_2a_3 - b_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{2k} &= A_{2k}^2 - B_{2k}^2 = (A_{2k} - B_{2k})(A_{2k} + B_{2k}) = C_{2k} [D_1D_2k^4 + (b_1 - a_1)D_2k^2 - a_2a_3] \\ &= C_{2k} \left[D_1D_2k^4 + \frac{ru_*(K_0 + 2\beta u_*)}{(K_0 + \beta u_*)^2}D_2k^2 + \epsilon\alpha^2u_*v_* \right]. \end{aligned}$$

由条件(H₂)可知

$$b_1 - a_1 = \frac{ru_*(K_0 + 2\beta u_*)}{(K_0 + \beta u_*)^2} < \frac{ru_* \left(K_0 - 2\frac{K_0\epsilon\alpha}{2\mu} \frac{\mu}{\epsilon\alpha} \right)}{(K_0 + \beta u_*)^2} = 0.$$

又因为 $b_1 + a_1 = -\frac{rK_0u_*}{(K_0 + \beta u_*)^2} < 0$, 所以 $b_1^2 - a_1^2 > 0$ 且

$$a_1^2 + 2a_2a_3 - b_1^2 = -(b_1 - a_1)(b_1 + a_1) - \epsilon\alpha u_*v_* < 0.$$

通过计算可知(8)式的判别式为

$$\begin{aligned} F_k &= E_{1k}^2 - 4E_{2k} = \\ &= (D_1^2 - D_2^2)^2 k^8 + 4a_1D_1(D_2^2 - D_1^2)k^6 + \\ &\quad \left[4a_1^2D_1^2 + 2a_1^2(D_1^2 - D_2^2) + 4a_2a_3(D_1 + D_2)^2 \right] k^4 + \\ &\quad \left[-4a_1D_1(A_1^2 - B_1^2) - 8a_1a_2a_3(D_1 + D_2) \right] k^2 + \\ &\quad (b_1^2 - a_1^2)(b_1^2 - 4a_2a_3 - a_1^2). \end{aligned}$$

显然

$$(b_1^2 - a_1^2)(b_1^2 - 4a_2a_3 - a_1^2) = (b_1^2 - a_1^2)(b_1^2 - a_1^2 + 4\epsilon\alpha^2u_*v_*) > 0,$$

因此当 k 适当小时, 有 $F_k > 0, E_{1k} < 0, E_{2k} > 0$, 故(8)式存在两个不同的实根

$$\omega_+^* = \sqrt{\frac{-E_{1k} + \sqrt{F_k}}{2}}, \omega_-^* = \sqrt{\frac{-E_{1k} - \sqrt{F_k}}{2}}. \quad (9)$$

把(9)式代入(7)式得对应的时滞临界值为

$$\tau_{\pm}^j = \frac{1}{\omega_{\pm}^*} \arccos \left[\frac{(A_{1k}B_{1k} - B_{2k})(\omega_{\pm}^*)^2 + A_{2k}B_{2k}}{B_{1k}^2(\omega_{\pm}^*)^2 + B_{2k}^2} \right] + \frac{2j\pi}{\omega_{\pm}^*}, j \in \mathbf{N}. \quad (10)$$

注1 当系统(3)中未出现时滞时, 正平衡点 E_* 局部渐近稳定, 这说明在一定条件下, 扩散

不影响正平衡点的局部渐近稳定性. 当系统(3)中出现时滞时, 在一定条件下, 时滞会存在临界值, 导致系统的特征方程产生纯虚根. 这说明在一定条件下, 扩散对系统(3)的特征方程是否产生纯虚根没有影响, 但可以改变时滞临界值的大小和纯虚根.

引理3 假设(H₁)和(H₂)成立, 则 $\left(\frac{d\operatorname{Re}\lambda}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_+^j} > 0, \left(\frac{d\operatorname{Re}\lambda}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_-^j} < 0, j \in \mathbf{N}$.

证 令(5)式的根为 $\lambda(\tau_{\pm}^j) = \sigma(\tau_{\pm}^j) + iw(\tau_{\pm}^j), j \in \mathbf{N}$, 其中 $\sigma, w \in \mathbf{R}$, 并且 $\sigma(\tau_{\pm}^j) = 0, w(\tau_{\pm}^j) = \omega_{\pm}^*$. 为书写方便, 在计算过程中省略 τ 的上下标, 将 $\lambda(\tau)$ 代入(5)式, 并对 τ 求得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{\tau}{\lambda} + \frac{B_{1k}}{\lambda(B_{1k}\lambda + B_{2k})} - \frac{2\lambda + A_{1k}}{\lambda(\lambda^2 + A_{1k}\lambda + A_{2k})}.$$

计算得到横截面条件为

$$\begin{aligned} \operatorname{Sign}\left\{\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau))}{d\tau}\right\}_{\tau=\tau^*} &= \operatorname{Sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{\tau=\tau^*} = \operatorname{Sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right]^{-1}\right\}_{\tau=\tau^*} = \\ \operatorname{Sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{B_{1k}(-B_{1k}\omega^2 - B_{2k}i\omega)}{B_{1k}^2\omega^4 + B_{2k}^2\omega^2}\right] - \operatorname{Re}\left[\frac{(A_{1k} + 2i\omega)[-A_{1k}\omega^2 - (-\omega^3 + A_{2k}\omega)i]}{A_{1k}^2\omega^4 + (\omega^3 - A_{2k}\omega)^2}\right]\right\} &= \\ \operatorname{Sign}\left\{\frac{-B_{1k}^2}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2} - \frac{-2\omega^2 - A_{1k}^2 + 2A_{2k}}{\omega^4 + (A_{1k}^2 - 2A_{2k})\omega^2 + A_{2k}^2}\right\} &= \\ \operatorname{Sign}\left\{\frac{2\omega^2 + (A_{1k}^2 - 2A_{2k} - B_{1k}^2)}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2}\right\} &= \\ \operatorname{Sign}\left\{\frac{2\omega^2 + E_{1k}}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2}\right\} &= \operatorname{Sign}\left\{\frac{\pm\sqrt{F_k}}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2}\right\}. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} \operatorname{Sign}\left\{\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau))}{d\tau}\right\}_{\tau=\tau_+^j} &= \operatorname{Sign}\left\{\frac{\sqrt{F_k}}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2}\right\} = 1 > 0, j \in \mathbf{N}, \\ \operatorname{Sign}\left\{\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau))}{d\tau}\right\}_{\tau=\tau_-^j} &= \operatorname{Sign}\left\{\frac{-\sqrt{F_k}}{B_{1k}^2\omega^2 + B_{2k}^2}\right\} = -1 < 0, j \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

结合引理2和引理3, 得到

定理1 假设(H₁)和(H₂)成立, 且 $\tau_+^1 < \tau_-^0$, 则

- (i) 当 $\tau \in [0, \tau_+^0)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定;
- (ii) 当 $\tau \in (\tau_+^0, +\infty)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定;
- (iii) 当 $\tau = \tau_+^0$ 时, 系统(3)在正平衡点 E_* 处产生Hopf分支.

证 (i) 因为 $\tau_+^1 < \tau_-^0$, 故由计算可知 τ_+^0 是所有时滞中最小的一个. 又因为在区间 $(0, \tau_+^0)$ 中, $\operatorname{Re}\lambda$ 不会穿过纵坐标轴, 而且当 $\tau = 0$ 时, 特征方程(6)的特征根均具有负实部, 所以由 $\operatorname{Re}\lambda$ 的连续性可得, 在整个区间 $[0, \tau_+^0)$ 上 $\operatorname{Re}\lambda < 0$. 因此由文献[21]的推论1.11知, 当 $\tau \in [0, \tau_+^0)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定.

(ii) 由引理2和引理3知 $\operatorname{Re}\lambda|_{\tau=\tau_+^0} = 0$ 且 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_+^0} > 0$. 由 $\operatorname{Re}\lambda$ 的连续性知, 当 $\tau > \tau_+^0$ 时, 有 $\operatorname{Re}\lambda > 0$. 由文献[21]的推论1.11知, 当 $\tau \in (\tau_+^0, +\infty)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定.

(iii) 由(i)和(ii)可知系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性在 $\tau = \tau_+^0$ 的附近发生了改变, 这说明当 $\tau = \tau_+^0$ 时, 系统(3)在正平衡点 E_* 处产生Hopf分支.

定理2 假设(H₁)和(H₂)成立, 且 $\tau_+^1 > \tau_-^0$, 则

- (i) 必存在正整数 m , 使 $\tau_+^m < \tau_+^{m+1} < \tau_-^m$;
 (ii) 当 $\tau \in [0, \tau_+^0) \cup (\tau_-^0, \tau_+^1) \cup \dots \cup (\tau_-^{m-1}, \tau_+^m)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定;
 当 $\tau \in (\tau_+^0, \tau_-^0) \cup (\tau_+^1, \tau_-^1) \cup \dots \cup (\tau_+^{m-1}, \tau_-^{m-1}) \cup (\tau_+^m, +\infty)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定;
 (iii) 当 $\tau = \tau_\pm^j, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 时, 系统(3)在正平衡点 E_* 处产生Hopf分支.

证 (i) 由(9)式知, $\omega_+^* > \omega_-^*$. 把 ω_+^*, ω_-^* 分别代入(10)式并计算, 得 $\tau_+^j < \tau_-^j$, 且

$$\tau_+^{j+1} - \tau_+^j = \frac{2\pi}{\omega_+^*} < \frac{2\pi}{\omega_-^*} = \tau_-^{j+1} - \tau_-^j, j \in \mathbf{N}. \quad (11)$$

因此当 $\tau_+^1 > \tau_-^0$ 时, 自然有 $\tau_+^0 < \tau_-^0 < \tau_+^1 < \tau_-^1$. 由(11)式可知, τ_+^j 的步长小于 τ_-^j 的步长, 因此随着自然数 j 的增大, 必然会在正整数 m , 使得

$$\tau_+^0 < \tau_-^0 < \tau_+^1 < \tau_-^1 < \dots < \tau_+^m < \tau_+^{m+1} < \tau_-^m.$$

- (ii) 由定理1知, 当 $\tau \in [0, \tau_+^0)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定. 下面考虑 $\tau \in (\tau_+^0, \tau_-^0)$ 时正平衡点 E_* 的稳定性.

由引理2和引理3知 $\text{Re}\lambda|_{\tau=\tau_+^0} = 0, \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_+^0} > 0$, 故连续函数 $\text{Re}\lambda$ 在 $\tau = \tau_+^0$ 处自下而上穿过横轴. 同样的, 由引理2和引理3知, $\text{Re}\lambda = 0, \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_-^0} < 0$ 可知, 连续函数 $\text{Re}\lambda$ 在 $\tau = \tau_-^0$ 处自上而下穿过横轴. 又因为连续函数 $\text{Re}\lambda$ 在 (τ_+^0, τ_-^0) 内并无其他零点, 故在区间 (τ_+^0, τ_-^0) 上恒有 $\text{Re}\lambda > 0$. 由文献[21]的推论1.11知, 当 $\tau \in (\tau_+^0, \tau_-^0)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定. 类似可证, 当 $\tau \in (\tau_+^j, \tau_-^j), j = 1, 2, \dots, m-1$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 都不稳定.

由引理2和引理3知, $\text{Re}\lambda|_{\tau=\tau_-^0} = 0, \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_-^0} < 0$, 故连续函数 $\text{Re}\lambda$ 在 $\tau = \tau_-^0$ 处自上而下穿过横轴. 同样的, 由引理2和引理3知, $\text{Re}\lambda = 0, \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_+^1} > 0$ 可知, 连续函数 $\text{Re}\lambda$ 在 $\tau = \tau_+^1$ 处自下而上穿过横轴. 利用 $\text{Re}\lambda$ 的连续性和引理3, 可得当 $\tau \in (\tau_-^0, \tau_+^1)$ 时, $\text{Re}\lambda < 0$. 因此由文献[21]的推论1.11知, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定. 类似可证, 当 $\tau \in (\tau_-^j, \tau_+^{j+1}), j = 1, 2, \dots, m-1$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定.

由引理2和引理3知 $\text{Re}\lambda|_{\tau=\tau_+^m} = 0, \frac{d\text{Re}\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_+^m} > 0$. 根据 $\text{Re}\lambda$ 的连续性可知, 当 $\tau \in (\tau_+^m, +\infty)$ 时, $\text{Re}\lambda > 0$. 因此由文献[21]的推论1.11知, 当 $\tau \in (\tau_+^m, +\infty)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定.

将以上稳定区间和不稳定区间合并在一起, 得到系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性情况.

- (iii) 由(ii)可知, 在每一个 $\tau = \tau_\pm^j, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 附近, 系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性均发生了改变. 因此当 $\tau = \tau_\pm^j, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ 时, 系统(3)在正平衡点 E_* 处产生Hopf分支.

注2 在一定条件下, 系统(2)在正平衡点 E_* 处会产生Hopf分支(见文献13); 加入扩散后, 系统(3)在正平衡点 E_* 处也会产生Hopf分支, 但是对应时滞的临界值和纯虚根不同.

注3 当自然环境容纳量充分大或种群活动对环境容纳量的影响产生一定的负面影响时, 系统(3)在正平衡点 E_* 处会产生Hopf分支.

§3 数值模拟

上一节已经证明了时滞可以引起系统(3)在正平衡点 E_* 处稳定性的转换. 在本节中, 利用数值模拟, 探索初始条件、时滞和扩散系数对系统(3)空间模式的影响.

取系统(3)的参数为

$$r = 0.25, K_0 = 100, \alpha = 1.5, \epsilon = 0.2, \mu = 5, \beta = -4, D_1 = 0.25, D_2 = 0.15.$$

容易验证条件(H₁)和(H₂)成立. 因此由引理1知系统(3)存在唯一的正平衡点 $E_* = (u_*, v_*) = (16.6667, 0.0833)$. 进一步计算出时滞临界值.

表 1 时滞的临界值 $\tau_{\pm}^j$

τ_+^j	2.3111	9.2447	16.1782	23.1118	30.0454
τ_-^j	3.0367	12.1468	21.2569	30.3670	39.4772

由定理1和定理2可知, 在该组参数下系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性情况如下.

(i) 当 $\tau \in [0, 2.3111) \cup (3.0367, 9.2447) \cup (12.1468, 16.1782) \cup (21.2569, 23.1118)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 局部渐近稳定;

(ii) 当 $\tau \in (2.3111, 3.0367) \cup (9.2447, 12.1468) \cup (16.1782, 21.2569) \cup (30.3670, +\infty)$ 时, 系统(3)的正平衡点 E_* 不稳定.

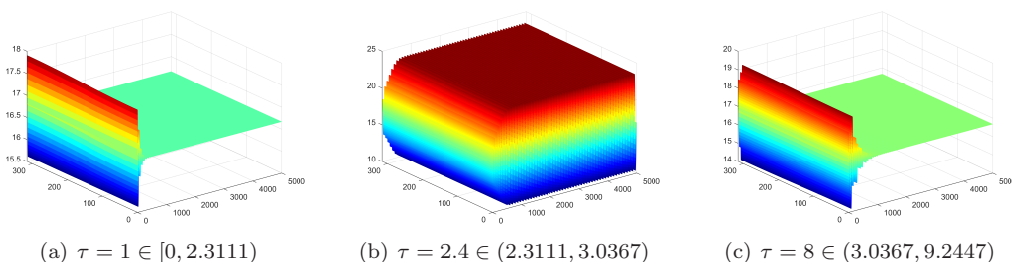


图 1 时滞导致系统正平衡点稳定性的转换

由图1可知, 随着时滞的增加, 系统(3)在正平衡点 E_* 处出现了稳定与不稳定之间的转换. 这符合定理1和定理2的理论分析结果.

下面研究系统(3)在正平衡点 E_* 处的空间模式.

令 $\Omega = [1, 200] \times [1, 200]$, 取空间步长 $\Delta x = \Delta y = 1.5$ 和时间步长 $\Delta t = 0.05$. 利用有限差分法, 将Laplace算子离散为

$$\Delta u = \frac{1}{\Delta x \Delta y} [u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1) - 4u(i, j)].$$

当 $i = 1$ 或 $j = 1$ 时, 取 $u(i, j) = u(i+2, j+2)$; 当 $i = 200$ 或 $j = 200$ 时, 取 $u(i, j) = u(i-2, j-2)$. 此时, 系统(3)满足Neumann边界条件.

在正平衡点 E_* 附近取两组初值条件

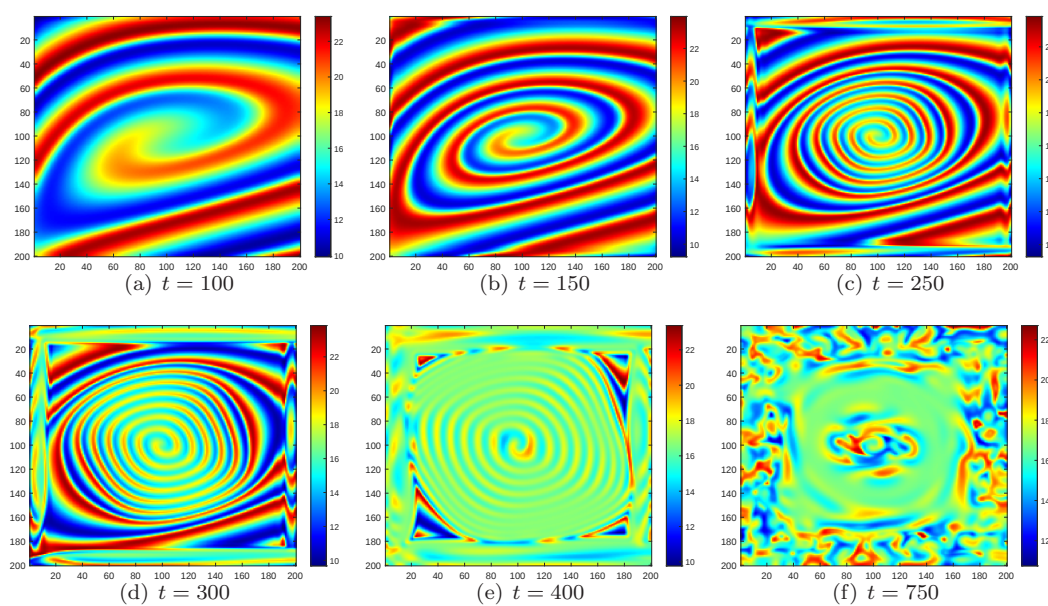
$$\begin{cases} u_0(i, j) = u_* + \gamma_1(i-100), \\ v_0(i, j) = v_* + \gamma_2(j-100), \end{cases} \quad (12)$$

和

$$\begin{cases} u_0(i, j) = u_* - \gamma_3(i-j-25)^2, \\ v_0(i, j) = v_* - \gamma_4(i-125) - \gamma_5(j-75), \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\gamma_1 = 3 \times 10^{-2}$, $\gamma_2 = 5 \times 10^{-4}$, $\gamma_3 = 2 \times 10^{-5}$, $\gamma_4 = 3 \times 10^{-5}$, $\gamma_5 = 6 \times 10^{-5}$.

图2展示了在临界点(100, 100)附近系统(3)螺旋波的形成与破碎. 在初值条件(12)下, 图2(a)-2(d)展示了螺旋波的产生与逐渐充满整个区域的过程. 但经过一段时间后, 图2(e)-2(f)呈现了螺

图 2 螺旋波的形成与破碎($\tau = 2.4$)

螺旋波破碎与不规则的斑图的出现.

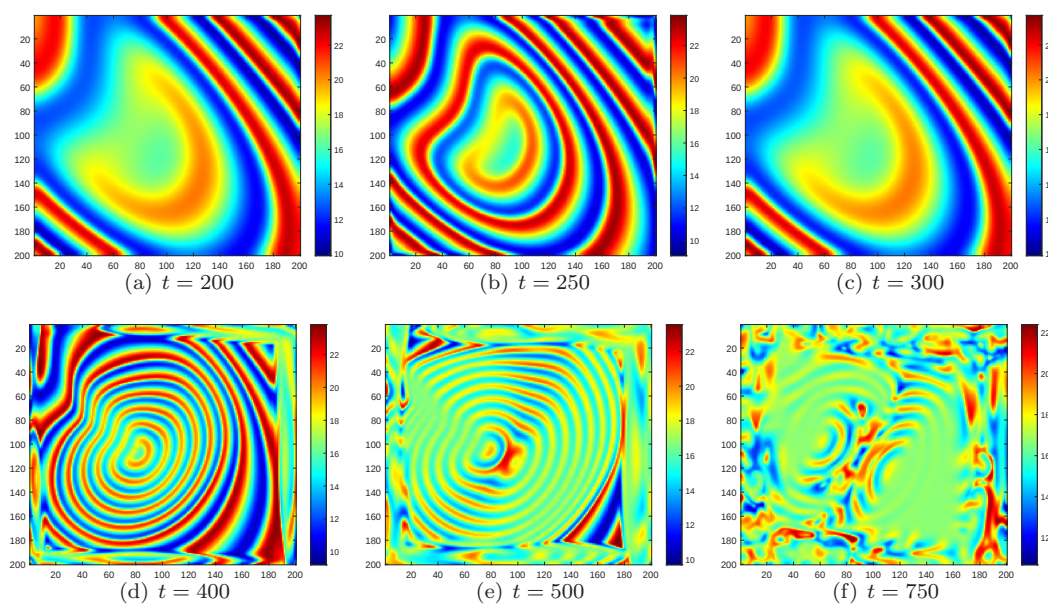
图 3 靶波的形成与破碎($\tau = 2.4$)

图3展示了在临界点(83.3333, 108.3333)附近系统(3)靶波的形成与破碎. 在初值条件(13)下, 图3(a)-3(d)展示了靶波的产生与逐渐充满整个区域的过程. 但是经过一段时间后, 图3(e)-3(f)呈现了靶波破碎与不规则的斑图的出现.

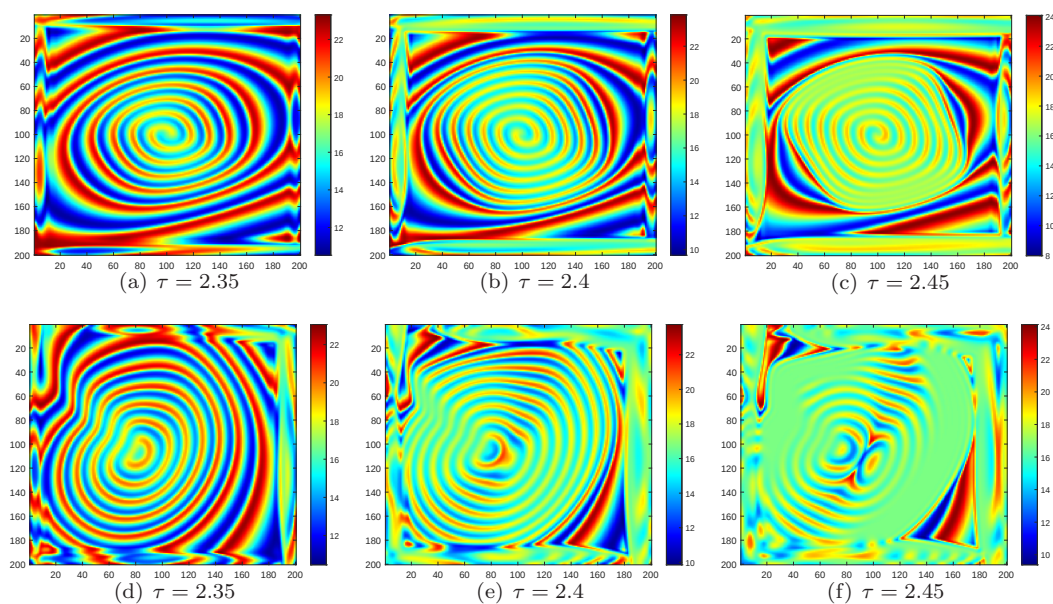


图4 时滞对空间模式的影响

图4(a)-4(c)展示了在初值条件(12)下, 当 $t = 300$ 时, 不同时滞对应的系统(3)的空间模式. 图4(d)-4(f)展示了在初值条件(13)下, 当 $t = 475$ 时, 不同时滞对应的系统(3)的空间模式. 图4说明, 时滞对于螺旋波和靶波的破碎时间有着重要影响.

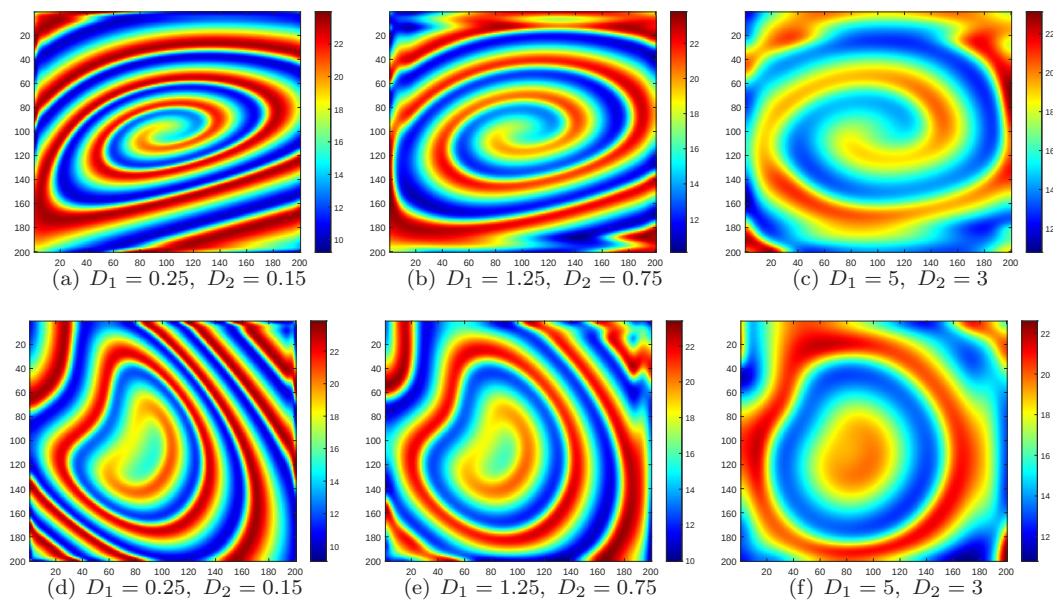
图5 扩散系数对空间模式的影响($\tau = 2.4$)

图5(a)-5(c)展示了在初值条件(12)下, 当 $t = 150$ 时, 不同扩散系数对应的系统(3)的空间模式. 图5(d)-5(f)展示了在初值条件(13)下, 当 $t = 250$ 时, 不同扩散系数对应的系统(3)的空间模式. 图5说明扩散系数会影响螺旋波和靶波的波数.

§4 总结

本文主要研究了具扩散和时滞环境容纳量的捕食模型, 利用线性稳定性理论讨论了系统(3)正平衡点 E_* 的稳定性, 通过数值模拟分析了影响空间模式的因素. 一方面, 当种群活动对环境容纳量产生负面影响并且具有一定滞后性时, 捕食系统有着复杂的动力学行为. 特别是不同的时间滞后可能导致种群数量趋于一个正常数或者在一定范围内周期振荡. 另一方面, 不同的时滞会影响系统(3)的螺旋波和靶波的破碎时间, 不同的扩散会影响螺旋波和靶波的波数, 不同的初始条件会影响空间模式的类型.

参考文献:

- [1] Malthus T R. An Essay on the Principle of Population[M]. London: Pickering, 1798.
- [2] Verhulst P F. Recherches mathématiques sur la loi d' accroissement de la population[J]. Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845, 18: 1-41.
- [3] Hutchinson G E. Circular causal systems in ecology[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, 1948, 50: 221-246.
- [4] Peschel M, Mende W. The Predator-prey Model: Do We Leave in a Volterra World?[M]. Springer, Wien, 1986.
- [5] Smith F E. Population dynamics in daphnia magna[J]. Ecology, 1963, 44: 651-653.
- [6] Sibly R M, Barker D, Denham M C, et al. On the regulation of populations of mammals, birds, fish, and insects[J]. Science, 2005, 309(5734): 607-610.
- [7] Yukalov V I, Yukalova E P, Sornette D. Punctuated evolution due to delayed carrying capacity[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2009, 238(17): 1752-1767.
- [8] Yukalov V I, Yukalova E P, Sornette D. Extreme events in population dynamics with functional carrying capacity[J]. European Physical Journal Special Topics, 2012, 205: 313-354.
- [9] Safuan H M, Towers I N, Jovanoski Z, et al. Coupled logistic carrying capacity model[J]. The Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal, 2012, 53: C172-C184.
- [10] Ang T K, Safuan H M. Harvesting in a toxicated intraguild predator-prey fishery model with variable carrying capacity[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2019, 126: 158-168.
- [11] Al-Salti N, Al-Musalhi F, Gandhi V, et al. Dynamical analysis of a prey-predator model incorporating a prey refuge with variable carrying capacity[J]. Ecological Complexity, 2021, 45(6): 100888.
- [12] Bianca C, Guerrini L. On the Dalgaard-Strulik model with logistic population growth rate and delayed-carrying capacity[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2013, 128(1): 1-10.
- [13] Pati N C, Ghosh B. Delayed carrying capacity induced subcritical and supercritical Hopf bifurcations in a predator-prey system[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 195: 171-196.
- [14] Pal S, Gupta A, Misra A K, et al. Complex dynamics of a predator-prey system with fear and memory in the presence of two discrete delays[J]. The European Physical Journal Plus, 2023, 129: 984.

- [15] Gan Wenzhen, Lin Zhigui, Pedersen M. Delay-driven spatial patterns in a predator-prey model with constant prey harvesting[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2022, 73(3): 1-18.
- [16] Mishra S, Upadhyay R K. Strategies for the existence of spatial patterns in predator-prey communities generated by cross-diffusion[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2020, 51: 103018.
- [17] Tian Canrong. Turing pattern formation in a semiarid vegetation model with fractional-in-space diffusion[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2015, 77: 2072-2085.
- [18] Tian Canrong, Liu Yong. Delay-driven Hopf bifurcation in a networked Malaria model[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 132: 108092.
- [19] Bhunia B, Ghorai S, Kar T K, et al. A study of a spatiotemporal delayed predator-prey model with prey harvesting: constant and periodic diffusion[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2023, 175: 113967.
- [20] Anshu, Dubey B. Spatiotemporal dynamics of a multi-delayed prey-predator system with variable carrying capacity[J]. Chaos, 2023, 33: 113116.
- [21] Wu Jianhong. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

Spatiotemporal dynamics of a predator-prey model with delayed carrying capacity

YUAN Ying¹, GAN Wen-zhen¹, JIN Gong-yi²

(1. School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China;
2. Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: This paper deals with a reaction-diffusion problem, which describes a predator-prey model with diffusion and delayed carrying capacity in bounded domains. Firstly, the stabilities of the positive equilibrium point with and without time delay are discussed through linearization methods and eigenvalue theory. Secondly, the conditions for generating Hopf bifurcations at the equilibrium point are explored. Finally, the effects of initial conditions, diffusion and time delay on spatial patterns are investigated by numerical simulations.

Keywords: predator-prey model; delayed carrying capacity; Hopf bifurcation; spiral wave; target wave

MR Subject Classification: 35B32; 35B36; 95D40