高校应用数学学报
2025, 40(2): 243-252

仙人掌图的$D(2)$-点可区别全染色

高　杨[1]，汪银芳[2]，文　飞[2,3*]，李沐春[2]

(1. 兰州交通大学 交通运输学院，甘肃兰州 730070;

2. 兰州交通大学 应用数学研究所，甘肃兰州 730070;

3. 甘肃省复杂系统分析及控制基础学科研究中心，甘肃兰州 730070)

摘　要: 图G的k-$D(2)$-点可区别全染色是G的一个正常k-全染色f满足对$\forall u,v\in V(G)$, 当$d_G(u,v)\leq 2$时都有$C_f(u)\neq C_f(v)$, 其中$C_f(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}$. 将所用颜色数的最小值$k$称为图$G$的$D(2)$-点可区别全色数, 简记为$\chi_{2vt}(G)$. 应用数学归纳法结合Hall定理考虑了仙人掌图$G_T$的$D(2)$-点可区别全染色, 得到了$\chi_{2vt}(G_T)\leq\Delta+3$.

关键词: 仙人掌图; Hall定理; $D(2)$-点可区别全染色; $D(2)$-点可区别全色数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2025)02-0243-10

§1　引　言

本文考虑的图均为无向简单连通图. 设$G=(V,E)$是无向简单图, 其中$V(G)$和$E(G)$分别表示图G的点集与边集. 用$d(u)$表示点u的度数, $\Delta(G)=\max\{d(u)|u\in V(G)\}$表示图$G$的最大度. 在图$G$中, 点$u$和$v$之间最短路的长度称为$u$和$v$的距离, 记为$d(u,v)$, 用$C_f(u)=\{f(uv)|uv\in E(G)\}\cup f(u)$表示点$u$在染色$f$下的色集合, 用$F(u)$表示点$u$的禁用色集合.

图染色问题是图论研究的重要课题之一, 在资源分配、交通运输、优化控制等实际问题中有广泛应用. 如铁路车站多股线道车辆调度优化方法对于提升铁路货运运能, 提高铁路经济效益具有重要意义. 1993年, Burris在文[1]中首次提出了图的点可区别边染色的概念, 要求在正常边染色的基础上, 任意点的关联边所染颜色构成的色集合都不同. 2005年, 张忠辅等在文[2]中提出了邻点可区别全染色(简记为AVDTC)的概念, 即在一个正常全染色f的基础上, 需满足相邻点的色集合不同. 2006年, 张忠辅等在文[3]中推广了图的邻点可区别全染色, 提出了$D(\beta)$-点可区别全染色的概念.

定义1.1[3]　若图G的一个正常k-全染色f满足$\forall u,v\in V$且$1\leq d(u,v)\leq\beta$时都有$C(u)\neq C(v)$, 则称f为G的一个k-$D(\beta)$-点可区别全染色(简记为k-$D(\beta)$-VDTC), 其中$C(u)=\{f(u)\}\cup$

收稿日期: 2023-09-25　　修回日期: 2024-06-28

*通讯作者, E-mail: wenfei@lzjtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(12261055); 甘肃省自然科学基金重点项目(24JRRA222); 甘肃省基础研究创新群体项目(25JRRA805)

$\{f(uv)|uv \in E(G)\}$. 将图G的$D(\beta)$-点可区别全染色所需最少颜色数称为G的$D(\beta)$-点可区别全色数, 简记为$\chi_{2vt}(G)$.

当$\beta = 1$时, 即为图的邻点可区别全染色, 将图G的邻点可区别全色数简记为$\chi_{avt}(G)$. 张忠辅等在文[2]中猜想对任意阶数不小于6的图G, 都有$\chi_{avt}(G) \leq \Delta + 3$, 并证明对一些特殊图, 如树、二部图等是成立的. 当$\beta \geq 2$时, 较邻点可区别全染色的研究有很大的难度, 目前相关结果甚少. 如文献[3-4]给出了路、圈以及幂图$P_n^k(k \equiv 2(\mathrm{mod} 3))$的$D(\beta)$-点可区别全色数. 特别地, 当$\beta = 2$时, $D(\beta)$-点可区别全染色即为$D(2)$-点可区别全染色, 其相应的色数记为$\chi_{2vt}(G)$. 近年来, 国内学者对此展开了一些研究, 文献[5]中利用Hall定理讨论了树图的$D(2)$-点可区别全染色, 之后在文献[6-7]中分别研究了单圈图、双圈图的$D(2)$-点可区别染色并给出了确切的色数. 随着更深入的研究, 文献[8]中研究了$\Delta = 3$的图的$D(2)$-点可区别全染色, 并得到此类图的一个上界, 即$\chi_{2vt}(G) \leq 11$.

若f是图G的一个$D(2)$-点可区别全染色, 且$d(u, v) \leq 2$, 如果$C_f(u) = C_f(v)$, 那么称顶点u和v在染色f下是相冲突的. 如果一条边uv所染的颜色与它所有的邻边的颜色都不相同, 而且与2-距离内的所有点都可区分, 则称边uv被*合法染色*.

通常地, 若G可以分解成恰好由一个公共顶点v连接的两个非空子图G_1和G_2, 则称点v为图G的*分离点*. 不包含分离点的连通图称为*块*. *仙人掌图*是指一个连通图, 它的每个块为圈或边, 简记为G_T. 设仙人掌图G的每个块所构成的集合为$B = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$, 分离点所构成的集合为$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 每个块收缩成点所构成的顶点集为$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 以$X$和$Y$构造二部图$B(G) = (X, Y)$, 对任意的$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, x_i与y_j相邻当且仅当分离点x_i与块B_j关联, 此时称$B(G_T)$为图G_T的*块树*. 此外, 块树中度为1的顶点对应原图中的块称为*端块*. 如图1所示.

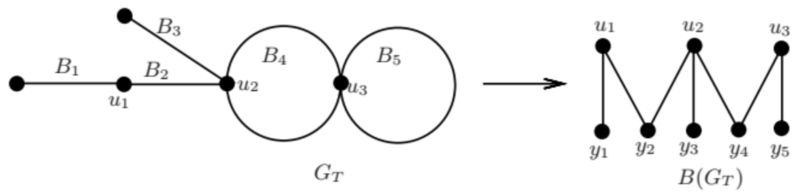

图 1 块数为5的仙人掌图及其对应的块树

2019年, 张辉等人在文献[9]中对仙人掌的图结构进行分析, 得到了这类图的邻点被扩展和可区别全色数不超过2, 从而证明Flandrin等在文[10]中提出的NESDTC猜想在仙人掌图上是成立的.

基于文献[9], 本文考虑了仙人掌图的$D(2)$-点可区别全染色, 并证明了仙人掌图G_T的$D(2)$-点可区别全色数不超过$\Delta + 3$.

§2 预备知识

首先回顾文[8]中关于临界点理论的一些基本知识.

引理2.1[11](Hall定理) 设G为具有二分类(X, Y)的二部图, 则G包含饱和X的每个顶点的匹配当且仅当$|N(S)| \geq |S|$对所有的$S \subseteq X$成立.

引理2.2[3]　设$P_n(n\geq 3)$是n阶的路, 则

$$\chi_{2vt}(P_n)=\begin{cases}3 & n=2;\\ 4 & n\geq 3.\end{cases}$$

引理2.3[3]　设图C_n是阶数为$n(n\geq 3)$的圈, 有

$$\chi_{2vt}(C_n)=\begin{cases}4 & n\geq 4\text{且}n\equiv 0(\mathrm{mod}4);\\ 5 & \text{其它}.\end{cases}$$

§3 主要结果

定理3.1　设G_T为仙人掌图, 则$\chi_{2vt}(G_T)\leq \varDelta+3$.

证　对仙人掌图G_T中的块数t进行归纳证明.

当$t=1$时, 分两种情形. 若块为边, 则$G_T=P_2$, 由引理2.2知$\chi_{2vt}(P_2)=3\leq \varDelta+3$; 若块为圈, 由引理2.3知, $\chi_{2vt}(C_n)\leq 5=\varDelta+3$. 因此, 块数为1时结论成立.

假设$t\geq 2$且对具有$t-1$个块的仙人掌图结论成立, 下面考虑有t个块的仙人掌图G_T. 设G_T对应的块树中某条最长路为P, 对P的某个端点对应的端块是边或圈分类讨论.

情形1 路P的至少有一个端点对应的端块是边.

不妨设对应的端块为边uv, 其中u为G_T的分离点. 由归纳假设知G_T-uv存在一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC记为f', 在f'的基础上给边uv和点v着色得到的染色方案记为f, 下证染色f是G_T的一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC. 设$d(u)=k$, 记点u不在最长路上的邻点为$u_1,\cdots,u_l$, 记点u在最长路上的除v的邻点为x.

若$d(u)=2$, 此时点u在2-距离内至多有$d(x)\leq\varDelta$个冲突点, 分别为$x,y_1,\cdots,y_{d(x)-1}$. 边uv有$|C\setminus\{f(u),f(ux)\}|=\varDelta+1$种可用色, 所以边$uv$能被合法染色, 不妨令$f(uv)=a$, 再用$b\in C\setminus\{a,f(u)\}$染给点$v$即可, 其中$C=\{1,2,\cdots,\varDelta+3\}$. 当$d(u)\geq 3$时, 类似的点$x$至多有2个, 分情况讨论.

情形1.1 仅有一个点x时, 记x除u的邻点为$y_1,\cdots,y_{d(x)-1}$. x在最长路上的除u的邻点至多有两个.

情形1.1.1 若x在最长路上的除u的邻点为1个, 不妨记为y_1.

此时讨论最坏的情形, 即$d(u)=d(x)=d(y_i)=k\leq\varDelta(1\leq i\leq t)$时, 其中$t\leq k-1$. 令$y_1,\cdots,y_t$是$G_T$中与$u$的度相同的点. 如图2所示.

令$G'=G_T-uv$, 由归纳假设知, G'存在一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC f', 在f'的基础上给边uv以及点v染色以延拓为图G_T的一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC f. 不妨设$f'(xy_1)=\varDelta+3$, $f'(ux)=c_1$, $f'(xy_i)=c_i$, 其中$2\leq i\leq t$.

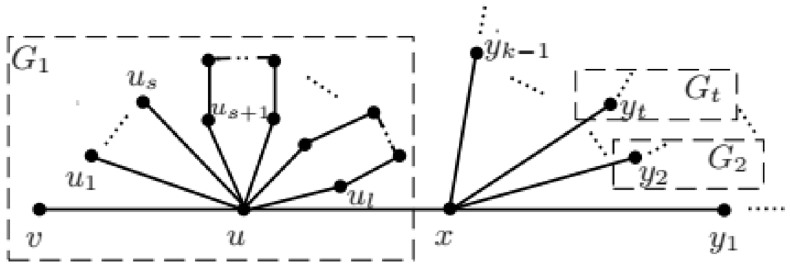

图 2 x在最长路上关联的块为边

构建一个二部图$B(X,Y)$, 令$X=\{c_1,\cdots,c_t\}$, $Y=\{A_1,\cdots,A_h\}$, 其中$A_j\subset\{1,\cdots,\Delta+2\}$且$|A_j|=k+1$. 此时$|Y|=\binom{\Delta+2}{k+1}$, 当$c_i\in A_j$时, 连接$c_i$与$A_j$. 注意到$f'(xy_1)=\Delta+3$, 由正常全染色可知$c_i\in\{1,2,\cdots,\Delta+2\}$, 其中$1\le i\le t$, 因此在$Y$中一共有$\binom{\Delta+1}{k}$ 个元素包含c_i. 又根据$B(X,Y)$的构造可知, $d(c_i)=\binom{\Delta+1}{k}$, 且$d(A_j)\le|X|<k$. 对任意的$S\subseteq X$, 都有$|N(S)|\ge d(c_i)=\binom{\Delta+1}{k}\ge\binom{k+1}{k}=k+1>k>|S|$, 由引理2.1知, $B(X,Y)$存在一个匹配能够饱和X中的所有点. 那么可以选取满足$f(ux)=c_1$的色集合A_j, 将A_j中除c_1外的其它颜色分配给点u及它的所有关联边.

记点u以及u关联的所有块所构成的图为G_1, 在G_1中, $\delta(G_1)\ge3$. 根据归纳假设知G_1存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1, 不失一般性, 可令$S_{f_1}(u)=A_j$, $f_1(ux)=c_1$. 记点y_i及其关联的所有块构成的图为G_i, 同样的G_i存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_i, 不失一般性, 令

$$S_{f_i}(y_i)=A_i\in Y\setminus\{A_j\},\ f_2(xy_i)=c_i, i=2,\cdots,t.$$

对任意$z\in V(G)\cup E(G)$, 定义图G的一个正常全染色f为

$$f(z)=\begin{cases}f'(z), & \text{其它};\\ \bigcup_{i=1}^{t}f_i(z), & z\in E(G_i)\cup V(G_i).\end{cases}$$

在上述染色f下, $\Delta+3\in S_f(x)\cap S_f(y_1)$, 但$\Delta+3\notin S(u)\cap S(y_2)\cap\cdots\cap S(y_t)$, 故$u$与$x,y_1,\cdots,y_t$的色集合可区分. 对于点$v$, 在$f_1$下, 点$v$与2-距离内所有点的色集合都不同. 在$f_i$下, 点$y_i$与2-距离以内的点的色集合都可区别, 其中$i=2,3,\cdots,t$. 故$f$是$G_T$的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC.

情形1.1.2 x在最长路上的除u的邻点有2个时, 不妨记为y_1,y_2.

当$d(u)=d(x)=d(y_i)=k\le\Delta(1\le i\le t)$时, $y_1,\cdots,y_t$是G_T中与u的度相同的点. 如图3所示.

令$G'=G_T-uv$, 由归纳假设知, G'存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f', 在f'的基础上给边uv以及点v染色以延拓为图G_T的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f. 不妨设$f'(xy_1)=\Delta+3$, $f'(xy_2)=\Delta+2$, $f'(ux)=c_1$, $f'(xy_i)=c_{i-1}$, 其中$3\le i\le t$.

构建一个二部图$B(X,Y)$, 令$X=\{c_1,\cdots,c_{t-1}\}$, $Y=\{A_1,\cdots,A_h\}$, 其中$A_j\subset\{1,\cdots,\Delta+1\}$且$|A_j|=k+1$. 此时$|Y|=\binom{\Delta+1}{k+1}$, 当$c_i\in A_j$时, 连接$c_i$与$A_j$. 注意到$f'(xy_1)=\Delta+3$, $f'(xy_2)=\Delta+2$, 由正常全染色可知$c_i\in\{1,2,\cdots,\Delta+1\}$, 其中$1\le i\le t$, 因此在$Y$中一共有$\binom{\Delta}{k}$个元素包含$c_i$. 又根据二部图的构造可知, $d(c_i)=\binom{\Delta}{k}$, 且$d(A_j)\le|X|<k$. 对任意的$S\subseteq X$, 都有$|N(S)|\ge d(c_i)=\binom{\Delta}{k}\ge\Delta\ge k>|S|$, 由引理2.1知, $B(X,Y)$存在一个匹配能够

饱和X中的所有点. 那么可以选取满足$f(ux)=c_1$的色集合A_j, 将A_j中除c_1外的其它颜色分配给点u及它的所有关联边.

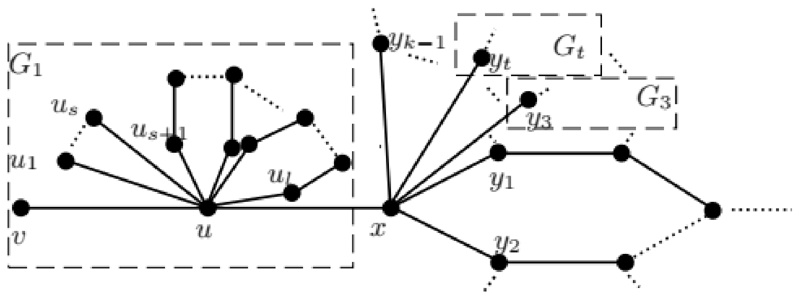

图 3 x在最长路上关联的块为圈

记点u以及u关联的所有块所构成的图为G_1, 在G_1中, $\delta(G_1)\geq 3$. 根据归纳假设知G_1存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1, 不失一般性, 可令$S_{f_1}(u)=A_j$, 且$f_1(ux_1)=c_1$. 记点y_i及其关联的所有块构成的图为G_i, 同样的G_i存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_i, 不失一般性, 令$S_{f_i}(y_i)=A_i\in Y\setminus\{A_j\}$, 且$f_2(xy_i)=c_i(i=3,\cdots,t)$.

对任意$z\in V(G)\cup E(G)$, 定义图G的一个正常全染色f为

$$f(z)=\begin{cases} f^{'}(z), & \text{其它;}\\ f_1(z), & z\in E(G_1)\cup V(G_1);\\ \bigcup_{i=3}^{t} f_i(z), & z\in E(G_i)\cup V(G_i).\end{cases}$$

在上述染色f下, $\{\Delta+2,\Delta+3\}\subseteq S_f(x)$, $\Delta+3\in S_f(y_1)$, $\Delta+2\in S_f(y_2)$. 而$\{\Delta+3,\Delta+2\}\nsubseteq S(u)\cap S(y_3)\cap\cdots\cap S(y_t)$, 故$u$与$x,y_1,\cdots,y_t$的色集合不同. 对于点$v$, 在$f_1$下, G_1是2-距离点可区别的. 在f_i下, 点y_i与2-距离以内的点的色集合都可区别, 其中$i=3,4,\cdots,t$. 故f是G_T的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC.

情形1.2 类似x的点有2个时, 不妨设为点$x_i(i=1,2)$, $d(u)\geq 3$.

不妨设点u,x_1,x_2,y_1,y_2 所在的圈为C, 记点x_i在圈C上除u的邻点为点$y_i(i=1,2)$(如果有). 点x_1, x_2, y_1, y_2都可以关联其它的块, 点x_1, x_2, y_1, y_2上关联的块可以为边和圈. 现考虑$d(u)=d(x_1)=d(y_1)=d(x_2)=d(y_2)=k$ 的情况. 如图4所示.

点u在2-距离内至多有4个冲突点分别为x_1, x_2, y_1, y_2. 边uv有$\Delta+3-d(u)$种可用色. 假设边uv不能被合法染色, 易得$d(u)\geq\Delta-1$. 下面分为3种子情形讨论.

情形1.2.1 $d_G(u)=\Delta-1$.

此时, $G-uv$存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1. 不失一般性, 可令$f_1(u)=1$, $f_1(ux_1)=2$, $f_1(ux_2)=3$, $f_1(uu_i)=i+3$, 其中$i=1,\cdots,\Delta-4$. 那么就一定有$S_{f_1}(x_i)\cup S_{f_1}(y_i)=\{1,\cdots,\Delta-1,\Delta+j-1\}$, $1\leq j\leq 4$, $i\in\{1,2\}$. 若存在$d(u_i)=1$, 则将该悬挂边的颜色改染为$\Delta+2$色, 接着给边uv染$\Delta+3$色. 重染后, 在G中, 点u_i和v有至多$d_G(u)-2=\Delta-3$个冲突点, 点u_1有$\Delta+1$种可用色, $\Delta+1-(\Delta-3)=4>0$, 只需从这剩下的4种颜色任选两种染给点u_1和v.

若对任意的$d(u_i)=2$, $i=1,2,\cdots,\Delta-4$. 记点u及其关联的所有块构成的图为$G^{'}$. 由归纳假设知$G^{'}$存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC $f^{'}$. 不失一般性, 可令$S_{f^{'}}(u)=\{1,\cdots,\Delta-2,\Delta+2,\Delta+3\}$, $f^{'}(ux_1)=2$, $f^{'}(ux_2)=3$. 这样就得到了G的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC.

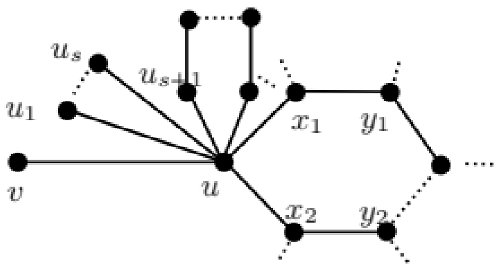

图 4 u在最长路上关联的块为圈

情形1.2.2 $d_G(u)=\Delta$.

此时$G-uv$存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1. 不失一般性, 可令$f_1(u)=1$, $f_1(ux_1)=2$, $f_1(ux_2)=3$, $f_1(uu_i)=i+3$, 其中$i=1,\cdots,\Delta-3$. 那么就一定有$S_{f_1}(x_i)\cup S_{f_1}(y_i)=\{1,\cdots,\Delta,\Delta+j\}$, $i\in\{1,2\}$, $1\leq j\leq 4$. 若存在$d(u_i)=1$, 则给边uu_i重染$\Delta+2$色, 将Δ色改染成$\Delta+3$色. 重染后, 在G中, 点u_1有至多$\Delta-3$个冲突点, 点u_1有$\Delta+1$种可用色, $\Delta+1-(\Delta-3)=4>0$, 只需从这剩下的4种颜色任选两种染给点u_1和v. 若任意的$d(u_i)=2$, $i=1,2,\cdots,\Delta-4$. 记点u及其关联的所有块构成的图为$G^{'}$. 由归纳假设知$G^{'}$存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC $f^{'}$. 不失一般性, 可令$S_{f^{'}}(u)=\{1,\cdots,\Delta-1,\Delta+2,\Delta+3\}$. 这样就得到了$G$的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC.

情形1.2.3 $d_G(u)\leq\Delta-2$.

此时边uv有$\Delta+3-d(u)\geq 5$种可用色, 可以在剩下的5种颜色中选取一个颜色染边uv, 使得点u的色集合不与x_1, x_2, y_1, y_2的色集合相同. 点v有至多$d(u)-3\leq\Delta-3$个冲突点, 点v有$\Delta+1$种可用色, $\Delta+1-(\Delta-3)=4>0$, 可以在剩下的4种颜色中选取一个颜色染给点v, 使得点v的色集合不与至多$\Delta-3$个冲突点的色集合相同.

情形2 任意一条最长路P的每个端点对应的端块均为圈.

设u_1为块树中某一条最长路的最后一个分离点, $C_m(m\geq 3)$是G_T的块树中最长路的某端点对应的端块, 并设$C_m=u_1u_2\cdots u_mu_1$, 对点u_1的除u_2和u_m的任意一个邻点x, 点u_1在G_T的块树上最长路上的邻点x至多有两个, 分以下两种情形讨论.

情形2.1 类似的x仅有一个时, 不妨设为x.

记x除u_1的其它邻点为y_i, 其中$i=1,2,\cdots,d(x)-1$. 此时讨论最坏的情形即$d(u_1)=d(x)=d(y_i)=k<\Delta(1\leq i\leq t)$时, 令$y_1,\cdots,y_t$是$G_T$中与点$u_1$的度相同的点. 此时$d(u_1)\geq 3$, 此时点$u_1$有至多$d(x)\leq\Delta$个冲突点. 令$G^{'}=G_T-C_m$, 由归纳假设知, $G^{'}$存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC $f^{'}$, 在$f^{'}$的基础上给圈C_m染色以延拓为图G_T的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f.

点x在最长路上的除u_1的邻点y至多有两个, 分两种情形考虑.

情形2.1.1 仅有一个类似的点y, 不妨设为y_1. 如图5所示.

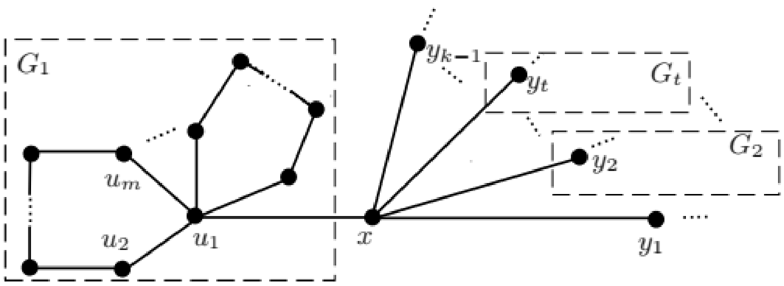

图 5 x在最长路上关联的块为边

不妨设$f^{'}(xy_1)=\Delta+3$, $f^{'}(u_1x)=c_1$, $f^{'}(xy_i)=c_i$, 其中$2\leq i\leq t$.

构建一个二部图$B(X,Y)$, 令$X=\{c_1,\cdots,c_t\}$, $Y=\{A_1,\cdots,A_h\}$, 其中$A_j\subset\{1,\cdots,\Delta+2\}$且$|A_j|=k+1$. 此时$|Y|=\binom{\Delta+2}{k+1}$, 当$c_i\in A_j$时, 连接$c_i$与$A_j$. 又$f^{'}(x_1y_1)=\Delta+3$, 故由正常全染色可知$c_i\in\{1,2,\cdots,\Delta+2\}$, 其中$1\leq i\leq t$, 因此在$Y$中一共有$\binom{\Delta+1}{k}$个元素包含$c_i$. 又根据二部图的构造可知, $d(c_i)=\binom{\Delta+1}{k}$, 且$d(A_j)\leq k-1$. 对任意的$S\subseteq X$, 都有$|N(S)|\geq d(c_i)=\binom{\Delta+1}{k}\geq\binom{k+1}{k}=k+1>k>|S|$, 由引理2.1知, $B(X,Y)$存在一个匹配能够饱和X中的所有点. 那么可以选取满足$f(ux_1)=c_1$的色集合A_j, 将A_j中除c_1外的其它颜色分配给点u及它的所有关联边.

记点u_1及其关联的所有的块构成的图为G_1, 由归纳假设知G_1存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1, 不失一般性, 令$S_{f_1}(u_1)=A_j$, $f_1(u_1x)=c_1$. 记点y_i及其关联的所有块构成的图为G_i, 由归纳假设知G_i存在一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC f_i, 不失一般性, 令$S_{f_2}(y_i)=A_i\in Y\setminus\{A_j\}$, $f_1(xy_i)=c_i(2\leq i\leq t)$.

对任意$z\in V(G)\cup E(G)$, 定义图G的一个正常全染色f为

$$f(z)=\begin{cases}f^{'}(z), & \text{其它};\\ \bigcup_{i=1}^{t}f_i(z), & z\in E(G_i)\cup V(G_i).\end{cases}$$

在上述染色f下, $\Delta+3\in S_f(x)\cap S_f(y_1)$, 但$\Delta+3\notin S(u_1)\cap S(y_2)\cap\cdots\cap S(y_t)$, 故$u_1$与$x$, y_1, $\cdots$, y_t的色集合不同. 在f_i下, y_i与2-距离内所有点的色集合都不同, 其中$i=2,3,\cdots,t$. 所以f是G_T的一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VDTC.

情形2.1.2 类似y的点有两个时, 不妨设为y_1,y_2. 如图6所示.

不妨设$f^{'}(xy_1)=\Delta+3$, $f^{'}(xy_2)=\Delta+2$, $f^{'}(u_1x)=c_1$, $f^{'}(xy_i)=c_{i-1}$, 其中$3\leq i\leq t$. 构建一个二部图$B(X,Y)$, 令$X=\{c_1,\cdots,c_{t-1}\}$, $Y=\{A_1,\cdots,A_h\}$, 其中$A_j\subset\{1,\cdots,\Delta+1\}$且$|A_j|=k+1$. 此时$|Y|=\binom{\Delta+1}{k+1}$, 当$c_i\in A_j$时, 连接$c_i$与$A_j$. 注意到$f^{'}(xy_1)=\Delta+3$, $f^{'}(xy_2)=\Delta+2$, 故由正常全染色可知$c_i\in\{1,2,\cdots,\Delta+1\}$, 其中$1\leq i\leq t-1$, 因此在$Y$中一共有$\binom{\Delta}{k}$个元素包含$c_i$. 又根据二部图的构造可知, $d(c_i)=\binom{\Delta}{k}$, 且$d(A_j)\leq k-1$. 对任意的$S\subseteq X$, 都有$|N(S)|\geq d(c_i)=\binom{\Delta}{k}\geq\binom{\Delta}{1}=\Delta\geq k>|S|$, 由引理2.1知, $B(X,Y)$存在一个匹配能够饱和X中的所有点. 那么可以选取满足$f(u_1x)=c_1$的色集合A_j, 将A_j中除c_1外的其它颜色分配给点u_1及它的所有关联边.

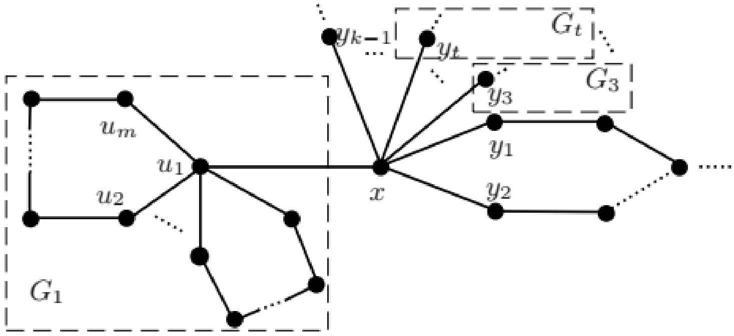

图 6 x在最长路上关联的块为圈

记点u_1及其关联的所有的块构成的图为G_1, 由归纳假设知G_1存在一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC f_1, 不失一般性, 令$S_{f_1}(u_1)=A_j$, $f_1(u_1x)=c_1$. 记点y_i及其关联的所有块构成的图为G_i, 由归纳假设知G_i存在一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC f_i, 不失一般性, 令$S_{f_2}(y_i)=A_i\in Y\setminus\{A_j\}$, $f_1(xy_i)=c_i(3\le i\le t)$.

对任意$z\in V(G)\cup E(G)$, 定义图G的一个正常全染色f为

$$f(z)=\begin{cases}f'(z), & \text{其它;}\\ f_1(z), & z\in E(G_1)\cup V(G_1);\\ \bigcup_{i=3}^{t} f_i(z), & z\in E(G_i)\cup V(G_i).\end{cases}$$

在上述染色f下, $\{\varDelta+2,\varDelta+3\}\subseteq S_f(x)$, $\varDelta+2\in S_f(y_2)$, $\varDelta+3\in S_f(y_1)$. 而$\{\varDelta+2,\varDelta+3\}\nsubseteq S(u_1)\cap S(y_3)\cap\cdots\cap S(y_t)$, 因此$u_1$的色集合与$x,y_1,\cdots,y_t$的色集合都不同. 在$f_1$下, G_1是2-距离点可区别的. 在f_i下, 点y_i与2-距离内所有点的色集合都不同, 其中$i=3,4,\cdots,t$. 所以f是G_T的一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC.

情形2.2 类似的邻点x有两个时, 可设为点x_1和x_2, 记点x_i在圈C上除u_1的邻点为点y_i $(i=1,2)$(如果有), 如图7所示.

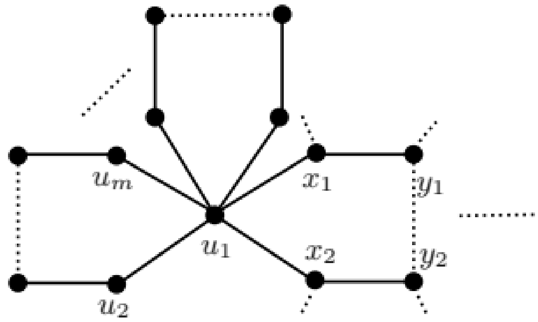

图 7 u在最长路上关联的块为圈

(i) 若x_1, x_2, y_1, y_2 均不关联块. $d(x_1)=d(x_2)=d(y_1)=d(y_2)=2$, 此时点$u_2$和$u_m$共有$d(u_1)-2\leq \varDelta-2$个冲突点. 边$u_1u_2$的可用色有$\varDelta+3-(d(u_1)-1)\geq 4$种, 点$u_2$的可用色有$\varDelta+3-2=\varDelta+1$种, 边$u_2$的可用色有$\varDelta+3-2=\varDelta+1$种, 那么点$u_2$的色集合有至少$4(\varDelta+1)^2$种, 且$4(\varDelta+1)^2-(\varDelta-2)=4\varDelta^2+7\varDelta+6>0$. 故点$u_2$及其关联边能被合法染色, 使得点$u_2$与$x_i$色集合不同, 同理可证$u_m$与$x_i$的色集合不同, 其中$i=1,\cdots,k-2$.

(ii) 若x_1, x_2, y_1, y_2均关联块(块只能为圈). $d(u_1)\geq 4$, 点u在2-距离内至多有四个冲突点, 即x_1, x_2, y_1, y_2. $d(u_1)=d(x_1)=d(x_2)=d(y_1)=d(y_2)=k\geq 4$. 由归纳假设知, G_T-C_m有一个$(\varDelta+3)$-$D(2)$-VDTC f'. 边u_1u_2和u_1u_m可用色有$\varDelta+3-(d(u_1)-1)\geq 4$种. 而$\binom{4}{2}$=$6>4$, 所以一定存在色集合使得点$u_1$与$x_1$, x_2, y_1, y_2的色集合不同. 不妨设$f(u_1u_2)=a$, $f(u_1u_m)=b$. $F(u_2)=\{f(u_1),a\}$, 所以u_2的可用色有$\varDelta+1$种, 又$F(u_2u_3)=\{f(u_2),a\}$, 故u_2u_3的可用色有$\varDelta+1$种, 那么点u_2有$(\varDelta+1)^2$种不同的色集合组合, 而点u_2有至多$\varDelta-3$个冲突点, $(\varDelta+1)^2-(\varDelta-3)=\varDelta^2+\varDelta+4>0$, 所以$u_2$和$u_2u_3$可以被合法染色, 使得$u_2$与2-距离内所有点的色集合不同; 同理可证点$u_m$与2-距离内所有点的色集合不同. 对于圈$C_m$, 现给圈$C_m$剩下的点和边着色. 在$G_T$中, $\varDelta\geq d(u_1)\geq 4$, 故至少可用$\varDelta+3\geq 7$种颜色对圈$C_m$进行着色. 由引理2.3知圈$C_m$存在一个5-$D(2)$-VDTC, 所以$\varDelta+3$种色可以对$G_T$进行$D(2)$-VDTC.

综上所述, 定理得证.

特别地, 当$\varDelta=3$时, 由定理2.1可得到如下推论.

推论1[12]　设H_T为$\varDelta=3$的仙人掌图, 则$\chi_{2vt}(H_T)\leq 6$.

参考文献:

[1] Burris A C. Vertex-distinguishing edge-colorings[D]. Memphis: Memphis State University, 1997.

[2] Zhang Zhongfu, Chen Xiang'en, Li Jingwen, et al. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2005, 48(3): 289-299.

[3] Zhang Zhongfu, Li Jingwen, Chen Xiang'en, et al. $D(\beta)$-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2006, 36(10): 1430-1440.

[4] 王继顺. $P_n^k(k\equiv 2(\mathrm{mod}3))$的$D(2)$-点可区别全染色[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(2): 190-194.

[5] 黄丽娜, 刘海忠, 李沐春. 图的$D(\beta)$-点可区别边色数的上界[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2018, 51(2): 81-85.

[6] 贾秀卿, 李沐春. 单圈图的D(2)-点可区别边染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(4): 807-815.

[7] 贾秀卿, 文飞, 李泽鹏, 等. 双圈图的D(2)-点可区别边染色[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(2): 236-252.

[8] Wen Fei, Jia Xiuqing, Li Zepeng, et al. On the $D(2)$-vertex distinguishing total coloring of graphs with $\varDelta=3$[J]. Mathematical Notes, 2022, 112(1): 142-149.

[9] 张辉, 李泽鹏, 陈祥恩. 仙人掌图的邻点被扩展和可区别全染色[J]. 高校应用数学学报, 2019, 34(3): 373-378.

[10] Flandrin E, Li Hao, Marczyk A, et al. A Note on the neigbor expanded sum distinguishing index[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(1): 29-37.

[11] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: Macmillan Press Ltd, 1976, 72-73.

[12] 汪银芳, 李沐春. $\Delta=3$的仙人掌图的$D(2)$-点可区别全染色[J]. 吉林大学理学报, 2024, 62(1): 1-6.

$D(2)$-vertex-distinguishing total colorings of cactus graphs

GAO Yang[1], WANG Yin-fang[2], WEN Fei[2,3], LI Mu-chun[2]

(1. School of Traffic and Transportation, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

3. Gansu Center for Fundamental Research in Complex Systems Analysis and Control, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu, 730070, China)

Abstract: A proper k-total coloring of G such that for any two vertices $u, v \in V(G)$ with $d(u,v) \leq 2$ satisfy $C(u) \neq C(v)$ is called a k-$D(2)$-vertex-distinguishing total coloring of G, where $C(u)=\{f(u)\} \cup \{f(uv)|uv \in E(G)\}$. The minimum number k of the coloring required is called $D(2)$-vertex-distinguishing total chromatic number of G, and denoted by $\chi_{2vt}(G)$ for short. In this paper, applying induction as well as Hall's theorem, the $D(2)$-vertex-distinguishing total colorings of a cactus graph G_T is discussed, and obtained $\chi_{2vt}(G_T) \leq \Delta+3$.

Keywords: cactus graph; Hall's theorem; $D(2)$-vertex-distinguishing total coloring; $D(2)$-vertex-distinguishing total chromatic number

MR Subject Classification: 05C15