

含有组合非线性项Klein-Gordon-Maxwell系统 解的存在性和多重性

孙 歆, 段 誉*

(贵州工程应用技术学院 理学院, 贵州毕节 551700)

摘 要: 研究Klein-Gordon-Maxwell系统

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = f(x, u) + K(x)|u|^{s-2}u, & x \in \mathbf{R}^3, \\ \Delta \phi = (\omega + \phi)u^2, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

其中 $\omega > 0$ 是一个常数, $1 < s < 2$. 当非线性项 f 关于 u 在无穷远处是线性有界时, 利用变分方法获得了系统解的存在性和多重性结果, 完善了相关文献的研究成果.

关键词: Klein-Gordon-Maxwell系统; 变分法; 线性有界项; 多重性

中图分类号: O175.25

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0226-11

§1 引言及主要结果

研究Klein-Gordon-Maxwell系统

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = f(x, u) + K(x)|u|^{s-2}u, & x \in \mathbf{R}^3, \\ \Delta \phi = (\omega + \phi)u^2, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\omega > 0$ 是一个常数, $1 < s < 2$, $u, \phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$. 系统(1)起源于数学物理领域中的某些应用问题. 为了描述三维空间中非线性Klein-Gordon场与静电场之间相互作用所产生的孤立波问题, 文[1]首次提出了Klein-Gordon-Maxwell系统模型

$$\begin{cases} -\Delta u + [m_0^2 - (\omega + e\phi)^2]u = |u|^{q-2}u, & x \in \mathbf{R}^3, \\ \Delta \phi = (e\omega + e^2\phi)u^2, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $0 < \omega < m_0$, $4 < q < 6$, m_0 和 e 分别表示粒子的质量和电量, 而 ω 表示相位. 系统的未知因素是联系粒子的场 u 和电磁位势 ϕ . 有关此系统物理方面的详述可参见文[1-2]. 作为系统(2)的一般情形, 系统(1)近年来受到了众多学者的关注. 当非线性项 f 满足(AR)条件且 $K(x) \equiv 0$ 时, 文[3]首次研究了(1)解的多重性. 有关系统(1)解的大量可解性条件被陆续给出. 如次线性条件(见

收稿日期: 2023-09-25 修回日期: 2024-04-22

*通讯作者, E-mail: duanyu3612@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(11661021); 毕节市科学技术项目([2023]28; [2023]52)

文[4-5]), 渐近线性条件(见文[6-8]), 超线性条件(见文[9-28]), 凹凸组合项条件(见文[29-31]). 据作者所知, 当非线性项是由线性有界项和次线性项组成的组合非线性项时, 系统(1)解的研究暂时还没有结果. 本文主要考虑非线性项带有组合项且空间嵌入无紧性的情形, 利用变分法给出了系统(1)解的存在性和多重性, 完善了已有文献的相关结果.

本文针对 V, K 及 f 做如下假设.

(V) $V(x) \in C(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, $V_0 := \inf_{x \in \mathbf{R}^3} V(x) > 0$;

(K₁) $K(x) \in L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)$, $1 < s < 2$;

(K₂) $K(x) \geq 0$, 存在非空开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, 使得对任意的 $x \in \Omega$, $K(x) > 0$;

(F₁) $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$, 对任意的 $(x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ 使得 $f(x, t)t \geq 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0$ 关于 $x \in \mathbf{R}^3$ 一致成立;

(F₂) 存在常数 $R_0 > 0$ 使得 $\sup\{\frac{f(x, t)}{t} : |x| \geq R_0, t \neq 0\} < \inf\{V(x) : |x| \geq R_0\}$;

(F₃) 存在常数 $\bar{C} > 0$ 使得对任意的 $(x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, t \neq 0$, $|\frac{f(x, t)}{t}| \leq \bar{C}$;

(F₄) $\inf_{x \in \mathbf{R}^3} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} > \Gamma := \inf \sigma(-\Delta + V)$, 其中 Γ 表示算子 $-\Delta + V$ 谱的下确界;

(F₅) $f(x, -t) = -f(x, t)$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$.

本文主要结果如下.

定理1.1 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)-(K₂)及(F₁)-(F₃), 则对任意的 $\omega > 0$, 存在常数 $m > 0$ 使得当 $\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m$ 时, 系统(1)存在一个非平凡的负能量解.

定理1.2 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)-(K₂)及(F₁)-(F₃), 则存在常数 $\omega_* > 0$ 使得当 $\omega > \omega_*$ 时, 系统(1)存在一个非平凡的负能量解.

定理1.3 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)及(F₁)-(F₄), 则存在常数 $\omega^* > 0$ 及 $m > 0$ 使得当

$$\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m, \omega \in (0, \omega^*)$$

时, 系统(1)存在一个非平凡的正能量解.

由定理1.1和定理1.3易知如下推论成立.

推论1.1 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)-(K₂)及(F₁)-(F₄), 则存在常数 $m > 0, \omega^* > 0$ 使得当 $\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m, 0 < \omega < \omega^*$ 时, 系统(1)至少存在两个非平凡解.

定理1.4 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)及(F₁)-(F₄), 则存在常数 $\omega^{**} > 0$ 使得当 $\omega > \omega^{**}$ 时, 系统(1)无正能量解.

定理1.5 假设 V, K, f 满足(V), (K₁)-(K₂), (F₁)-(F₃)及(F₅), 则存在常数 $\tilde{\omega} > 0$ 使得当 $\omega > \tilde{\omega}$ 时, 系统(1)有一列负能量解.

注1.1 显然渐近线性条件($\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} = l$)比线性有界条件(F₃)更强. 再者若(F₂)和(F₄)成立, 则 $V(x)$ 不恒为常数.

注1.2 文[6]在 $K \equiv 0$, 非线性项 f 满足渐近线性条件且 ω 比较大的情形下给出了系统(1)无非平凡解的结论, 因此条件(K₂)对于定理1.1-定理1.2而言是必须的.

注1.3 定理1.1-定理1.2中的解均是利用Ekeland变分原理得到的局部极小解. 为了保证局部极小解的存在性, 已有文献均是类似于定理1.1那样要求 K 或其他扰动项的范数比较小. 与常规方法不同, 定理1.2采用 ω 比较大这一条件获得相同结果.

注1.4 当非线性项是由次线性项和超线性或超线性和扰动项组合而成时, 文[21-31]考虑了系统(1)两个非平凡解的存在性问题. 与之不同, 本文考虑的是由次线性项和线性有界项组成的

组合非线性项, 且获得了相同的结论. 此外, 本文还讨论了系统(1)正能量解的非存在性问题. 因此本文的结论是上述文献结果的推广和补充.

§2 预备知识

令 $H := \left\{ u \in H^1(\mathbf{R}^3) : \int_{\mathbf{R}^3} V(x)u^2 dx < +\infty \right\}$, 其内积和范数定义为

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx, \quad \|u\| := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

在条件(V)下, 对任意的 $2 \leq p \leq 6$, 嵌入映射 $H \hookrightarrow L^p(\mathbf{R}^3)$ 是连续的, 故存在 $S_p > 0$,

$$\|u\|_p \leq S_p \|u\|, \quad \forall u \in H.$$

系统(1)具有变分结构, 定义其能量泛函为: 对任意的 $(u, \phi) \in H \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^3)$,

$$J_\omega(u, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - |\nabla \phi|^2 - (2\omega + \phi)\phi u^2) dx - \int_{\mathbf{R}^3} (F(x, u) + \frac{1}{s} K(x)|u|^s) dx.$$

由于 J_ω 是强不定的, 为了克服这种困难, 需要对泛函进行一些简化: 将泛函 J_ω 转化成只含有一个变量 u 的式子. 为此给出如下引理.

引理2.1^[3] 对任何 $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$, 存在唯一的 $\phi = \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^3)$, 满足方程

$$\Delta \phi = (\omega + \phi)u^2. \quad (3)$$

又泛函 $\Phi : u \in H^1(\mathbf{R}^3) \rightarrow \Phi[u] := \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 连续可微且满足以下的(i)-(ii).

(i) 在集合 $\{x|u(x) \neq 0\}$ 上, $-\omega \leq \phi_u \leq 0$;

(ii) $\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^3)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^3)}^2$, 且 $\int_{\mathbf{R}^3} |\phi_u|u^2 dx \leq C\|u\|_{H^1(\mathbf{R}^3)}^4$.

在(3)两端同时乘以 ϕ_u , 并分部积分可得

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 dx = - \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u^2 u^2 dx.$$

从而结合 J_ω 的定义知 $I_\omega(u) := J_\omega(u, \phi_u)$ 可化简为

$$I_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \omega \phi_u u^2) dx - \int_{\mathbf{R}^3} F(x, u) dx - \frac{1}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|u|^s dx, \quad \forall u \in H.$$

由假设及引理2.1易知, I_ω 在空间 H 上是有意义的, $I_\omega \in C^1(H, \mathbf{R})$, 且对任意的 $u, v \in H$, 有

$$\langle I'_\omega(u), v \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} [\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv - (2\omega + \phi_u)\phi_u uv] dx - \int_{\mathbf{R}^3} f(x, u)v dx - \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|u|^{s-2}uv dx.$$

由文献[1]中的命题3.5知, u 是泛函 I_ω 的临界点当且仅当 $(u, \phi) \in H \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 是系统(1)的解, 并且 $\phi = \phi_u$. 因此, 为了得到系统(1)的非平凡解, 只需寻找泛函 I_ω 的非零的临界点即可.

引理2.2^[32] 假设 X 是一个 Banach 空间, $I \in C^1(X, \mathbf{R})$ 是下方有界的偶泛函且满足(PS)条件, $I(0) = 0$. 若对任意的 $k \in \mathbf{N}$, 存在有限维子空间 X^k 及 $\rho_k > 0$ 使得 $\sup_{X^k \cap S_{\rho_k}} I < 0$, 其

中 $S_{\rho_k} = \{u \in X : \|u\| = \rho_k\}$, 则 I 有一列临界值 $c_k < 0$ 且满足 $c_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

记 $B_R(0) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < R\}$, $B_R^c(0) = \mathbf{R}^3 \setminus B_R(0) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| \geq R\}$. 在本文中, C, C_i 表示各类正常数, 在不同的地方可表示不同的值.

§3 主要结果的证明

为了证明定理1.1-定理1.5, 下面先给出三个引理.

引理3.1 假设(V), (K₁), (F₁)及(F₃)-(F₄)成立, 则泛函 $I_\omega(u)$ 满足以下山路结构.

- (i) 存在 $\alpha > 0$, $\rho > 0$ 及 $m > 0$ 使得当 $\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m$ 时, $I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho} \geq \alpha > 0$;
 (i') 存在 $\alpha_1 > 0$, $\rho_1 > 0$ 及 $\omega_* > 0$ 使得当 $\omega > \omega_*$ 时, $I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho_1} \geq \alpha_1 > 0$;
 (ii) 存在 $\omega^* > 0$ 及 $e \in H$ 满足 $\|e\| > \rho$ 使得对任意的 $\omega \in (0, \omega^*)$, $I_\omega(e) < 0$.

证 (i) 由 (F_1) , (F_3) 知, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得 $\forall p \in (2, 6)$,

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}.$$

从而 $\forall p \in (2, 6)$,

$$|F(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t|^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} |t|^p, \quad \forall (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}. \quad (4)$$

取 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2S_2^2})$, 则由条件 (K_1) , (4), Sobolev 不等式及引理 2.1 的 (i) 知

$$\begin{aligned} I_\omega(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} F(x, u) dx - \frac{1}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u|^s dx \geq \\ &\frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbf{R}^3} u^2 dx - \frac{C_\varepsilon}{p} \int_{\mathbf{R}^3} |u|^p dx - \frac{1}{s} \|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s \geq \\ &\frac{1}{4} \|u\|^2 - \frac{1}{s} \|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s - \frac{C_\varepsilon}{p} S_p^p \|u\|^p. \end{aligned}$$

令 $g(t) = \frac{1}{4} t^{2-s} - \frac{C_\varepsilon}{p} S_p^p t^{p-s}$, $t \geq 0$, 则对充分小的 $\rho > 0$, 有 $g(\rho) > 0$. 令 $m := \frac{s}{2S_2^2} g(\rho)$, $\alpha := \frac{1}{2} g(\rho) \rho^s$, 则 $m, \alpha > 0$ 且当 $\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m$ 时,

$$I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho} \geq \alpha > 0. \quad (5)$$

(i') 类似于文 [21] 中的 (5.2)-(5.3) 的证明知

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_u) |u|^3 dx &\leq \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 dx = \\ &\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \phi_u^2 u^2 dx \leq \\ &\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx. \end{aligned} \quad (6)$$

在 (4) 中取 $\varepsilon = \frac{1}{4S_2^2}$, $p = 3$, 则由条件 (K_1) , (4), (6), Sobolev 不等式及引理 2.1 的 (i) 知

$$\begin{aligned} I_\omega(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} F(x, u) dx - \frac{1}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u|^s dx \geq \\ &\frac{1}{4} \|u\|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_u) |u|^3 dx - \frac{1}{8S_2^2} \int_{\mathbf{R}^3} u^2 dx - \frac{C_\varepsilon}{3} \int_{\mathbf{R}^3} |u|^3 dx - \frac{1}{s} \|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s \geq \\ &\frac{1}{8} \|u\|^2 - \frac{1}{s} \|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s + \int_{\mathbf{R}^3} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\omega + \phi_u) - \frac{C_\varepsilon}{3} \right] |u|^3 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

由于当 $\varepsilon = \frac{1}{4S_2^2}$ 时, C_ε 是一固定正常数, 故存在 $\omega_* > 0$ 使得当 $\omega > \omega_*$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2} (\omega + \phi_u) - \frac{C_\varepsilon}{3} > 0$.

从而结合 (7) 知 $I_\omega(u) > \frac{1}{8} \|u\|^2 - \frac{1}{s} \|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s$.

因为 $1 < s < 2$, 所以存在比较大的 $\rho_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ 及 $\omega_* > 0$ 使得当 $\omega > \omega_*$ 时有

$$I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho_1} \geq \alpha_1 > 0.$$

(ii) 令 $l := \inf_{x \in \mathbf{R}^3} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t}$, 则由 (F_4) 及 Γ 的定义知, 存在一个非负函数 $v \in H$ 满足

$$\int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx < l \int_{\mathbf{R}^3} v^2 dx.$$

结合 $1 < s < 2$ 及 Fatou 引理知

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{I_0(tv)}{t^2} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{F(x, tv)}{t^2} dx - \\ &\quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{K(x)|tv|^s}{t^2} dx \leq \\ &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \int_{\mathbf{R}^3} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(x, tv)}{t^2 v^2} v^2 dx - \liminf_{t \rightarrow +\infty} |t|^{s-2} \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|v|^s dx \leq \\ &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx - \frac{l}{2} \int_{\mathbf{R}^3} v^2 dx < 0. \end{aligned}$$

因此 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} I_0(tv) = -\infty$. 从而存在 $e \in H$, $\|e\| > \rho$ 使得 $I_0(e) < 0$. 因为当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, $I_\omega(e) \rightarrow I_0(e)$, 所以存在 $\omega^* > 0$ 使得 $I_{\omega^*}(e) < 0$, 且当 $\omega \in (0, \omega^*)$ 时 $I_\omega(e) < I_{\omega^*}(e) < 0$.

由文[33]中的山路定理及引理3.1知, 存在 $\{u_n\} \subset H$ 是泛函 I_ω 的 $(C)_c$ 序列, 即

$$I_\omega(u_n) \rightarrow c (c > 0), \quad \|I'_\omega(u_n)\|_{H^{-1}}(1 + \|u_n\|) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

其中 $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I_\omega(\gamma(t))$.

引理3.2 假设 (V), (K_1) 及 (F_1) -(F_3) 成立, 则由 (8) 定义的 $(C)_c$ 序列是有界的.

证 对任意固定的 $R > 0$, 令 $\xi_R : \mathbf{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ 是一个光滑的函数且满足

$$\xi_R(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| \leq R, \\ 1, & |x| \geq 2R, \end{cases}$$

及 $|\nabla \xi_R(x)| \leq \frac{C}{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}^3$, 其中 $C > 0$ 是某个与 R 无关的常数.

对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 及 $R > R_0 > 0$, 则

$$\begin{aligned} \|u_n \xi_R\|^2 &\leq 2 \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 \xi_R^2 + |\nabla \xi_R|^2 u_n^2) dx + \int_{\mathbf{R}^3} V(x)(u_n \xi_R)^2 dx \leq \\ &2 \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{2C^2}{R^2} \int_{\mathbf{R}^3} u_n^2 dx + \int_{\mathbf{R}^3} V(x) u_n^2 dx \leq \left(\frac{2C^2}{V_0 R_0^2} + 3 \right) \|u\|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

由 (8) 知 $\|I'_\omega(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n \geq n(\varepsilon)$ 时有

$$\|I'_\omega(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n\| \leq \frac{\varepsilon}{\left(\frac{2C^2}{V_0 R_0^2} + 3 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (10)$$

由 (9)-(10) 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) > 0$, 使得当 $n \geq n(\varepsilon)$, $R > R_0 > 0$ 时有

$$|\langle I'_\omega(u_n), u_n \xi_R \rangle| \leq \|I'_\omega(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n \xi_R\| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

即

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x) u_n^2) \xi_R dx &\leq - \int_{\mathbf{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \xi_R dx + \int_{\mathbf{R}^3} (2\omega + \phi_{u_n}) \phi_{u_n} u_n^2 \xi_R dx + \\ &\int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n \xi_R dx + \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s \xi_R dx + \varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

由 (F_2) 及 ξ_R 的定义知, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $\forall n \in \mathbf{N}$, $R > R_0$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n \xi_R dx \leq \theta \int_{\mathbf{R}^3} V(x) u_n^2 \xi_R dx. \quad (13)$$

由 (K_1) 知

$$\int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s \xi_R dx \leq \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s. \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbf{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \xi_R dx \right| &\leq \int_{\mathbf{R}^3} |u_n \nabla u_n \nabla \xi_R| dx \leq \frac{C}{R} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u_n \nabla u_n| dx \leq \\
 &\frac{C}{2R} \int_{R \leq |x| \leq 2R} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \leq \frac{C}{2R} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx.
 \end{aligned} \tag{15}$$

故由(12)-(15)及引理2.1的(i)知

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + (1-\theta)V(x)u_n^2) \xi_R dx \leq \\
 &\frac{C}{2R} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx + \varepsilon + \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s.
 \end{aligned} \tag{16}$$

由文[21]中的(5.3)知

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_{u_n}) |u_n|^3 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{3}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla \phi_{u_n}|^2 dx \leq \\
 &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{3}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_{u_n} u_n^2 dx - \frac{3}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n}^2 u_n^2 dx \leq \\
 &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{3}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \phi_{u_n}^2 u_n^2 dx.
 \end{aligned} \tag{17}$$

进而结合引理2.1的(i)知

$$\sqrt{3} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_{u_n}) |u_n|^3 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} (2\omega + \phi_{u_n}) \phi_{u_n} u_n^2 dx. \tag{18}$$

由(10)知

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{\left(\frac{2C^2}{V_0 R_0^2} + 3\right)^{\frac{1}{2}}} &\geq \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx - \int_{\mathbf{R}^3} (2\omega + \phi_{u_n}) \phi_{u_n} u_n^2 dx - \\
 &\int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n dx - \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s dx.
 \end{aligned} \tag{19}$$

令 $h(t) = \sqrt{3}(\omega + \phi_t)|t|^3 - \bar{C}t^2$, 其中 $\bar{C} > 0$ 已由 (F_3) 给出. 记 $\beta = \inf_{t \in \mathbf{R}} h(t)$, 则 $\beta \in (-\infty, 0)$. 结合 (K_1) , (F_3) , (18)-(19)知

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon}{\left(\frac{2C^2}{V_0 R_0^2} + 3\right)^{\frac{1}{2}}} &\geq \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx - \int_{\mathbf{R}^3} (2\omega + \phi_{u_n}) \phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n dx - \\
 &\int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s dx \geq \\
 &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx + \sqrt{3} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_{u_n}) |u_n|^3 dx - \int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n dx - \\
 &\|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s \geq \\
 &\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2) dx + \sqrt{3} \int_{\mathbf{R}^3} (\omega + \phi_{u_n}) |u_n|^3 dx - \bar{C} \int_{\mathbf{R}^3} u_n^2 dx - \\
 &\|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s = \\
 &\frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \int_{\mathbf{R}^3} h(u_n) dx - \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s.
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \int_{\mathbf{R}^3} h(u_n) dx \leq \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{2C^2}{V_0 R_0^2} + 3\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

由(16)知

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2R} (1-\theta)V_0 u_n^2 dx &\leq \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + (1-\theta)V(x)u_n^2) \xi_R dx \leq \\ &\frac{C}{2R} \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx + \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s + \varepsilon \leq \\ &(\frac{C}{2R} + \frac{C}{2RV_0}) \|u_n\|^2 + \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(\mathbf{R}^3)} S_2^s \|u_n\|^s + \varepsilon. \end{aligned}$$

从而有

$$\int_{|x| \geq 2R} u_n^2 dx \leq \frac{C_1}{R} \|u_n\|^2 + C_2 \|u_n\|^s + C_3 \varepsilon. \quad (21)$$

结合(21)及引理2.1的(i)知

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^3} h(u_n) dx &= \int_{|x| \leq 2R} h(u_n) dx + \int_{|x| \geq 2R} h(u_n) dx = \\ &\int_{|x| \leq 2R} h(u_n) dx + \int_{|x| \geq 2R} (\sqrt{3}(\omega + \phi_{u_n})|u_n|^3 - \bar{C}u_n^2) dx \geq \\ &\int_{|x| \leq 2R} \beta dx - \int_{|x| \geq 2R} \bar{C}u_n^2 dx \geq \\ &\beta|B_{2R}(0)| - \frac{\bar{C}C_1}{R} \|u_n\|^2 - \bar{C}C_2 \|u_n\|^s - \bar{C}C_3 \varepsilon. \end{aligned} \quad (22)$$

由(20)及(22)知 $(\frac{1}{2} - \frac{\bar{C}C_1}{R}) \|u_n\|^2 \leq -\beta|B_{2R}(0)| + C_4 \|u_n\|^s + \frac{\varepsilon}{(\frac{2C_2^2}{V_0 R_0^2} + 3)^{\frac{1}{2}}} + \bar{C}C_3 \varepsilon$. 因为 $1 < s <$

2 , $\beta \in (-\infty, 0)$, $\bar{C}, C_i$ 是与 R 无关的正常数, 所以当 R 比较大时, $\frac{\bar{C}C_1}{R} < \frac{1}{2}$. 因此(8)定义的 $(C)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 是有界的.

引理3.3 假设(V), (K_1) 及 (F_1) -(F_3)成立, 则由(8)定义的 $(C)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 存在一列强收敛的子列.

证 由引理3.2知, 序列 $\{u_n\}$ 有界. 首先证明下述结论成立: $\forall \varepsilon > 0, \exists R(\varepsilon) > R_0$ 及 $n(\varepsilon) > 0$, 使得当 $R \geq R(\varepsilon), n \geq n(\varepsilon)$ 时

$$\int_{|x| \geq 2R} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx < \varepsilon. \quad (23)$$

令 $\xi_R : \mathbf{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ 是引理3.2证明中所定义的函数. 由引理3.2证明过程的(11), (13), (15)知, $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) > 0, R_1(\varepsilon) > R_0$, 使得当 $n \geq n(\varepsilon), R \geq R_1(\varepsilon)$ 时分别有

$$|\langle I'_\lambda(u_n), u_n \xi_R \rangle| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbf{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \xi_R dx \right| \leq \varepsilon \|u_n\|^2, \quad (24)$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n \xi_R dx \leq \theta \int_{\mathbf{R}^3} V(x) u_n^2 \xi_R dx. \quad (25)$$

由条件 (K_1) 知, 对上述的 $\varepsilon > 0$ 存在 $R_2(\varepsilon) > R_0$, 使得对任意的 $n \in \mathbf{N}, R \geq R_2(\varepsilon) > R_0$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s \xi_R dx \leq \|K\|_{L^{\frac{2}{2-s}}(B_R^c(0))} S_2^s \|u_n\|^s < \varepsilon. \quad (26)$$

注意到

$$\begin{aligned} \langle I'_\omega(u_n), u_n \xi_R \rangle &\geq \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 \xi_R + u_n \nabla u_n \nabla \xi_R + V(x) u_n^2 \xi_R) dx - \\ &\int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u_n|^s \xi_R dx - \int_{\mathbf{R}^3} f(x, u_n) u_n \xi_R dx. \end{aligned} \quad (27)$$

令 $R(\varepsilon) = \max\{R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon)\}$, 则 $R(\varepsilon) > R_0$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists R(\varepsilon) > R_0$ 及 $n(\varepsilon) > 0$ 使得

当 $R \geq R(\varepsilon)$, $n \geq n(\varepsilon)$ 时, 由(24)-(27)知

$$\varepsilon \geq \langle I'_\omega(u_n), u_n \xi_R \rangle \geq \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 \xi_R dx + (1-\theta) \int_{\mathbf{R}^3} V(x) u_n^2 \xi_R dx - \varepsilon \|u_n\|^2 - \varepsilon.$$

由 $\{u_n\}$ 的有界性及 $0 < \theta < 1$ 知, 存在常数 $C_5 > 0$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla u_n|^2 \xi_R + (1-\theta) V_0 u_n^2 \xi_R) dx \leq \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_n|^2 \xi_R dx + (1-\theta) \int_{\mathbf{R}^3} V(x) u_n^2 \xi_R dx \leq C_5 \varepsilon.$$

从而 $\int_{|x| \geq 2R} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx < \varepsilon$, 即(23)成立.

其次证明: $\{u_n\}$ 在空间 H 中存在强收敛的子列. 因为 $\{u_n\} \subset H$ 是泛函 I_ω 的有界 $(C)_c$ 序列, 所以存在 $\{u_n\}$ 的一个子列 (不失一般性仍记之为 $\{u_n\}$) 和 $u \in H$ 满足条件

在空间 H 中, $u_n \rightharpoonup u$; 在 $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^3)$ ($1 \leq p < 6$) 中, $u_n \rightarrow u$; $u_n(x) \rightarrow u(x)$ 关于 a.e. $x \in \mathbf{R}^3$.

由范数的弱下半连续性知 $\|u\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_2 = \delta$. 所以结合(23)可知 $\delta^2 \geq \|u\|_2^2 \geq \|u\|_{L^2(B_{2R}(0))}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(B_{2R}(0))}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_2^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbf{R}^3 \setminus B_{2R}(0))}^2 \geq \delta^2 - \varepsilon$. 这意味着 $\delta = \|u\|_2$, 即 $\|u_n\|_2 \rightarrow \|u\|_2$. 进而在空间 $L^2(\mathbf{R}^3)$, $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$). 又对任意的 $2 < p < 6$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使得 $p = 2\theta + (1-\theta)6$. 故

$$\|u_n - u\|_p^p = \int_{\mathbf{R}^3} |u_n - u|^{2\theta} |u_n - u|^{(1-\theta)6} dx \leq \|u_n - u\|_2^{2\theta} \|u_n - u\|_6^{(1-\theta)6}. \quad (28)$$

因为嵌入映射 $H \hookrightarrow L^s(\mathbf{R}^3)$ ($2 \leq s \leq 6$) 是连续的, 所以 $\{u_n\}$ 在空间 $L^6(\mathbf{R}^3)$ 是有界的. 故结合(28)及 $\|u_n - u\|_2 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 知, $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$ ($2 \leq p < 6, n \rightarrow \infty$). 即对任意的 $p \in [2, 6)$, 在空间 $L^p(\mathbf{R}^3)$ 中, $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$. 类似于文[26]中引理2.4的证明过程知: 在空间 H 中, $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$). 略去证明.

定理1.1的证明 证明系统(1)存在一个具有负能量的局部极小解. 令 $\bar{B}_\rho = \{u \in H : \|u\| \leq \rho\}$, $\partial B_\rho = \{u \in H : \|u\| = \rho\}$. 由引理3.1(i)知, 当 $\|K\|_{\frac{2}{2-s}} < m$ 时有

$$I_\omega|_{\partial B_\rho} > 0. \quad (29)$$

显然 $I_\omega \in C^1(\bar{B}_\rho, \mathbf{R})$. 故在 $\bar{B}_\rho$ 中, I_ω 是弱下半连续的且下方有界. 定义 $c_1 := \inf\{I_\omega(u) : u \in \bar{B}_\rho\}$, 则 $c_1 > -\infty$. 由条件 (K_2) 知, 取 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $\frac{1}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|v|^s dx > 0$. 从而结合引理2.1, (F_3) 及 $1 < s < 2$ 知, 当 $t > 0$ 充分小时

$$\begin{aligned} I_\omega(tv) &= \frac{t^2}{2} \|v\|^2 - \frac{t^2}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_{tv} v^2 dx - \frac{t^s}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|v|^s dx - \int_{\mathbf{R}^3} F(x, tv) dx \leq \\ &\frac{t^2}{2} \|v\|^2 + \frac{t^2}{2} \omega^2 \int_{\mathbf{R}^3} v^2 dx - \frac{t^s}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x)|v|^s dx + \frac{t^2 \bar{C}}{2} \|v\|_2^2 < 0, \end{aligned}$$

故 $c_1 < 0$. 从而由(29), 引理3.3及Ekeland变分原理知, 存在 $u_1 \in \bar{B}_\rho$ 使得 $I_\omega(u_1) = c_1 < 0$ 且 $I'_\omega(u_1) = 0$, 即 (u_1, ϕ_{u_1}) 是系统(1)的一个具有负能量的局部极小解.

定理1.2的证明 由引理3.1(i')知, 当 $\omega > \omega_*$ 时, $I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho_1} \geq \alpha_1 > 0$. 同定理1.1的证明知, 系统(1)存在一个具有负能量的局部极小解 (u_2, ϕ_{u_2}) .

定理1.3的证明 证明系统(1)存在一个具有正能量的山路解. 由引理3.1(i)-(ii)知, I_ω 具有山路结构; 再由引理3.3知, I_ω 满足 $(C)_c$ 条件. 故由文[33]中的山路定理知, 系统(1)存在一个山路解 (u_3, ϕ_{u_3}) 且 $I_\omega(u_3) = c > 0$.

推论1.1的证明 由定理1.1和定理1.3易知此推论成立.

定理1.4的证明 设 (v, ϕ_v) 是系统(1)的一个解, 则 $I'_\omega(v) = 0$. 结合 (F_3) , (K_1) 及(17)(取 $u_n =$

v)知, 存在常数 $C_6 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} I_\omega(v) &= I_\omega(v) - \langle I'_\omega(v), v \rangle = \\ &= -\left[\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{3}{2} \omega + \phi_v \right) \phi_v v^2 dx \right] + \left(1 - \frac{1}{s} \right) \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |v|^s dx - \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} V(x) v^2 dx + \int_{\mathbf{R}^3} (f(x, v) v - F(x, v)) dx \leq \\ &= -\left[\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{3}{2} \omega + \phi_v \right) \phi_v v^2 dx \right] + \left(1 - \frac{1}{s} \right) \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |v|^s dx + \int_{\mathbf{R}^3} C_6 v^2 dx \leq \\ &= -\int_{\mathbf{R}^3} \left[\sqrt{3} (\omega + \phi_v) |v|^3 - C_6 v^2 - \left(1 - \frac{1}{s} \right) K(x) |v|^s \right] dx. \end{aligned}$$

因此存在常数 $\omega^{**} > 0$ 使得当 $\omega > \omega^{**}$ 时, $I_\omega(v) < 0$. 即当 $\omega > 0$ 充分大时, 系统(1)无正能量解.

定理1.5的证明 由 (F_5) 知, I_ω 是偶泛函. 由引理3.1(i')的证明过程(7)知, 存在常数 $\tilde{\omega} > 0$ 使得当 $\omega > \tilde{\omega}$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2}(\omega + \phi_u) - \frac{C_\varepsilon}{3} > 0$ 且 $I_\omega(u) > \frac{1}{8}\|u\|^2 - \frac{1}{s}\|K\|_{\frac{2}{2-s}} S_2^s \|u\|^s$. 结合 $1 < s < 2$ 知, I_ω 是强制的, 从而是下方有界的; 再由引理3.3知, I_ω 满足 $(C)_c$ 条件. 而由引理2.2知, 要证明定理1.5成立只需证明下述结论成立即可: 对任意的 $k \in \mathbf{N}$, 存在有限维子空间 X^k 及 $\rho_k > 0$ 使得 $\sup_{X^k \cap S_{\rho_k}} I_\omega < 0$.

事实上, 任取 k 个线性无关的函数 $e_1, \dots, e_k \in C_0^\infty(\Omega)$ ($k \in \mathbf{N}$), 定义 $X^k := \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$. 因为对任意的 $x \in \Omega$, $K(x) > 0$, 所以在子空间 X^k 上可定义一个等价范数

$$\|u\|_{s,K} := \left(\int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

由 (F_1) , 引理2.1及有限维空间范数等价性知, 对任意的 $u \in X^k$ 有

$$\begin{aligned} I_\omega(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \frac{1}{s} \int_{\mathbf{R}^3} K(x) |u|^s dx - \int_{\mathbf{R}^3} F(x, u) dx \leq \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega^2 u^2 dx - \frac{1}{s} \|u\|_{s,K}^s \leq C_7 \|u\|^2 - \frac{1}{s} \|u\|_{s,K}^s. \end{aligned}$$

由 $1 < s < 2$ 知, 存在充分小的 $\rho_k \in (0, 1)$ 使得 $I_\omega(u)|_{\|u\|=\rho_k} < 0$. 从而有 $\sup_{X^k \cap S_{\rho_k}} I_\omega < 0$.

参考文献:

- [1] Benci V, Fortunato D. Solitary waves of the nonlinear Klein-Gordon equation coupled with the Maxwell equations[J]. Rev Math Phys, 2002, 14(4): 409-420.
- [2] Benci V, Fortunato D. The nonlinear Klein-Gordon equation coupled with the Maxwell equations[J]. Nonlinear Anal, 2001, 47(9): 6065-6072.
- [3] He Xiaoming. Multiplicity of solutions for a nonlinear Klein-Gordon-Maxwell system[J]. Acta Appl Math, 2014, 130(1): 237-250.
- [4] Li Lin, Tang Chunlei. Infinitely many solutions for a nonlinear Klein-Gordon-Maxwell system[J]. Nonlinear Anal, 2014, 110: 157-169.
- [5] Jing Yongtao, Liu Zhaoli. Elliptic systems with a partially sublinear local term[J]. J Math Study, 2015, 48(3): 290-305.
- [6] Wang Lixia, Xiong Chunlian, Zhao Pingping. On the existence and multiplicity of solutions for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell systems[J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2023, 19: 1-18.

- [7] Liu Xiaoqi, Kang Jincai, Tang Chunlei. Existence and concentration of positive solutions for Klein-Gordon-Maxwell system with asymptotically linear nonlinearities[J]. J Math Phys, 2022, 63(4): 041513.
- [8] 段誉, 孙歆. 渐近线性Klein-Gordon-Maxwell系统正解的存在性[J]. 数学物理学报A辑, 2022, 42(4): 1103-1111.
- [9] Wen Xueping, Chen Chunfang. Existence and asymptotic behavior of nontrivial solutions for the Klein-Gordon-Maxwell system with steep potential well[J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2023, 17: 1-18.
- [10] Che Guofeng, Chen Haibo. Existence and Multiplicity of nontrivial solutions for Klein-Gordon-Maxwell system with a parameter[J]. J Korean Math Soc, 2017, 54(3): 1015-1030.
- [11] Ding Ling, Li Lin. Infinitely many standing wave solutions for the nonlinear Klein-Gordon-Maxwell system with sign-changing potential[J]. Comput Math Appl, 2014, 68(5): 589-595.
- [12] Chen Sitong, Tang Xianhua. Infinitely many solutions and least energy solutions for Klein-Gordon-Maxwell systems with general superlinear nonlinearity[J]. Comput Math Appl, 2018, 75(9): 3358-3366.
- [13] Chen Shangjie, Li Lin. Infinitely many Solutions for Klein-Gordon-Maxwell System with Potentials Vanishing at Infinity[J]. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 2018, 37(1): 39-51.
- [14] Moura E L, Miyagaki O H, Ruviano R. Positive ground state solutions for quascritical Klein-Gordon-Maxwell type systems with potential vanishing at infinity[J]. Electron J Differ Equation, 2017, 154: 1-11.
- [15] Zhang Qiongfeng, Gan Canlin L, Xiao Ting, et al. An improved result for Klein-Gordon-Maxwell systems with steep potential well[J]. Math Meth Appl Sci, 2021, 44: 11856-11862.
- [16] Miyagaki O H, Moura E L, Ruviano R. Positive ground state solutions for quascritical the fractional Klein-Gordon-Maxwell system with potential vanishing at infinity[J]. Complex Var Ellip Equation, 2018: 1-15.
- [17] Liu Xiaoqi, Tang Chunlei. Infinitely many solutions and concentration of ground state solutions for the Klein-Gordon-Maxwell system[J]. J Math Anal Appl, 2022, 505: 125521.
- [18] Liu Xiaoqi, Chen Shangjie, Tang Chunlei. Ground state solutions for Klein-Gordon-Maxwell system with steep potential well[J]. Appl Math Lett, 2019, 90: 175-180.
- [19] Chen Zhi, Tang Xianhua, Qin Lei, et al. Improved results for Klein-Gordon-Maxwell system with critical growth[J]. Appl Math Lett, 2019, 91: 158-164.
- [20] Carriao P C, Cunha P L, Miyagaki O H. Positive ground state solutions for the critical Klein-Gordon-Maxwell system with potentials[J]. Nonlinear Anal TMA, 2012, 75(10): 4068-4078.
- [21] Xu Liping, Chen Haibo. Existence and multiplicity of solutions for nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell equations[J]. Electron J Differ Equation, 2015, 102: 1-12.
- [22] 谢苏静, 陶胜达, 王春勇. 非齐次Klein-Gordon-Maxwell方程解的多重性[J]. 高校应用数学学报, 2022, 37(2): 195-203.
- [23] Wang Lixia. Two solutions for a nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell system[J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2019, 40: 1-12.
- [24] Wu Donglun, Lin Hongxia. Multiple solutions for superlinear Klein-Gordon-Maxwell equations[J]. Math Nachr, 2020, 293: 1827-1835.
- [25] Wang Lixia, Chen Shangjie. Two solutions for nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell system with sign-changing potential[J]. Elect J Differ Equation, 2018, 124: 1-21.

- [26] Shi Hongxia, Chen Haibo. Multiple positive solutions for nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell equations[J]. Appl Math Comput, 2018, 337: 504-513.
- [27] Gan Canlin, Xiao Ting, Zhang Qiongfeng. Improved results of nontrivial solutions for a nonlinear nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell system involving sign-changing potential[J]. Adv Differ Equ, 2020, 167: 1-16.
- [28] Chen Shangjie, Song Shuzi. Multiple solutions for nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell equations on $\mathbf{R}^3$ [J]. Nonlinear Anal RWA, 2015, 22: 259-271.
- [29] 谢苏静, 黄文念. 一类Klein-Gordon-Maxwell方程无穷多解的存在性[J]. 高校应用数学学报, 2018, 33(3): 315-323.
- [30] 段誉, 孙歆. 带有凹凸非线性项的Klein-Gordon-Maxwell系统解的存在性和多重性[J]. 应用数学, 2022, 35(1): 120-127.
- [31] 陈丽珍, 李安然, 李刚. 带有次线性项和超线性项的Klein-Gordon-Maxwell系统多重解的存在性[J]. 数学物理学报A辑, 2017, 37(4): 663-670.
- [32] Wang Zhiqiang. Nonlinear boundary value problems with concave nonlinearities near the origin[J]. Nonlinear Differ Equ Appl, 2001, 8: 15-33.
- [33] Ekeland I. Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

Existence and multiplicity of solutions for Klein-Gordon-Maxwell systems with combined nonlinearities

SUN Xin, DUAN Yu

(College of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie 551700, China)

Abstract: This article concerns the following Klein-Gordon-Maxwell system

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = f(x, u) + K(x)|u|^{s-2}u, & x \in \mathbf{R}^3, \\ \Delta \phi = (\omega + \phi)u^2, & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

where $\omega > 0$ is a constant, $1 < s < 2$. When the nonlinearity f is linearly bounded in u at infinity, existence and multiplicity of nontrivial solutions for the system are obtained via variational methods. The results complete the research results of related literatures.

Keywords: Klein-Gordon-Maxwell system; variational methods; linearly bounded nonlinearity; multiplicity

MR Subject Classification: 35J50; 35J20