

变化违约边界下含政府隐性担保的债券定价研究

赵 丹^{1,2}, 沈振一^{1,2}, 徐承龙³

(1. 浙江大学 计算机科学与技术学院, 浙江杭州 310027;

2. 杭州银行, 浙江杭州 310003;

3. 上海财经大学 数学学院, 上海 200433)

摘要: 将政府隐性担保概率及违约损失率等作为参数引入债券定价模型中, 在利率满足Vasicek模型时, 在概率意义下求解出变化违约边界的动态债券定价公式, 并利用债券市场中不同类型的公司债数据对政府隐性担保概率进行了实证分析. 首先利用民企债数据结合最小二乘法对国内市场中确实的违约损失率进行了合理估计, 然后基于债券定价公式, 分别对央企债和国企债的数据分析政府的隐性担保作用, 研究结果表明: 第一, 央企债相较于国企债的隐性担保概率更高; 第二, 不同的行业的违约损失率及隐性担保概率相差较大, 材料及工业的违约损失率较低, 信息技术与房地产行业的隐性担保概率较高; 第三, 公司债的剩余期限越低, 违约损失率越低, 呈现出明显的期限结构特征, 而地方国有企业债与中央国有企业债隐性担保概率变化趋势相反.

关键词: Vasicek模型; 可违约债券; 变化违约边界; 隐性担保

中图分类号: O29; F83

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)03-0253-13

§1 引言

公司债券是一种具有违约风险的证券, 作为公司融资的重要工具, 在我国债券市场上占有重要地位. 公司债券不仅面临市场风险, 还面临着信用风险, 即发行债券的公司可能发生破产从而不能按时偿还债券的本金或利息, 导致给投资者带来损失. 公司发行债券进行融资不仅可以有效的监管和约束管理层, 还可以改善企业资本结构使得公司的市场价值最大化.

如今我国公司债规模不断增大, 同时伴随着违约事件的不断发生, Wind数据库统计发现: 2018年至2023年10月, 债券市场共有482个主体发行的1388只债券发生了违约, 涉及违约债务总额达9843.02亿元, 研究含违约风险的公司债定价变得越来越重要. 现代金融理论对债券定价的模型主要有结构化模型和约化模型.

结构化模型最初由Merton^[1]利用期权定价理论创立. 假设公司资产服从几何布朗运动(Geometric Brownian Motion), 公司资产的波动率及无风险利率均为常数, 违约只能发生在债券日. 而由于实际市场中提前违约随处可见, 利率也并非确定不变, 很多学者在Merton模型基础上进行了改进. Black等人^[2]考虑了在利率为常数的条件下, 公司存在确定的违约边界, 债券在有效期内任意时刻触碰违约边界即发生违约, 提出了首达模型. Longstaff等人^[3]进一步提出利率满足Vasicek随机模型的情况, 将利率风险引进公司债券定价模型. Briys等人^[4]在此基础上考虑了随机违约边界的问题. 而由于结构化模型存在违约可预测性的缺陷, 学术界进一步提出公司资产过程加入不连续过程, 即加入跳跃项. Zhou^[5]考虑了公司资产可能受市场影响突升, 从而假设公司资产价值服从跳-扩散模型, 利率服从Vasicek模型, 通过Monte Carlo模拟得到了风险债券价格的数值解. Kou等人^[6]考虑了跳服从双指数分布的情况下, 给出了违约时间的Laplace变换的封闭解. 以上模型均为外生违约, 即违约边界与公司发行债务相关, 是外部给定的资产临界值.

Geske^[7]最初建立了内生违约结构化模型, 将股票作为公司资产的复合期权, 由股东决定是否行权. 内生违约模型可以通过公司的最优资本结构决定是否违约. Leland等人^[8]考虑了内生违约时的资产定价模型, 得到了违约边界的解析表达式. Hilberink等人^[9]进一步假设公司资产价值满足Levy过程, 得出到期时间趋于0时信用利差并不趋于0, 与实际市场一致.

约化模型假设公司违约是外在过程控制的随机事件, Jarrow等人^[10]提出违约发生时按债券面值回收, 假设违约时间是由违约强度确定的Poisson过程, 且无风险利率过程和违约损失函数相互独立. Duffie等人^[11]提出违约发生是按债券市值回收, 并将无风险利率推广至短期利率模型.

针对模型的实证研究, Eom等人^[12]对五个经典的结构化模型Merton^[1], Geske^[7], Longstaff等人^[3], Leland等人^[8]以及Collin-Dufresne等人^[13]利用1986-1997年间182只美国公司债券进行了检验. 实证结果显示五个模型各有缺陷, 其中Merton模型所得利差较低, 而其他模型利差较高. 并提出改进模型中, 需要注意在提高相对安全债券的利差的同时避免风险债券利差大幅度变高. 周孝坤^[14]利用4只企业债券对Merton和Leland模型进行了实证分析, 结果发现两个模型都低估了利差, 但Leland模型结果优于Merton模型. 解文增等人^[15]选取2007-2012年77家A股上市公司发行的97只公司债对Merton^[1]、Longstaff等人^[3]以及Leland等人^[8]模型的定价能力进行了实证研究, 研究结果显示模型整体高估了公司债价格, 且三个模型高估公司债价格的百分比逐渐减少. 提出未来适合国内债券定价的结构化模型应降低低杠杆比率和低资产波动率公司债的价格, 而提高高杠杆比率和低资产波动率公司债的价格. 由此可见, 流动性是传统结构化模型定价误差的一个因素. 而现今国内债券市场中, 债券违约已不仅局限于民营企业债券, 2015年保定天威集团有限公司未能按期付息造成违约, 成为国企债券违约第一例. 之后国企央企违约事件已不再稀奇. 而同时观察到, 政府对于国有企业债券可能的违约进行了兜底, 这就可以看做政府对国有企业债券存在着隐性担保. 出于缓解地方财政危机及保护国有资产等原因, 一旦国有企业遭受违约危机, 政府会通过财政补贴、注入资本等方式对其进行某种意义的担保. 政府的这种隐性担保会降低债券的违约风险, 使得传统的结构化模型在对于国内市场的债券定价产生误差, 从而如何度量政府隐性担保, 得到债券的合理定价引起了越来越多学者的重视.

国内很多学者利用计量模型对政府隐性担保进行了分析. 韩鹏飞等人^[16]通过回归分析的方法, 考虑了债券特征、发行人特征、宏观经济及是否国有企业等因素, 发现政府隐性担保降低了国有企业债券投资者的风险, 从而降低了信用利差. 同时结果显示信用评级越低, 对风险的降低

效应越明显. 汪莉等人^[17]将地方政府财政盈余与GDP比值作为政府隐性担保能力的代理变量, 研究了不同地区政府隐性担保对城投债发行利率的影响, 结果显示经济较为发达的地区, 政府的隐性担保能力较强, 从而有利于降低城投债的发行利率. 钟辉勇等人^[18]考虑了企业变量、债券变量和地方政府财政收入变量, 利用统计方法分析了政府隐性担保对城投债的影响, 发现地方财政收入的增加及有担保的情况有利于提高城投债的评级, 但对信用利差的降低无显著影响. 罗荣华等人^[19]利用地方财政因素、发行人因素和宏观因素等因素, 通过无担保城投债和有第三方担保的城投债数据对比分析, 得到无担保城投债与有第三方担保的城投债在发行利差上并无明显差别, 此结果说明市场认为无担保城投债背后存在着隐性担保, 同时地方政府的财力会影响城投债的发行利差. 王博森等人^[20]最先选取约化模型估计得到了隐性担保概率, 结果表明政府隐性担保是影响我国债券价格的重要因素, 且AA评级中, 中央国有企业债券和地方国有企业债券定价中, 政府隐性担保概率分别为39.9%和6.7%, 而相应的AA+评级中, 政府隐性担保概率分别为33.9%和1.2%. 沈晓萍等人^[21]利用2010-2018年城投债数据构建多元回归模型, 发现隐性担保对城投债的发行利差产生了显著影响, 且在无担保时更强. 王剑峰等人^[22]利用正交分解法剥离出政府隐性担保的信息, 并利用计量模型研究发现城投公司混合所有制降低了政府隐性担保的作用.

通过上述文献的研究可以发现政府隐性担保确实存在于我国债券之中, 对债券定价产生了一定的影响. 但是, 目前我国的债券定价多数情况下使用国外现有模型, 而由于国内外市场存在显著差异, 如何改进传统的模型使之符合国内市场变得十分重要. 所以, 本文将中国市场特有的隐性担保考虑进结构化模型中, 使得债券定价公式更加符合中国市场, 以减小定价误差. §2假设无风险利率服从Vasicek随机过程, 并且采取了模糊集的思想方法, 将政府隐性担保概率的大小作为参数加入到违约时刻的偿付中, 得到适合中国市场的定价模型并求出含政府隐性担保债券的定价公式. §3为利率模型参数估计, 首先基于最小二乘法的思路利用国债数据对Vasicek模型中参数进行了估计. §4为债券市场的实证分析, 利用民营企业债数据及债券发行主体特征数据对违约损失率进行估计, 最后分析得到不同类型公司债及不同行业公司债中的政府隐性担保概率的变化规律. 如此处理, 可以大大简化整个估计过程, 避免将所有的参数合在一起估计, 从而导致参数估计问题的复杂化. §5为总结与展望.

§2 债券定价模型

2.1 模型假设

1. 金融市场是完全的.
2. 公司的税前资产价值在风险中性测度 Q 下可写成

$$\frac{dV_t}{V_t} = r_t dt + \sigma_v dW_t, \quad (1)$$

其中, r_t 为 t 时刻的利率, σ_v 为常数, 表示资产收益的波动率, W_t 为标准Brownian运动. 假设税率为 θ , 则公司资产的税后价值为 $V_t^* = (1 - \theta)V_t$.

3. 在风险中性测度 Q 下, 利率服从Vasicek过程

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r dZ_t. \quad (2)$$

其中 a, b, σ_r 均为常数, Z_t 为标准Brownian运动. dW_t 和 dZ_t 的相关系数为常数 ρ , 即

$$\text{cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt.$$

由以上假设可得, 一到期日为 T 的零息债券价格为^[25]

$$A(r, t; T) = \exp(A(t; T) - rB(t; T)). \quad (3)$$

其中

$$A(t; T) = \frac{1}{a^2} [B(t; T) - (T - t)] \left(a^2 b - \frac{\sigma_r^2}{2} \right) - \frac{\sigma_r^2}{4a} B^2(t; T), \quad B(t; T) = \frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right).$$

4. 公司发行有限期限的债券. C, P 和 T 分别表示所发债务的息票, 本金和期限. 则由上假设可知公司避税部分为 θC .

5. 当公司资产下降至一外生违约边界 $V_B(r_t, t; P, T)$ 时, 发生违约, 令

$$V_B(r_t, t; P, T) = \frac{PA(r_t, t; T)}{1 - \theta}. \quad (4)$$

若 $V_t > V_B$, 公司连续付息 c . 若 $V_t < V_B$, 公司发生违约, 记 $\alpha \in (0, 1)$ 为违约损失率, 则此时会有 α 部分的资产将会在清算过程中损失. 此时考虑政府可能出面的担保行为, 且假设政府进行担保的可能性与其他因素相互独立, 若设公司隐性担保概率为 p , 则概率意义下违约时支付给债券持有者部分为

$$p(P + cT)A(r_t, t; T) + (1 - p)(1 - \theta)(1 - \alpha)V_B(r_t, t; P, T). \quad (5)$$

即若政府对公司债务进行担保, 则债券持有人将有概率 p 得到按无风险债券市值折算的全部本息的价值(若为零息债券令 $c = 0$); 若政府不对公司债务进行担保, 则债券持有人将得到公司经清算剩余全部税后资产.

首达时间是资产价值 V_t 首次触碰外生违约边界 V_B 的时间, 即

$$\tau = \inf\{t | V_t \leq V_B(r_t, t; P, T), t \in [0, T]\}. \quad (6)$$

可以发现首达时间 τ 依赖于 V 和 V_B 两个随机变量, 是由两个Brownian运动驱动的随机过程, 令

$$X_t = \ln \left[\frac{V_t}{V_B(r_t, t; P, T)} \right]. \quad (7)$$

则首达时间 τ 为 X_t 由上触碰至0的时间, 而 X_t 可通过Brownian运动的组合变换转换为一维随机过程, 设初始时刻

$$X_0 = \ln \left[\frac{V_0}{V_B(r_0, 0; P, T)} \right] > 0. \quad (8)$$

2.2 零息债券模型

针对到期日为 T , 面值为 P 的零息债券, 由(5)可得债券持有者的现金流 $d(s)$ 可表示为

$$d(s) = E \left\{ P\delta(s - T)1_{(T \leq \tau)} + [pPA(r_s, s; T) + (1 - p)(1 - \theta)(1 - \alpha)V_B(r_s, s; P, T)]\delta(s - \tau)1_{(\tau < T)} \right\}. \quad (9)$$

其中, $1_{(\cdot)}$ 为示性函数, $\delta(x)$ 为狄拉克函数

$$\begin{cases} \delta(x) = 0, & x \neq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \end{cases}$$

(9)第一项表示: 若直到到期日未发生违约, 则需支付给债券持有者全部本金; 第二项表示: 若在到期日之前发生违约, 在政府隐性担保的影响下, 债券持有者有 p 的概率得到按无风险债券价格折算的全部本金 $P\Lambda(r_\tau, \tau; T)$, 有 $1-p$ 的概率得到公司的全部剩余资产

$$(1-\theta)(1-\alpha)V_B(r_\tau, \tau; P, T).$$

则由以上可得公司在0时刻发行的债务总值为

$$D(X, T; \alpha, p) = \int_0^T e^{-\int_0^s r_u du} d(s) ds = (1-\alpha G(X, T; T))P\Lambda(r, 0; T) + p\alpha P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T). \quad (10)$$

其中 $G(X, T; T)$ 的表达式由Ju Nengjiu等人^[23]给出.

$$G(X, t; T) = N\left[\frac{-X - \mu_g(t; T)}{\sqrt{\Sigma(t; T)}}\right] + e^{-2\mu_g(t; T)X/\Sigma(t; T)} N\left[\frac{-X + \mu_g(t; T)}{\sqrt{\Sigma(t; T)}}\right],$$

$$\Sigma(t; T) = \sigma_v^2 t + \frac{\sigma_r^2}{a^2} [t + e^{-2a(T-t)} B_2(t) - 2e^{-a(T-t)} B_1(t)] + \frac{2\rho\sigma_v\sigma_r}{a} [t - e^{-a(T-t)} B_1(t)], \quad (11)$$

$$\mu_g(t; T) = -\frac{\Sigma(t; T)}{2}, \quad B_1(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a}, \quad B_2(t) = \frac{1 - e^{-2at}}{2a}.$$

证 记

$$G(X, t; T) = E_0^Q \left[\frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{\Lambda(r_0, 0; T)} 1_{(\tau < t)} \right]. \quad (12)$$

对 X_t 运用Itô公式, 可得

$$dX_t = \left[\frac{\sigma_p^2(t; T)}{2} - \frac{\sigma_v^2}{2} \right] dt + \sigma_v dW_t + \sigma_p(t; T) dZ_t, \quad (13)$$

其中 $\sigma_p(t; T) = \sigma_r B(t; T)$, 定义与 Q 等价的新测度 R , (12)等价于

$$G(X, t; T) = E_0^R [1_{(\tau < t)}]. \quad (14)$$

接着做测度变换得

$$dW_t^R = dW_t + \rho\sigma_p(t; T)dt, \quad dZ_t^R = dZ_t + \sigma_p(t; T)dt,$$

此时(13)可重写为

$$dX_t = -\frac{1}{2} [\sigma_v^2 + \sigma_p^2(t; T) + 2\rho\sigma_v\sigma_p(t; T)] dt + \sigma_v dW_t^R + \sigma_p(t; T) dZ_t^R = -\frac{\sigma^2(t; T)}{2} dt + \sigma(t; T) d\bar{W}_t^R, \quad (15)$$

其中 $d\bar{W}_t$ 是一维标准Brownian运动.

$$\sigma(t; T) = \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_p^2(t; T) + 2\rho\sigma_v\sigma_p(t; T)}. \quad (16)$$

函数 $G(X, t; T)$ 服从倒向Kolmogorov方程

$$-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t; T)\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} + \frac{1}{2}\sigma^2(t; T)\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} = 0, \quad (17)$$

边界条件为 $G(X, 0; T) = 0, G(0, t; T) = 1$. 显然, (10)中的 $G(X, t; T)$ 满足边界条件, 那么需要检验其是否满足(17). 直接计算得出

$$\frac{\partial G}{\partial X} = -n\left(\frac{X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right) \frac{1}{\sqrt{\Sigma}} - n\left(\frac{X + \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right) \frac{e^X}{\sqrt{\Sigma}} + e^X N\left(\frac{-X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} = n\left(\frac{X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right) \frac{X - \Sigma/2}{\Sigma^{\frac{3}{2}}} + n\left(\frac{X + \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right) \frac{e^X(X + \Sigma/2)}{\Sigma^{\frac{3}{2}}} - 2n\left(\frac{X + \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right) \frac{e^X}{\sqrt{\Sigma}} + e^X N\left(\frac{-X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}}\right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = n \left(\frac{X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}} \right) \left[\frac{X_0 \sigma^2(t; T)}{2\Sigma^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma^2(t; T)}{4\Sigma^{\frac{1}{2}}} \right] + e^{Xn} \left(\frac{X - \Sigma/2}{\sqrt{\Sigma}} \right) \left[\frac{X \sigma^2(t; T)}{2\Sigma^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sigma^2(t; T)}{4\Sigma^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (20)$$

其中 $n(x) = n(-x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$ 为标准正态分布密度函数. 将(18)-(20)代入(17), 就可证明 $G(t; T, X_0)$ 满足(17).

对任意随机变量 $\tilde{x}$, $f(t)$ 为其密度函数, 则期望 $E[\delta(\tilde{x} - x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - x)f(t)dt = f(x)$. 由(4), 可记 $(1 - \theta)V_B(r_s, s; P, T) = P\Lambda(r_s, s; T) = PE_s^Q[e^{-\int_s^T r_u du}]$, 则可得

$$\begin{aligned} & P \int_0^T E_0^Q \left[e^{-\int_0^s r_u du} E_s^Q [e^{-\int_s^T r_u du}] \delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)} \right] ds = \\ & P \int_0^T E_0^Q \left[e^{-\int_0^T r_u du} \delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)} \right] ds = \\ & P\Lambda(r, 0; T) \int_0^T E_0^Q \left[\frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{\Lambda(r_0, 0; T)} \delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)} \right] ds = \\ & P\Lambda(r, 0; T) \int_0^T E_0^R [1_{(\tau < T)}] ds = P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T). \end{aligned} \quad (21)$$

根据(9)和(21), 可得0时刻的债务总值为

$$\begin{aligned} D(X, T; \alpha, p) &= \int_0^T E_0^Q \left[e^{-\int_0^s r_u du} (P\delta(s - T) 1_{(T \leq \tau)}) \right] ds + \\ & \int_0^T E_0^Q \left[e^{-\int_0^s r_u du} (pPE_s^Q [e^{-\int_s^T r_u du}] \delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)}) \right] ds + \\ & \int_0^T E_0^Q \left[e^{-\int_0^s r_u du} ((1 - p)(1 - \alpha)PE_s^Q [e^{-\int_s^T r_u du}] \delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)}) \right] ds = \\ & PE_0^Q \left[e^{-\int_0^T r_u du} 1_{(T \leq \tau)} \right] + \\ & pP\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T) + (1 - p)(1 - \alpha)P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T) = \\ & P\Lambda(r, 0; T)(1 - G(X, T; T)) + \\ & (1 - \alpha)P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T) + p\alpha P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T). \end{aligned} \quad (22)$$

整理(22)可得公式(10).

与无政府隐性担保的情况相比^[23], (10)多出一项 $p\alpha P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T)$, 此项为正, 说明相比于无政府隐性担保的情况, 考虑政府隐性担保的债券价值更高. 若令 $p = 0$, 相当于无政府隐性担保的情况.

2.3 一次性付息模型

为简化模型而不影响本文的结果, 本小节假设债券为一次性付息的付息债券, 在到期日一次性付息为 C , 则可得在任意时刻 $s (s \leq T)$ 债券持有者的现金流 $d(s)$ 可表示为

$$\begin{aligned} d(s) &= E[(P + C)\delta(s - T) 1_{(T \leq \tau)} + [p(P + C)\Lambda(r_s, s; T) + \\ & (1 - p)(1 - \theta)(1 - \alpha)V_B(r_s, s; P, T)]\delta(s - \tau) 1_{(\tau < T)}]. \end{aligned}$$

由以上可得, 公司在在0时刻发行的债务总值为

$$D(X, T; \alpha, p) = (1 - \alpha G(X, T; T))PA(r, 0; T) + \\ CA(r, 0, T)[1 - G(X, T; T)] + p(\alpha P + C)A(r, 0, T)G(X, T; T).$$

§3 模型参数

模型中涉及的变量大致可分为: 第一类为公司债发行主体的变量, 包括公司的资产价值 V 及资产波动率 σ_V ; 第二类为公司债自身的特征变量, 包括公司债的剩余到期时间 τ 及票面利率 c 等; 第三类为利率模型参数, 包括无风险利率 r 、利率的波动率 σ_r 及其他参数 a, b ; 剩余参数还包括利率与资产价值的相关系数 ρ 、税率 θ 、公司的违约损失率 α 以及政府的隐性担保概率 p .

公司资产价值和资产收益波动率都是不可观测的, 依据Eom等^[12]的做法, 采用股票市值和全部负债账面价值的和作为公司资产价值的代理变量. 根据Schaefer等^[24]发现资产波动率 σ_v 与股票收益波动率 σ_E 的关系近似满足

$$\sigma_v = (1 - L)\sigma_E, \quad (23)$$

以此来近似计算公司资产收益的波动率. 其中, L 为公司的杠杆率, 即负债与资产价值之比. 在每个债券观测样本时刻 t , 计算 t 时刻前150个交易日公司股票收益的波动率作为 σ_E 的代理变量.

计算每一只零息债券时, 选择1年期的中债国债即期收益率作为无风险利率 r_0 的代理变量. 其次, 估计Vasicek模型中其他参数 a, b, σ_r 时, 由于国债不存在违约情况, 可利用息票剥离的思想, 通过下面的(24)将息票 C_g 以到期收益率 $\tilde{r}$ 贴现至观测时刻 t , 观测价格 $\hat{P}$ 与息票的贴现价格差即为对应零息债券在时刻 t 的近似观测价格 $\tilde{P}$, 即

$$\tilde{P} = \hat{P} - C_g \sum_i e^{-\tilde{r}(t_i - t)}. \quad (24)$$

其中, t_i 为观测日至到期日的剩余付息时刻, 转换为零息债价格后, 通过非线性最小二乘法求得Vasicek随机利率模型的参数集 $\{a, b\}$ 的估计值, 得到 $a = 1.0210, b = 0.0360$. σ_r 的计算方法与 σ_E 一样, 选取观测样本前150个交易日的1年期国债利率的波动率作为代理变量^[14].

由于国内债券市场起步晚, 违约损失率 α 的数据有所缺失, 本文利用市场交易数据采用最小二乘法间接得到: 收集民营企业的债券数据, 由于政府对民营企业债的隐性担保概率为0, 即 $p = 0$. 此时, 在其他参数已经确定的情况下, 利用民企债券的市场价格及债券价格论证公式(10), 通过最小二乘法计算可得 α 的估计值, 具体做法如下.

首先, 将观测到的付息债价格转换为零息债价格, 由于公司债存在违约情况, 直接用(24)存在较大误差, 故假设付息债券的付息日为每期期末, 记息票支付日为 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_m$, 息票率为 c , 则付息债券价格 $\hat{P}(t, T_m)$ 可转换为零息债券价格

$$\tilde{P}(t, T_m) = \hat{P}(t, T_m) - c \sum_{i=1}^m P(t, T_i). \quad (25)$$

(25)将付息债的息票部分看做具有违约风险的零息债券, 相较于直接利用(24)所得零息债券市场价格结果误差更小. 接着, 记目标函数 $Y = \sum_{i=1}^N (\tilde{P}_i - P_i)^2$, 其中 N 表示所用的民企债的数据个数, $\tilde{P}_i$ 为债券的实际观测价格所得相应零息债券数据, P_i 为由(10)得到的债券的理论价格, 求使得 Y 最小时的 α 的值作为理论值的估计值. 为此, 可将(10)改写为 $P = A + B\alpha$, 其中

$$A = PA(r, 0; T), \quad B = -PA(r, 0; T)G(X, T; T). \quad (26)$$

注意到上式中不含有待定参数 p , 直接在 Y 的表达式中对 α 求导, 并令其导数值为0, 可得 α 估计值

的计算公式为

$$\frac{\sum_{i=1}^N(\tilde{P}_i - A_i)B_i}{\sum_{i=1}^N B_i^2}.$$

(27)

其中 A_i, B_i 分别为第 i 个观测价格 $\tilde{P}_i$ 处的实际数据代入公式(27)计算所得的 A, B 对应值.

得到违约损失率 α 的估计值以后, 利用地方国有企业和中央国有企业的债券数据, 采用同样的方法计算, 可得到政府的隐性担保概率 p 估计值的计算公式为

$$\frac{\sum_{i=1}^M(\tilde{P}_i - C_i)D_i}{\sum_{i=1}^M D_i^2}.$$

(28)

其中, M 为国企债(央企债)的数据个数, C_i, D_i 分别为第 i 个观测价格 $\tilde{P}_i$ 处的实际数据代入下面的公式(28)中计算所得的 C, D 对应值

$$C = P\Lambda(r, 0; T)[1 - \alpha G(X, T; T)], \quad D = \alpha P\Lambda(r, 0; T)G(X, T; T).$$

(29)

模型中税率的估计参考解文增^[14]的做法, 根据我国税法的规定, 目前公司的所得税为25%, 结构化模型参数估计方法及数据来源见表1.

表 1 利率模型参数估计

参数	参数名称	参数估计方法	数据来源
c	息票	给定	Wind数据库
$\hat{\tau}$	剩余到期时间	给定	Wind数据库
V	资产价值	公司负债加上股票市值	Wind数据库
σ_E	股票收益波动率	样本时刻前150个交易日的股票收益的波动率	Wind数据库
θ	税率	0.25	无
r_0	无风险利率	1年期的国债即期收益率	Wind数据库
a, b	利率模型参数	计算得到	无
σ_r	利率波动率	样本时刻前150个交易日1年期国债即期利率的波动率	Wind数据库
ρ	相关系数	1年期国债即期利率与公司股票收益的相关系数	Wind数据库
α	违约损失率	计算得到	无
p	隐性担保概率	计算得到	无

假设某一公司发债的本金为100元, 利率 $r_0 = 0.03$, 期限 $T = 10$, 利率的波动率 $\sigma_r = 0.25$, 参数 a, b 如上文所得 $a = 1.0210, b = 0.0360$, 税率 $\theta = 0.25$, 那么根据(4)可得公司的违约边界随债券的到期时间变化如图1. 从图中可以看出, 随着到期时间变短, 违约边界变大, 这与债券价格变化一致.

§4 实证结果分析及对比

本文国债及公司债的样本特征数据及交易所国债即期收益率均来自Wind数据库, 剩余期限包括1-10年, 时间间隔为1年. 选取2010年至2023年月度数据作为观测样本, 并对样本数据进行筛选: 首先, 本文研究对象仅限于固定利率且不含权债券, 故剔除浮动利率及累进利率债券, 同时含有回售权或提前偿还条款的公司债也不在本文研究范围, 予以删除. 其次, 本文剔除掉发行主体不在A股上市的公司债样本. 接着, 类似Eom等^[12]的做法, 由于剩余期限过短误差较大, 故删除剩余期限不到一年的观测样本. 处理后得到216家A股上市公司发行的422只债券, 共计12983个月度观测数据. 其中55家民营企业债券数据1938个, 106家地方国有企业债券数据5424个, 55家中央国有企业债券数据5621个.

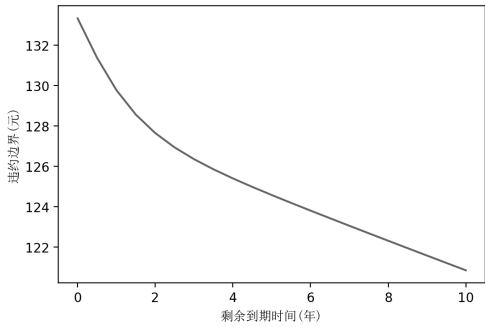


图 1 违约边界随到期时间变化情况

表 2 公司债样本特征统计

公司类型	公司个数	债券个数		样本个数		
全部	216	422		12983		
民营企业	55	72		1938		
地方国有企业	106	183		5424		
中央国有企业	55	167		5621		
特征		均值	标准差	最大值	最小值	中位数
民营企业	发行规模(亿元)	8.26	8.88	45.00	0.50	5.00
	发行期限(年)	6.35	2.73	10.00	1.00	7.00
	票面利率(%)	6.05	1.20	8.50	3.18	6.10
地方国有企业	发行规模(亿元)	13.30	10.12	70.00	1.00	10.00
	发行期限(年)	6.19	2.55	10.00	1.00	5.00
	票面利率(%)	5.12	1.13	8.20	2.58	5.14
中央国有企业	发行规模(亿元)	29.98	31.60	160.00	2.20	20.00
	发行期限(年)	6.80	2.64	10.00	1.00	7.00
	票面利率(%)	4.49	0.90	8.50	2.39	4.75

表2列举了不同类型公司债及其发行主体样本的特征,包括公司债的发行规模、发行期限、票面利率,根据债券发行期限不同,发行期限在1年至10年属于中期债券,本文公司债属于中期公司债.由表中数据,可以发现:首先,民企债、国企债和央企债的发行规模在逐渐增大.其中,民企债平均发行规模为8.26亿,地方国企债平均发行规模为13.30亿,央企债的平均发行规模为29.98亿.对比表3可以发现民营企业、地方国有企业、中央国有企业的资产价值与市值规模成递增趋势,这说明公司规模越大所需资金规模也越大,同时融资能力更强,因此债务发行规模也越大,杠杆率也更高.

表 3 样本公司资产结构特征统计

特征		均值	标准差	最大值	最小值	中位数
民营企业	资产价值(亿元)	269.44	452.07	2368.55	4.65	112.43
	市值(亿元)	109.17	177.52	1037.36	2.86	49.05
	杠杆率(%)	0.5450	0.1338	0.8141	0.1546	0.5489
地方国有企业	资产价值(亿元)	600.53	802.47	9194.15	7.18	345.27
	市值(亿元)	222.97	283.65	3292.46	5.39	129.50
	杠杆率(%)	0.5706	0.1617	0.8781	0.0694	0.6104
中央国有企业	资产价值(亿元)	4685.55	6098.53	27331.90	14.97	2482.07
	市值(亿元)	1903.39	3300.80	14987.53	13.62	728.91
	杠杆率(%)	0.6225	0.1411	0.8785	0.0686	0.6561

接着, 民企债、国企债和央企债三种类型债券的平均票面利率呈现出后者比前者减小的特征. 其中, 民企债的平均票面利率为 6.05%, 国企债的平均票面利率为 5.12%, 央企债的平均票面利率为 4.49%. 这是由于相对于民企债而言, 投资者认为国企债与央企债的所承担的风险更小, 所以要求的回报也更低.

下面的实证分析将债券分为三个不同的维度展开: 债券发行主体的性质, 债券发行主体的行业, 债券的剩余期限.

首先, 将全部公司债券样本的违约损失率看成一个常数, 由于政府对于民营企业不存在隐性担保, 因此对民企债而言, 政府隐性担保概率 $p = 0$. 在其他参数确定的情况下, 利用民企债交易数据通过(27)计算得到平均违约损失率 α . 之后利用地方国有企业及中央国有企业债券的交易数据通过(28)计算得到不同类型债券的政府的平均隐性担保概率 p , 计算结果见表4.

表 4 不同类型债券的违约损失率及隐性担保概率		
类型	违约损失率	政府隐性担保概率
民营企业	0.1085	0
地方国有企业	0.1085	0.6282
中央国有企业	0.1085	0.7059

由表4可得, 不同类型的债券政府的隐性担保概率也不同. 根据国企债和央企债的交易数据计算可得, 中央国有企业债券的平均隐性担保概率为0.7059, 明显高于地方国有企业债券的平均隐性担保概率0.6282, 这说明债券人认为当公司发生违约时, 中央政府相对于地方政府的兜底概率更大, 与文[20]结果一致. 这是因为中央国有企业的经营管理大部分受制于中央政府, 关系到国家的经济命脉, 政府对其债务的担保意愿较强. 同时相较于地方政府, 中央政府的财力更好, 对债务的兜底能力更强. 因此, 中央政府对央企债的担保意愿及担保能力相对于地方政府对地方国企债更高.

然后, 将相同行业的违约损失率看成一个常数, 则按照Wind行业分类, 计算出不同行业的平均违约损失率及政府隐性担保概率, 结果见表5.

表 5 不同行业的平均违约损失率及隐性担保概率			
Wind行业分类	违约损失率	地方国有企业债的 隐性担保概率	中央国有企业债的 隐性担保概率
材料	0.0622	0.2529	0.3490
工业	0.0940	0.5158	0.6055
房地产	0.1875	0.8396	0.9086
公用事业	0.1308	0.8278	0.8034
能源	0.1752	0.7309	0.5298
可选消费	0.1130	0.6412	0.8163
信息技术	0.2183	0.8146	0.9244

由表5可知, 整体来看, 材料行业的违约损失率最低为0.0622, 工业行业的违约损失率也较低为0.0940, 这是由于材料与工业属于有形资产密集的行业, 有形资产密集产业在发生违约后, 可将其资产进行拍卖从而有较高的回收率; 而信息技术行业的违约损失率最高为0.2183, 这是由于其属于技术密集型行业, 其无形资产占比较高, 用于抵押的存货和固定资产较少, 一旦发生违约, 相应的回收率也难以达到较高水平. 而针对信息技术行业, 国家高度重视并提出一系列的政策

鼓励信息技术的发展,这说明政府对于信息技术业存在着一定的隐性担保,且从计算结果可以看出中央政府及地方政府的隐性担保概率达到了0.9244和0.8146.同时可以看到房地产行业的违约损失率为0.1875,高于平均违约损失率,这是由于虽然房地产行业也属于有形资产密集行业,但其杠杆率普遍较高,当违约发生时,由于其负债过高使得违约损失率并不会过低.但国家及各地政府出台了一系列利好政策支持房地产市场平稳健康发展,比如延长了“金融16条”的期限,2023年7月28日以来,二三线城市陆续出台楼市优化政策等.这也体现在政府隐性担保概率相对较高,中央政府及地方政府的隐性担保概率分别为0.9086和0.8396,说明政府部门对房地产行业有着较强的担保意愿.

表 6 不同剩余到期时间的违约损失率及隐性担保概率

剩余到期时间	违约损失率	地方国有企业债的 隐性担保概率	中央国有企业债的 隐性担保概率
$1 < \tau < 5$	0.1055	0.6740	0.8186
$1 < \tau < 2$	0.0625	0.6754	0.8715
$2 < \tau < 3$	0.1095	0.6905	0.8576
$3 < \tau < 4$	0.1908	0.7446	0.8327
$4 < \tau < 5$	0.2052	0.7175	0.8151

注: 由于民企债样本数据量限制, 只有剩余期限在1-5年的计算结果

最后,按照剩余到期时间不同,计算公司的违约损失率及政府对国企债的隐性担保概率.由表6数据可得,随着剩余到期时间的增加,违约损失率呈现出明显的期限特征:离到期日越远,违约损失率越大.实际市场中,债券的剩余到期时间越长,不确定性因素越大,债券的违约概率越大.从模型来看,剩余到期时间越短,债券的违约概率变小,债券持有者理论所得将会变大,从而使得计算所得违约损失率变小.地方国企债的政府的隐性担保概率随着剩余到期时间增加呈现增长趋势,与此相反,央企债的政府隐性担保概率随着剩余到期时间的增加呈现下降趋势.也就是说地方国有企业对剩余到期时间更长的债券担保意愿更强,这可能是由于其需要以高担保吸引债券投资者的长期投资意愿,使其长期持有债券.而中央国有企业对剩余到期时间短的债券担保意愿更强,这可能是由于中央国有企业债本身风险较低,更倾向于保证即将到期的债务不违约.

§5 结论

本文从理论和实证两方面研究了中国政府对公司债的隐性担保问题.在理论模型方面,提出了存在赋税及变化违约边界的政府隐性担保债券的定价模型:考虑Vasicek利率模型下变化的违约边界,将政府的隐性担保概率作为概率常数加入债券定价模型中,在概率意义下求解得到了适合中国债券市场的零息债券价格的解析表达式.基于此定价公式,可进一步对含有政府隐性担保的债券进行理论分析.

在实证方面,首先需要进行付息债与零息债的转化,本文将单位零息债券价格作为贴现因子,将市场中付息债的价格转化为零息债价格进行计算,将与息票全部贴现的价格转换相比误差更小.其次,要对模型参数进行估计:针对Vasicek模型中待估参数,利用国债数据进行估计使得无风险利率的参数估计更加精确;而由于国内市场中违约损失率的缺失,本文提出:已知政府对

民企债的隐性担保概率为0, 确定其他参数后, 利用最小二乘法对违约损失率进行估计, 使得结果更加符合中国公司特征. 接着, 利用所得的违约损失率, 对地方国有企业债和中央国有企业债的政府隐性担保概率进行了实证分析: 结果显示, 利用民企债计算得到公司的平均违约损失率为0.1085, 地方国有企业债的政府隐性担保概率为62.82%, 中央国有企业债的政府隐性担保概率为70.59%; 按照不同行业及剩余到期时间对违约损失率和政府隐性担保概率与进行了分析, 发现随着剩余到期时间的变长, 违约损失率也在变大, 而地方国有企业债与中央国有企业债的变化趋势相反; 按照不同的行业进行分析, 发现材料的违约损失率最低为0.0622, 信息技术行业的违约损失率最高为0.2183, 同时信息技术与房地产行业的政府隐性担保概率相对较高.

本文在损失率的假设上确实存在一定的误差, 主要是由于目前已违约债券偿付数据的缺失, 导致无法根据市场对不同类型的债券违约损失率进行合理的估计, 只能对此进行假设. 随着债券违约事件的频发, 待统计数据完整可按照本文逻辑将违约损失率进行替换, 或在之后的研究中对此部分进行改进, 将不同类型企业的违约损失率参数分别进行估计. 同时, 本文所考虑违约边界尽管与利率有关, 其实是债务组合的贴现, 而实际中不同行业、不同类型的企业的违约边界并不相同. 而流动性作为债权定价的一个重要因素, 本文模型中并未体现, 这些将是之后研究的改进之处.

参考文献:

- [1] Merton R C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449-470.
- [2] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions[J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 351-367.
- [3] Longstaff F A, Schwartz E S. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt[J]. Journal of Finance, 1995, 50(3): 789-819.
- [4] Briys E, Varenne F D. Valuing risky fixed rate debt: an extension[J]. Journal of Financial & Quantitative Analysis, 1997, 32(2): 239-248.
- [5] Zhou Chunsheng. A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities[R]. Available at SSRN: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.39800>, 1997.
- [6] Kou S G, Wang Hui. First passage times of a jump diffusion process[J]. Advances in Applied Probability, 2003, 35(2): 504-531.
- [7] Geske R. The valuation of corporate liabilities as compound options[J]. Journal of Financial & Quantitative Analysis, 1977, 12(4): 541-552.
- [8] Leland H E, Toft K B. Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads[J]. Journal of Finance, 1996, 51(3): 987-1019.
- [9] Hilberink B, Rogers L C G. Optimal capital structure and endogenous default[J]. Finance & Stochastics, 2002, 6(2): 237-263.
- [10] Jarrow R A, Turnbull S M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. Journal of Finance, 2012, 50(1): 53-85.
- [11] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structures of defaultable bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12(4): 687-720.
- [12] Eom Y H, Helwege J, Huang Jingzhi. Structural models of corporate bond pricing: an empirical analysis[J]. Social Science Electronic Publishing, 2004, 17(2): 499-544.
- [13] Collin-Dufresne P, Goldstein R S. Do credit spreads reflect stationary leverage ratios?[J]. Journal of Finance, 2001, 56(5): 1929-1957.
- [14] 周孝坤. 公司债券定价结构化模型实证分析[J]. 社会科学家, 2006(4): 65-68.

- [15] 解文增, 孙谦, 范龙振. 结构化模型的实证研究—基于中国公司债的数据[J]. 投资研究, 2014(5): 34-49.
- [16] 韩鹏飞, 胡奕明. 政府隐性担保一定能降低债券的融资成本吗?—关于国有企业和地方融资平台债券的实证研究[J]. 金融研究, 2015(3): 116-130.
- [17] 汪莉, 陈诗一. 政府隐性担保、债务违约与利率决定[J]. 金融研究, 2015(9): 66-81.
- [18] 钟辉勇, 钟宁桦, 朱小能. 城投债的担保可信吗?—来自债券评级和发行定价的证据[J]. 金融研究, 2016(4): 66-82.
- [19] 罗荣华, 刘劲劲. 地方政府的隐性担保真的有效吗?—基于城投债发行定价的检验[J]. 金融研究, 2016(4): 83-98.
- [20] 王博森, 吕元祺, 叶永新. 政府隐性担保风险定价: 基于我国债券交易市场的探讨[J]. 经济研究, 2016(10): 155-167.
- [21] 沈晓萍, 尹鸿飞, 张兵, 等. 隐性担保会降低城投债的发行利差吗?[J]. 武汉金融, 2020(5): 56-64.
- [22] 王剑锋, 陈玉洁. 混合所有制改革与地方隐性债务风险—来自城投债盈余信息有效性的证据[J]. 海南大学学报: 人文社会科学版, 2023, 41(2): 104-113.
- [23] Ju Nengjiu, Ouyang Hui. Capital structure, debt maturity, and stochastic interest rates[J]. Journal of Business, 2006, 79(5): 2469-2502.
- [24] Schaefer S M, Strebulaev I A. Structural models of credit risk are useful: evidence from hedge ratios on corporate bonds[J]. Journal of Financial Economics, 2008, 90(1): 1-19.
- [25] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177-188.

Pricing model with government guarantee under changing default boundary

ZHAO Dan^{1,2}, SHEN Zhen-yi^{1,2}, XU Cheng-long³

(1. College of Computer Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Bank of Hangzhou Co., Ltd., Hangzhou 310003, China;

3. School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: The bond pricing model is extended by introducing the parameters of government implicit guarantee probability and default loss rate, and under the assumption that the interest rate follows the Vasicek model, a dynamic bond pricing formula with taxation and variable default boundary is derived in the probability sense. An empirical analysis of the government implicit guarantee probability is conducted using different types of corporate bond data in the bond market. The default loss rate in the domestic market is estimated by using private enterprise bond data combined with the least squares method. Based on the bond pricing formula, the government implicit guarantee effect for central enterprise bonds and state-owned enterprise bonds is analyzed separately. The research results show that: First, the implicit guarantee probability of central enterprise bonds is higher than that of state-owned enterprise bonds; Second, the default loss rate and implicit guarantee probability vary greatly across different industries, with materials and industry having lower default loss rates, and information technology and real estate having higher implicit guarantee probabilities; Third, the lower the remaining maturity of corporate bonds, the lower the default loss rate, showing obvious term structure characteristics, while the implicit guarantee probability of local state-owned enterprise bonds and central state-owned enterprise bonds show opposite trends.

Keywords: Vasicek model; defaultable bond; changed default boundary; implicit guarantee

MR Subject Classification: 91G30