

拟微分算子交换子在Campanato空间上的有界性

邓宇龙*, 杨思宇

(长沙师范学院 数学科学学院, 湖南长沙 410100)

摘要: 该文主要研究拟微分算子与Lipschitz函数生成的交换子的有界性问题, 得到了交换子从Lebesgue空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到Campanato空间 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 有界的充分条件.

关键词: 拟微分算子; 交换子; Lipschitz空间; Campanato空间

中图分类号: O175.3

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0237-06

§1 引言

设 T 是Calderón-Zygmund算子. Coifman等人^[1]给出了 T 和 $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 函数 b 生成的交换子

$$[b, T]f = bT(f) - T(bf) \quad (1)$$

的 L^p 有界性, 其中 $p \in (1, \infty)$. 随后, 人们研究了算子 T 与Lipschitz函数 $b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$ 生成的交换子 $[b, T]$ 的有界性问题. 回顾 γ 阶齐型Lipschitz空间 $\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$ 的定义.

定义1.1^[2] 当 $0 < \gamma < 1$ 时, 称满足条件

$$\|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbf{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|b(x) - b(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty \quad (2)$$

的函数 b 构成的空间为 γ 阶齐型Lipschitz空间, 记为 $\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$.

当 $b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$ 时, Janson^[3]指出 $[b, T]$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 空间到 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 空间上的有界线性算子, 其中 $1 < p < q < \infty, \gamma = n(1/p - 1/q)$. Paluszyński^[4]获得了 $p \in (1, \infty)$ 时, $[b, T]$ 从 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 空间到Tribel-Lizorkin空间上的有界性估计. Lu等人^[5]得到了 $[b, T]$ 在Hardy型空间上的有界性, 其中 $p \in (n/(n + \gamma), 1)$. Zhang等人^[6]证明了 $p \in (1, \infty)$ 时, $[b, T]$ 从 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 空间到Campanato空间 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性, 其中 $-n/p \leq \lambda < 0$ 且 $0 < \gamma = \lambda + n/p < 1$. 这里Campanato空间 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 定义如下.

定义1.2^[6] 设 $1 \leq p < \infty, -n/p \leq \lambda < 1$. 称满足

$$\|f\|_{\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)} = \sup_B \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (3)$$

收稿日期: 2023-09-22 修回日期: 2025-02-20

*通讯作者, Email: yuldeng@163.com

基金项目: 湖南省教育厅科研重点项目(21A0617)

的函数 $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ 构成的空间为Campanato空间, 记为 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$. 其中, 上确界遍取所有的球 $B \subset \mathbf{R}^n$, $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$.

定义1.3^[7] 称 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上的光滑函数 $a(x, \xi) \in S^m_{\rho, \delta}(\mathbf{R}^n)$, 如果对于任意多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ 和实数 m , 存在常数 $C_{\alpha, \beta}$, 成立

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}. \quad (4)$$

其中 $0 < \rho \leq 1, 0 \leq \delta < 1$. 设 $a(x, \xi) \in S^m_{\rho, \delta}(\mathbf{R}^n)$, 则对任意具有紧支撑的无穷可微函数 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 拟微分算子

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} a(x, \xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (5)$$

其中 $\hat{f}$ 是函数 f 的Fourier变换. 象征 $a(x, \xi)$ 属于 $S^m_{\rho, \delta}(\mathbf{R}^n)$ 的拟微分算子全体记为 $\mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$.

记 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 和 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 分别为Schwartz函数空间及其对偶空间. 由文献[8-9]可知, 拟微分算子 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$ 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 到 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 上的连续线性算子, 因而具有 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ 上的分布核

$$K(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) \psi(\varepsilon \xi) d\xi. \quad (6)$$

(6)的极限在 $\mathcal{S}'$ 意义下收敛且与 $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的选取无关^[10]. 拟微分算子 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$ 可由分布核 $K(x, y)$ 表示为^[8]

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x, y) f(y) dy. \quad (7)$$

类似于经典的奇异积分算子交换子, 人们广泛研究了拟微分算子 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$ 与 $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 函数 b 生成的交换子 $[b, T]$ 的 L^p 有界性^[11-16] 和加权 L^p 有界性^[17-21]. 此外, 文献[22]得到了交换子 $[b, T]$ 的双权型估计. 文献[23]指出, 存在 $\text{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 空间的一个非平凡子空间, 当函数 b 属于这个子空间时, $[b, T]$ 是加权Hardy空间到加权Lebesgue空间上的有界线性算子.

本文研究拟微分算子交换子 $[b, T]$ 从Lebesgue空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到Campanato空间 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 上的有界性问题, 其中 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}, b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$. 本文的主要结果如下.

定理1.1 给定满足条件 $0 < \rho \leq 1, 0 \leq \delta < 1, -(n+1) < m \leq -(n+1)(1-\rho)$ 的实数 ρ, δ 和 m . 定义 $\epsilon = \min\{1, (1+m+n)/\rho\}$, 则当 $0 < \gamma = \lambda + n/p < 1$ 且 $-n/p < \lambda < \epsilon$ 时, 拟微分算子交换子 $[b, T]$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 空间上的有界算子. 即存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|[b, T]f\|_{\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}. \quad (8)$$

其中 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}, b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$. 进一步地, m 的容许范围可延拓到^[22] $m \leq -(n+1)(1-\rho)$.

本文约定, C 表示与主要参量无关的常数且会随上下文变化. 设 A 是一个Lebesgue可测集, 则 $|A|$ 和 χ_A 分别表示 A 的Lebesgue测度和特征函数. $\mathbf{R}^n$ 中球心在点 x , 半径为 r 的球 B 记为 $B = B(x, r)$. 当 $t > 0$ 时, $tB = B(x, tr)$.

§2 几个引理

设 $0 < p < \infty$, 称 $\mathbf{R}^n$ 上满足

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (9)$$

的Lebesgue可测函数 $f(x)$ 全体为 L^p 空间, 记为 $L^p(\mathbf{R}^n)$. 拟微分算子 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$ 有下述 L^p 有界性.

引理2.1^[24] 给定满足条件 $0 < \rho \leq 1, 0 \leq \delta < 1, m < -n(1-\rho)|1/p - 1/2| + \max\{0, n(\rho - \delta)/2\}$ 的实数 ρ, δ 和 m . 则当 $1 < p < \infty$ 时, 拟微分算子 $T \in \mathcal{L}^m_{\rho, \delta}$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 空间上的有界算子.

显然, 满足引理2.1条件的 m 自然满足定理1.1的条件. 文献[8]指出, $m \leq -n(1-\rho)|1/p - 1/2|$ 是Sharp的, 这个结论称为Hardy-Littlewood-Hirschman-Wainger不等式.

下面的引理给出了拟微分算子 $T \in \mathcal{L}_{\rho,\delta}^m$ 的分布核 $K(x, y)$ 的估计.

引理2.2^[22] 给定满足条件 $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $-(n+1) < m \leq -(n+1)(1-\rho)$ 的实数 ρ, δ 和 m . 设拟微分算子 $T \in \mathcal{L}_{\rho,\delta}^m$ 的分布核为 $K(x, y)$, 则对每一个 $x \in B = B(x_0, r)$ 和任意的 $y \in 2^{j+1}B \setminus 2^jB$, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$|K(x, y) - K(x_0, y)| \leq C2^{-j\epsilon}/|2^jB|, \quad (10)$$

其中 $\epsilon = \min\{1, (1+n+m)/\rho\}$.

接下来给出Lipschitz函数 b 的相关性质.

引理2.3^[3] 设 $b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$, $0 < \gamma < 1$. 则对任意的 $1 \leq p < \infty$ 有

$$\|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \approx \sup_B \frac{1}{|B|^{\gamma/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B|^p dx \right)^{1/p} \approx \sup_B \frac{1}{|B|^{\gamma/n}} \|b - b_B\|_{L^\infty(B)}, \quad (11)$$

其中, 上确界遍取所有的球 $B \subset \mathbf{R}^n$.

引理2.4^[3] 设 $b \in \Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)$, $0 < \gamma < 1$. 则对 $\mathbf{R}^n$ 中任意的球 B 和 B' , 当 $B' \subset B$ 时有

$$|b_{B'} - b_B| \leq C\|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)}|B|^{\gamma/n}. \quad (12)$$

§3 定理1.1的证明

定理1.1的证明 任给 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. 要证交换子 $[b, T]$ 从 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 空间的有界性, 只要证

$$\frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - ([b, T]f)_B|^p dx \right)^{1/p} \leq C\|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (13)$$

对所有的球 $B \subset \mathbf{R}^n$ 成立. 为此, 对任意的实数 $\tilde{c}$, 由Minkowski不等式和Hölder不等式可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - ([b, T]f)_B|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ & \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |([b, T]f)_B - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} = \\ & \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} |([b, T]f)_B - \tilde{c}| \leq \\ & \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}| dx \right) \leq \\ & \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} = \\ & \frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (14)$$

记 $B = B(x_0, l)$, 对 f 作分解: $f := f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{2B}$. 由于

$$[b, T]f(x) = (b - b_B)Tf(x) - T((b - b_B)f_1)(x) - T((b - b_B)f_2)(x),$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |[b, T]f(x) - \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} &\leq \frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |(b(x) - b_B)Tf(x)|^p dx \right)^{1/p} + \\ &\frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T((b - b_B)f_1)(x)|^p dx \right)^{1/p} + \\ &\frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T((b - b_B)f_2)(x) + \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} := I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (15)$$

注意到 $1 < p < \infty$ 且 $0 < \gamma = \lambda + n/p < 1$. 对于 I_1 , 由引理2.3和拟微分算子的 L^p 有界性可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{|B|^{\lambda/n+1/p}} \left(\int_B |(b(x) - b_B)Tf(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\frac{2}{|B|^{\gamma/n}} \|b - b_B\|_{L^\infty(B)} \left(\int_B |Tf(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \end{aligned} \quad (16)$$

$$C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|Tf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

对于 I_2 , 依次利用拟微分算子的 L^p 有界性以及引理2.3和引理2.4, 可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{|B|^{\lambda/n+1/p}} \left(\int_B |T((b - b_B)f_1)(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\frac{C}{|B|^{\gamma/n}} \|T((b - b_B)f_1)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq \frac{C}{|B|^{\gamma/n}} \|(b - b_B)f_1\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \\ &\frac{C}{|B|^{\gamma/n}} \left(\int_{2B} |(b - b_B)f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\frac{C}{|B|^{\gamma/n}} \left[\left(\int_{2B} |(b - b_{2B})f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{2B} |(b_{2B} - b_B)f(x)|^p dx \right)^{1/p} \right] \leq \\ &\frac{C}{|B|^{\gamma/n}} (\|b - b_{2B}\|_{L^\infty(2B)} + |b_{2B} - b_B|) \|f\|_{L^p(2B)} \leq \\ &\frac{C}{|B|^{\gamma/n}} (\|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} |2B|^{\gamma/n} + C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} |2B|^{\gamma/n}) \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned} \quad (17)$$

取 $\tilde{c} = -(T((b - b_B)f_2))_B$. 则

$$|T((b - b_B)f_2)(x) + \tilde{c}| \leq \frac{1}{|B|} \int_B |T((b - b_B)f_2)(x) - T((b - b_B)f_2)(y)| dy. \quad (18)$$

于是, 对每一个 $x, y \in B = B(x_0, l)$ 和任意的 $z \in 2^{j+1}B \setminus 2^jB$, 由引理2.2可知

$$\begin{aligned} |T((b - b_B)f_2)(x) - T((b - b_B)f_2)(y)| &\leq \int_{\mathbf{R}^n \setminus 2B} |K(x, z) - K(y, z)| |b - b_B| |f(z)| dz \leq \\ &\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j+1}B \setminus 2^jB} |K(x, z) - K(y, z)| |b - b_B| |f(z)| dz \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^jB|} \int_{2^{j+1}B} |b - b_B| |f(z)| dz. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |T((b - b_B)f_2)(x) + \tilde{c}|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B \left[\frac{1}{|B|} \int_B |T((b - b_B)f_2)(x) - T((b - b_B)f_2)(y)| dy \right]^p dx \right\}^{1/p} \leq \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{|B|^{\lambda/n}} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B \left[\frac{1}{|B|} \int_B \left(C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \int_{2^{j+1}B} |b - b_B| |f(z)| dz \right) dy \right]^p dx \right\}^{1/p} \leq \\ & \frac{C}{|B|^{\lambda/n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \left(\int_{2^{j+1}B} |b - b_{2^{j+1}B}| |f(z)| dz + \int_{2^{j+1}B} |b_{2^{j+1}B} - b_B| |f(z)| dz \right) := \\ & I_{31} + I_{32}. \end{aligned}$$

对于 I_{31} , 由Hölder不等式和引理2.3可得

$$\begin{aligned} I_{31} & \leq \frac{C}{|B|^{\lambda/n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \left(\int_{2^{j+1}B} |b - b_{2^{j+1}B}|^{p'} dz \right)^{1/p'} \left(\int_{2^{j+1}B} |f(z)|^p dz \right)^{1/p} \leq \\ & \frac{C}{|B|^{\lambda/n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} |2^{j+1}B|^{\gamma/n+1/p'} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq \end{aligned} \quad (20)$$

$$C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\lambda-\epsilon)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$. 显然(20)在满足 $0 < \gamma = \lambda + n/p < 1$ 和 $\lambda < \epsilon$ 的条件下成立. 对于 I_{32} , 由引理2.4和Hölder不等式可知

$$\begin{aligned} I_{32} & \leq \frac{C}{|B|^{\lambda/n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} |2^{j+1}B|^{\gamma/n} \int_{2^{j+1}B} |f(z)| dz \leq \\ & \frac{C}{|B|^{\lambda/n}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j\epsilon}}{|2^j B|} \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} |2^{j+1}B|^{\gamma/n} \left(\int_{2^{j+1}B} |f(z)|^p dz \right)^{1/p} |2^{j+1}B|^{1-1/p} \leq \end{aligned} \quad (21)$$

$$C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(\lambda-\epsilon)} \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

同理(21)在满足 $0 < \gamma = \lambda + n/p < 1$ 和 $\lambda < \epsilon$ 的条件下成立. 由(20)和(21)可知

$$I_3 \leq C \|b\|_{\Lambda_\gamma(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}. \quad (22)$$

综合 I_1, I_2 和 I_3 的估计, 定理1.1得证.

参考文献:

- [1] Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables[J]. Ann Math, 1976, 103(3): 611-635.
- [2] DeVore R A, Sharpley R C. Maximal functions measuring smoothness[J]. Mem Amer Math Soc, 1984, 47(293): 1-115.
- [3] Janson S. Mean oscillation and commutators of singular integral operators[J]. Ark Math, 1978, 16: 263-270.
- [4] Paluszynski M. Characterization of Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss[J]. Indiana Univ Math J, 1995, 44(1): 1-17.
- [5] Lu Shanzhen, Wu Qiang, Yang Dachun. Boundedness of commutators on Hardy type spaces[J]. Sci China, Ser. A, 2002, 45: 984-987.
- [6] Zhang Lei, Shi Shaoguang, Huang Hao. New characterizations of Lipschitz space via commutators on Morrey spaces[J]. Adv Math (China), 2015, 44(6): 899-907.
- [7] Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables[J]. Acta Math, 1972, 129: 137-193.

- [8] Stein E M. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals (3rd ed.)[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- [9] Hörmander L. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations[J]. Proc Sympos Pure Math, 1967, 10: 138-183.
- [10] Hounie J, Kapp R A S. Pseudodifferential operators on local Hardy spaces[J]. J Fourier Anal Appl, 2009, 15: 153-178.
- [11] Auscher P, Taylor M E. Paradifferential operators and commutator estimates[J]. Commun Partial Differ Equations, 1995, 20: 1743-1775.
- [12] Chanillo S. Remarks on commutators of pseudo-differential operators[J]. Contemp Math, 1997, 205: 33-37.
- [13] Lin Yan. Commutators of pseudo-differential operators[J]. Sci China, Ser A, 2008, 51(3): 453-460.
- [14] Hung H D, Ky L D. An Hardy estimate for commutators of pseudo-differential operators[J]. Taiwanese J Math, 2015, 19: 1097-1109.
- [15] Yang Jie, Wang Yuzhao, Chen Wenyi. Endpoint estimates for the commutators of pseudo-differential operators[J]. Acta Math Sci, Ser B, 2014, 34(2): 387-393.
- [16] Deng Yulong, Long Shunchao. Endpoint estimates for commutators of pseudodifferential operators[J]. Acta Math Sinica, Chinese Ser, 2022, 65(2): 309-393.
- [17] Bui T A. New weighted norm inequalities for pseudodifferential operators and their commutators[J]. Int J Anal, 2013, Art ID 798528, 12 pp.
- [18] Michalowski N, Rule D J, Staubach W. Weighted norm inequalities for pseudo-differential operators defined by amplitudes[J]. J Funct Anal, 2010, 258: 4183-4209.
- [19] Nishigaki S. Weighted norm inequalities for certain pseudo-differential operators[J]. Tokyo J Math, 1984, 7(1): 129-140.
- [20] Tang Lin. Weighted norm inequalities for pseudo-differential operators with smooth symbols and their commutators[J]. J Funct Anal, 2012, 262(4): 1603-1629.
- [21] Yabuta K. Weighted norm inequalities for pseudo-differential operators[J]. Osaka J Math, 1986, 23: 703-723.
- [22] Deng Yulong, Chen Zhitian, Long Shunchao. Double weighted commutators theorem for pseudo-differential operators with smooth symbols[J]. Czechoslovak Math J, 2021, 71(146): 173-190.
- [23] Deng Yulong. Commutators of pseudodifferential operators on weighted Hardy spaces[J]. J Math, 2022, Art ID 8851959, 6 pp.
- [24] Alvarez J, Hounie J. Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators[J]. Ark Mat, 1990, 28: 1-22.

Boundedness of commutators of pseudodifferential operators on Campanato spaces

DENG Yu-long, YANG Si-yu

(School of Mathematics Science, Changsha Normal University, Changsha 410100, China)

Abstract: This paper focuses on the boundedness of the commutators generated by pseudodifferential operators and Lipschitz functions, and establishes a sufficient condition such that these operators are bounded from Lebesgue spaces $L^p(\mathbf{R}^n)$ into Campanato spaces $\mathcal{E}^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$.

Keywords: Pseudodifferential operators; commutators; Lipschitz spaces; Campanato spaces

MR Subject Classification: 47G30; 35S05; 42B35