

一类Sturm-Liouville算子逆结点问题及其数值解

陈璐¹, 宋晨阳¹, 倪豪泽¹, 王於平^{2*}

(1. 南京林业大学 理学院 信息与计算科学, 江苏南京 210037;

2. 南京林业大学 理学院 应用数学系, 江苏南京 210037)

摘要: 该文研究边界条件含有谱参数Sturm-Liouville算子逆结点问题及其数值解, 得到此算子逆结点问题的唯一性定理. 将第 n 个特征函数的结点作为输入数据, 用Legendre小波法求解此微分算子势函数的近似解, 数值解的例子表明这种算法是有效的.

关键词: Sturm-Liouville算子; 逆结点问题; 数值解; 势函数; Legendre小波法

中图分类号: O175.3

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0209-08

§1 引言

边界条件含有谱参数的Sturm-Liouville算子(以下简称S-L型算子) $L := L(q, \infty, a)$ 定义为

$$lu := -u'' + q(x)u = \rho^2 u, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0, \rho) = 0 = au'(1, \rho) + \rho u(1, \rho). \quad (2)$$

其中 $a \neq 0, a \in \mathbf{R}$ 和 $q(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的实值可积函数.

参数边界条件下微分算子来源于核物理、数学、量子力学等(参见文献[1-4]). 李翊神^[1]利用散射量子理论证明了一组边条件所对应的特征值就能唯一确定算子 L 的势函数 $q(x)$, 并给出反例子证明当 $a = 0$ 时一组边条件所对应的特征值不能确定势函数 $q(x)$, 同时给出求 $q(x)$ 的方法. Hochstadt^[2]研究了更一般参数边界条件下S-L型算子反问题, 在一定的条件下, 先证明了算子 L 的每个特征值是实的、简单的, 给出了特征函数展开定理, 他还证明了算子 L 中的李-定理和经典的S-L算子 L_0 中的Borg定理^[5]是等价的.

经典的S-L算子 $L_0 := L(q, h, H)$ 具有形式

$$\begin{cases} ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < 1, \\ y'(0, \lambda) - hy(0, \lambda) = 0 = y'(1, \lambda) + Hy(1, \lambda), & h, H \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}, \quad \lambda = \rho^2. \end{cases} \quad (3)$$

收稿日期: 2022-12-28 修回日期: 2025-03-26

*通讯作者, Email: ypwang@njfu.com.cn

基金项目: 江苏省大学生创新项目(202110298138H)

经典的S-L算子 L_0 谱理论经过一百多年发展,取得了丰富成果,但它仍然是微分算子谱理论的热点问题之一(见[4-13]或其他文献).人们可以通过实验直接测量特征函数零点(结点),经典的S-L算子逆结点问题就是通过特征函数的结点重新构造这个算子. McLaughlin^[6]首次研究Dirichlet边界条件下S-L算子 L_0 的逆结点问题并证明了该算子的势函数与它的积分均值差由它的结点集唯一确定,与此同时沈照亮^[7]和Hald, McLaughlin^[8]也研究了这类问题. 杨雪峰^[9]研究部分逆结点问题,利用Gesztesy-Simon定理^[10],他证明了 $[b, 1]$ 上强稠定结点集, $0 < b < 1/2$, 唯一确定 $q(x) - \int_0^1 q(t)dt, h, H$, 这项成果发展和延伸了McLaughlin^[6]和Hald, McLaughlin^[8]的研究成果,他还提出两个公开问题. 郑颜修、罗春光与蔡志贤^[11]用孪生-稠定结点集替代强稠定结点集(见定义2.1),得到唯一性定理. 一般来说 $(0, 1)$ 上孪生-稠定结点集含有算子的结点个数是非常少的. 之后研究者们用孪生-稠定结点集概念研究微分算子部分逆结点问题. 郭永霞与魏广生^[12]证明 $[a, b]$ 上, $a < 1/2 < b$, 孪生-稠定结点集唯一确定 $q(x) - \int_0^1 q(t)dt, h, H$, 有意思的是: 在一定的条件下, 区间 $[a, b]$ 的长度 $b - a$ 可以任意小; 杨传富^[13]给出了杨雪峰^[9]的两个公开问题的解答; 王於平和Yurko^[14]研究了含有不连续条件S-L算子的部分逆结点问题并给出了杨雪峰^[9]的第二个公开问题的解答. 值得注意的是这些唯一性定理通常是超定的,有待于进一步改进. 最近几年,研究者们用数值计算方法,研究微分算子的逆结点问题数值解,得到一些有意义的结果(见[15-17]或其他文献).

Rashed^[18]用Chebyshev插值法求积分-微分方程和积分方程近似解,他还证明了Chebyshev插值法计算这类方程的近似解是有效的. Maleknejad, Saeedipoor, Dehbozorgi^[19]用Legendre小波法求第一类Fredholm积分方程的近似解.

本文研究算子 L 逆结点问题及其数值解. §2介绍基本理论, §3得到算子 L 逆结点问题唯一性定理,并用Legendre小波法研究算子 L 势函数的近似解.

§2 预备知识

设 $S(x, \rho), C(x, \rho), \psi(x, \rho)$ 分别为方程(1)的解且满足初值条件^[4]

$$S(0, \rho) = C'(0, \rho) = 0, \quad C(0, \rho) = S'(0, \rho) = 1, \quad \psi(1, \rho) = a, \quad \psi'(1, \rho) = -\rho.$$

则

$$\psi(x, \rho) = aC(1-x, \rho) + \rho S(1-x, \rho).$$

当 $|\rho| \gg 1$ 时, 满足下面的渐近式^[4]

$$S(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\rho^2}\right), \quad 0 < x \leq 1, \quad (4)$$

$$S'(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{e^{\tau x}}{\rho}\right), \quad 0 < x \leq 1, \quad (5)$$

$$\psi(x, \rho) = \sqrt{1+a^2} \sin(\rho(1-x) + \varphi_0) + O\left(\frac{e^{\tau(1-x)}}{\rho}\right), \quad 0 \leq x < 1,$$

$$\psi'(x, \rho) = -\sqrt{1+a^2}\rho \cos(\rho(1-x) + \varphi_0) + O\left(e^{\tau(1-x)}\right), \quad 0 \leq x < 1,$$

其中 $\tau = |\operatorname{Im} \rho|$, $\varphi_0 = \arctan a$. 算子 L 的示性函数 $\Delta(\rho)$ 定义为

$$\Delta(\rho) := \langle \psi, S \rangle(x, \rho),$$

其中 $\langle \psi, S \rangle(x, \rho) := \psi(x, \rho)S'(x, \rho) - \psi'(x, \rho)S(x, \rho)$, 称为 ψ 和 S 的Wronski行列式, 则 $\Delta(\rho)$ 的值

与 x 无关, 并且满足

$$\Delta(\rho) = aS'(1, \rho) + \rho S(1, \rho) = \psi(0, \rho). \quad (6)$$

示性函数 $\Delta(\rho)$ 的所有零点与算子 L 的特征值是一致的. 它可能含有一些复值特征值或重根, 但当 $|n| \gg 1$ 时, 所有特征值都是实的、简单的. 所以存在自然数 k_0 使得当 $|n| \geq k_0$ 时, 所有特征值都是实的、简单的. 记指标集 $\mathbf{A} := \{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. 令 $\sigma(L) = \{\rho_n\}_{n \in \mathbf{A}}$ 表示算子 L 的所有特征值集合. 由 (4)-(6) 得, 当 $|\rho| \gg 1$ 时,

$$\Delta(\rho) = \sqrt{1+a^2} \sin(\rho + \varphi_0) + O\left(\frac{e^\tau}{\rho}\right).$$

当 $|n| \gg 1$ 时, 特征值的渐近式为^[1]

$$\rho_n = n\pi - \varphi_0 + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right) := \rho_{n0} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbf{A},$$

其中 $\rho_{n0} := n\pi - \varphi_0 + \frac{\omega}{n\pi}$, $\omega := \varphi_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) dx$.

当 $|n| \geq k_0$ 时, 实特征值 ρ_n 对应的特征函数 $S(x, \rho_n)$ 也是实值的. 直接计算, 得到下面引理 2.1-引理 2.2.

引理 2.1 特征函数 $S(x, \rho_n)$ 恰好有 $|n| - 1$ 个零点 $x_n^j \in (0, 1)$, 满足

$$0 < x_n^1 < x_n^2 < \dots < x_n^{n-1} < 1, \quad \text{当 } n > 0 \text{ 时},$$

$$0 < x_n^{-1} < x_n^{-2} < \dots < x_n^{n+1} < 1, \quad \text{当 } n < 0 \text{ 时}$$

和

$$x_n^j = \frac{j\pi}{n\pi - \varphi_0} + \frac{1}{2(n\pi - \varphi_0)^2} \int_0^{x_n^j} q(t) dt - \frac{j\omega\pi}{(n\pi - \varphi_0)^3} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (7)$$

且关于 j , $j = 1, 2, \dots, n-1, n > 0, j = -1, -2, \dots, n+1, n < 0$, 一致地成立.

引理 2.2 令 $l_n^j := x_n^{j+1} - x_n^j$ 表示结点区间 $[x_n^j, x_n^{j+1}]$ 的长度, 则

$$l_n^j = \frac{\pi}{n\pi - \varphi_0} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (8)$$

令

$$X := X_+ \cup X_-, \quad X_+ := \bigcup_{n=k_0}^{\infty} \{x_n^j\}_{j=1}^{n-1}, \quad X_- := \bigcup_{n=-\infty}^{-k_0} \{x_n^j\}_{j=n+1}^{-1}.$$

称 X 为算子 L 的结点集, X_+, X_- 在 $[0, 1]$ 上都是稠定的.

§3 主要结果

在这一节, 先建立算子 L 逆结点问题唯一性定理, 然后研究算子 L 逆结点问题势函数数值解并给出数值解的例子.

根据结点的渐近式, 得到下面的定理.

性质 3.1 设 $X_0 \subseteq X$ 是 $[0, 1]$ 上的稠定结点子集. 对于每个固定的 $x \in [0, 1]$, 选取一系列结点 $\{x_{n_k}^{j_{n_k}}\} \subseteq X_0$, 使得 $\lim_{|n_k| \rightarrow \infty} x_{n_k}^{j_{n_k}} = x$, 则

$$\varphi_0 := \pi \lim_{|n_k| \rightarrow \infty} n_k \left(n_k l_{n_k}^{j_{n_k}} - 1 \right), \quad (9)$$

$$f(x) := \lim_{|n_k| \rightarrow \infty} \left[2(n_k\pi - \varphi_0)^2 x_{n_k}^{j_{n_k}} - 2(n_k\pi - \varphi_0) j_{n_k} \pi \right] = \int_0^x q(t) dt - 2\omega x. \quad (10)$$

证 由(8)得

$$l_{n_k}^{j_k} = \frac{1}{n_k(1 - \frac{\varphi_0}{n_k\pi})} + o\left(\frac{1}{n_k^2}\right) = \frac{1}{n_k} + \frac{\varphi_0}{n_k^2\pi} + o\left(\frac{1}{n_k^2}\right).$$

所以 $\varphi_0 = \pi \lim_{|n_k| \rightarrow \infty} n_k (n_k l_{n_k}^{j_{n_k}} - 1)$ 成立. 由(7)得

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{|n_k| \rightarrow \infty} \left[2(n_k\pi - \varphi_0)^2 x_{n_k}^{j_{n_k}} - 2(n_k\pi - \varphi_0) j_{n_k} \pi \right] = \\ &= \lim_{|n_k| \rightarrow \infty} \left(\int_0^{x_{n_k}^{j_{n_k}}} q(t) dt - \frac{2j_{n_k}\pi}{n_k\pi - \varphi_0} + o(1) \right) = \int_0^x q(t) dt - 2\omega x. \end{aligned}$$

得到下面唯一性定理.

定理3.1 设 $X_0 \subseteq X$ 是区间 $[0, 1]$ 上稠定结点集, 则 X_0 能唯一确定算子 L 的系数

$$(q(x) - \int_0^1 q(t) dt, a).$$

证 对于每个固定的 $x \in [0, 1]$, 选取一系列结点 $\{x_{n_k}^{j_{n_k}}\} \subseteq X_0$ 使得 $\lim_{|n_k| \rightarrow \infty} x_{n_k}^{j_{n_k}} = x$. 根据(9)和(10), 计算 φ_0 和 $f(x)$. 重构系数 a 为 $a = \tan \varphi_0$. 对(10)两边求导, 可得重构函数

$$q(x) - \int_0^1 q(t) dt \stackrel{\text{a.e.}}{=} f'(x) + 2\varphi_0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

为了方便, 用 $\tilde{L}$ 表示与 L 具有相同类型且具有不同系数的另外一个算子. 如果用 γ 表示与 L 相关的元素, 则相应的 $\tilde{\gamma}$ 表示与 $\tilde{L}$ 相关的类似的元素. 由定理3.1得到

推论3.1 设 $X_0 = \tilde{X}_0$, 则

$$q(x) - \int_0^1 q(t) dt \stackrel{\text{a.e.}}{=} \tilde{q}(x) - \int_0^1 \tilde{q}(t) dt, \quad \text{且} \quad a = \tilde{a}.$$

为了方便, 下面总设 $n > 0$. 注意到特征函数具有下面渐近式(参考文献[9,11-13])

$$S(x_n^j, \rho_n) =$$

$$\frac{\sin(\rho_n x_n^j)}{\rho_n} - \frac{\cos(\rho_n x_n^j)}{\rho_n^2} \int_0^{x_n^j} q(t) \sin^2(\rho_n t) dt + \frac{\sin(\rho_n x_n^j)}{2\rho_n^2} \int_0^{x_n^j} q(t) \sin(2\rho_n t) dt + O\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right).$$

由于结点 $x_n^j, j = 1, 2, \dots, n-1$, 是第 n 个特征函数 $S(x, \rho_n)$ 的零点, 所以

$$S(x_n^j, \rho_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

即

$$\frac{\sin(\rho_n x_n^j)}{\rho_n} - \frac{\cos(\rho_n x_n^j)}{\rho_n^2} \int_0^{x_n^j} q(t) \sin^2(\rho_n t) dt + \frac{\sin(\rho_n x_n^j)}{2\rho_n^2} \int_0^{x_n^j} q(t) \sin(2\rho_n t) dt + O\left(\frac{1}{\rho_n^3}\right) = 0. \quad (11)$$

当 $n \gg 1$ 时, 方程(11)左边后2项都是 $o\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$, 且

$$\frac{\cos(\rho_n x_n^j)}{\rho_n^2} \int_0^{x_n^j} q(t) \sin^2(\rho_n t) dt = O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right).$$

由(11)得 $\sin(\rho_n x_n^j) = O\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$ 且 $\cos(\rho_n x_n^j) \simeq 1$. 所以

$$\int_0^{x_n^j} q(t) \sin^2(\rho_n t) dt = \rho_n \tan(\rho_n x_n^j) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

即

$$\int_0^{x_n^j} q(t) \sin^2(\rho_n t) dt \cong \rho_n \tan(\rho_n x_n^j). \quad (12)$$

用 Legendre 多项式作为基本函数近似势函数 $q(t)$, 并将积分方程(12)转换为线性方程组(14), 求出 $q(t)$ 的近似解.

3.1 Legendre 小波法

对于任何正整数 k , Legendre 小波^[17]在区间 $[0, 1)$ 上定义为

$$\xi_{l,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} L_m(2^k t - 2l + 1), & t \in \left[\frac{2l-2}{2^k}, \frac{2l}{2^k} \right), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $l = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$, $m = 0, 1, \dots, M-1$. 这里 $L_m(t)$ 是 m 次的 Legendre 多项式, 通过以下递推公式确定.

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \quad L_1(t) = t, \\ L_{m+1}(t) &= \frac{2m+1}{m+1} t L_m(t) - \frac{m}{m+1} L_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

当 $n \gg 1$ 时, 通过 Legendre 小波法来近似势函数 $q(t)$, 并且有

$$q(t) \cong \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{l,m} \xi_{l,m}(t) - c_{2^{k-1}, M-1} \xi_{2^{k-1}, M-1}(t) = \mathbf{C}^T \Psi(t). \quad (13)$$

其中 $\mathbf{C}$ 和 $\Psi(t)$ 是 $(2^{k-1}M-1) \times 1$ 列向量 $\mathbf{C} = [c_{1,0}, \dots, c_{1,M-1}, c_{2,0}, \dots, c_{2,M-1}, \dots, c_{2^{k-1}-1,0}, \dots, c_{2^{k-1}-1,M-1}, c_{2^{k-1},0}, \dots, c_{2^{k-1},M-2}]^T$, $\Psi(t) = [\xi_{1,0}(t), \dots, \xi_{1,M-1}(t), \xi_{2,0}(t), \dots, \xi_{2,M-1}(t), \dots, \xi_{2^{k-1}-1,0}(t), \dots, \xi_{2^{k-1}-1,M-1}(t), \xi_{2^{k-1},0}(t), \dots, \xi_{2^{k-1},M-2}(t)]^T$.

根据文献[17, 19]的结果, 得到

$$q(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{l,m} \xi_{l,m}(t),$$

其中 $c_{l,m} = \langle q, \xi_{l,m} \rangle_{L^2[0,1]}$, $l = 1, 2, \dots$. 令

$$q_{k,M}(t) := \sum_{l=1}^{2^{k-1}} c_{l,m} \xi_{l,m}(t) - c_{2^{k-1}, M-1} \xi_{2^{k-1}, M-1}(t) = \mathbf{C}^T \Psi(t).$$

文献[17]给出近似解 $q_{k,M}(t)$ 与 $q(t)$ 的误差估计.

定理 3.2^[17] 设 $q \in C^{(M)}[0, 1]$ 是 $[0, 1]$ 上实值函数, 则 $q_{k,M}(t)$ 是 $q(t)$ 的近似解且具有误差估计 $\|q(t) - q_{k,M}(t)\|_2 \leq \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{(\frac{2^{k-1}}{\pi})^M M! \sqrt{2M+1}}$, $k > 2$, 其中 $\gamma = \max_{t \in [0,1]} |q^{(M)}(t)|$.

将式(13)代入(12), 得到

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{l,m} \int_0^{x_n^j} \xi_{l,m}(t) \sin^2(\rho_{n0} t) dt - c_{2^{k-1}, M-1} \int_0^{x_n^j} \xi_{2^{k-1}, M-1}(t) \sin^2(\rho_{n0} t) dt \cong \\ \rho_{n0} \tan(\rho_{n0} x_n^j), \end{aligned}$$

其中 $n > k_0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. 给定第 n 个特征函数结点 $\{x_n^j\}_{j=1}^{n-1}$, 算子 L 逆结点问题的数值解可以通过以下步骤计算:

算法 1

1° 选定 k, M . 设 $n = 2^{k-1}M$, $k, M \gg 1$.

2° 通过下面的线性方程计算未知向量 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{B}, \quad (14)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0}^1 & \cdots & a_{1,M-1}^1 & a_{2,0}^1 & \cdots & a_{2,M-1}^1 & \cdots & a_{2^{k-1}-1,0}^1 & \cdots & a_{2^{k-1}-1,M-1}^1 & a_{2^{k-1},0}^1 & \cdots & a_{2^{k-1},M-2}^1 \\ a_{1,0}^2 & \cdots & a_{1,M-1}^2 & a_{2,0}^2 & \cdots & a_{2,M-1}^2 & \cdots & a_{2^{k-1}-1,0}^2 & \cdots & a_{2^{k-1}-1,M-1}^2 & a_{2^{k-1},0}^2 & \cdots & a_{2^{k-1},M-2}^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,0}^{n-1} & \cdots & a_{1,M-1}^{n-1} & a_{2,0}^{n-1} & \cdots & a_{2,M-1}^{n-1} & \cdots & a_{2^{k-1}-1,0}^{n-1} & \cdots & a_{2^{k-1}-1,M-1}^{n-1} & a_{2^{k-1},0}^{n-1} & \cdots & a_{2^{k-1},M-2}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$a_{l,m}^j = \int_0^{x_n^j} \xi_{l,m}(t) \sin^2(\rho_{n0} t) dt, \quad \rho_{n0} = n\pi - \varphi_0 + \frac{\omega}{n\pi}, \quad l = 1, 2, \cdots, 2^{k-1}, \quad m = 0, 1, \cdots, M-1, \\ j = 1, 2, \cdots, n-1, \text{ 且}$$

$$B = (\rho_{n0} \tan(\rho_{n0} x_n^1), \rho_{n0} \tan(\rho_{n0} x_n^2), \cdots, \rho_{n0} \tan(\rho_{n0} x_n^{n-1}))^T.$$

3° 用公式 $[q(t_i)] = C^T \Phi$ 求近似值 $q(t_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 其中

$$t_i = \frac{2i-1}{2n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \quad \Phi = \left[\xi\left(\frac{1}{2n}\right), \xi\left(\frac{3}{2n}\right), \cdots, \xi\left(\frac{2n-3}{2n}\right) \right].$$

3.2 数值例子

根据上面的算法, 用Legendre小波法计算势函数 $q(x)$ 的近似解. 同时给出几个数值的例子证明数值计算方法的有效性. 使用Matlab软件来实现算法并给出图像, 便于直观观察.

例3.1 设势函数 $q(x) = \cos(2\pi x)$, 则 $\int_0^1 q(t) dt = 0$. 设结点 $x_n^j, j = 1, 2, \cdots, 23, n = 24$ 时的数值如表1所示.

表1 当 $k = 4, M = 3, n = 24$ 时, 结点数值

j	1	2	3	4	5	6
x_n^j	0.041717383	0.083434270	0.125150198	0.166864770	0.208577682	0.250288743
j	7	8	9	10	11	12
x_n^j	0.291997888	0.333705183	0.375410821	0.417115108	0.458818441	0.500521285
j	13	14	15	16	17	18
x_n^j	0.542224134	0.583927486	0.625631802	0.667337478	0.709044818	0.750754010
j	19	20	21	22	23	
x_n^j	0.792465119	0.834178075	0.875892685	0.917608642	0.959325547	

表1中结点是逆结点问题数值解中的输入数据. 由表1中的数值可以计算得 $a \simeq 1$. 应用Legendre小波法, 得到势函数 q 的数值, 计算得精确解和数值解, 然后计算出两者的绝对误差(见表2).

表2 当 $k = 4, M = 3, n = 24$ 时, 绝对误差

t_i	0.02083	0.06250	0.10417	0.14583	0.18750	0.22917
绝对误差	0.00831	0.00810	0.00776	0.00839	0.00801	0.00739
t_i	0.27083	0.31250	0.35417	0.39583	0.43750	0.47917
绝对误差	0.00824	0.00820	0.00760	0.00832	0.00846	0.00796
t_i	0.52083	0.56250	0.60417	0.64583	0.68750	0.72917
绝对误差	0.00842	0.00821	0.00799	0.00826	0.00776	0.00691
t_i	0.77083	0.81250	0.85417	0.89583	0.93750	
绝对误差	0.00901	0.00616	0.01462	0.00199	0.01627	

当 $k = 4, M = 3, k = 4, M = 5$ 和 $k = 4, M = 7$ 时, 图1是精确解和数值解及计算出两者的绝

对误差.

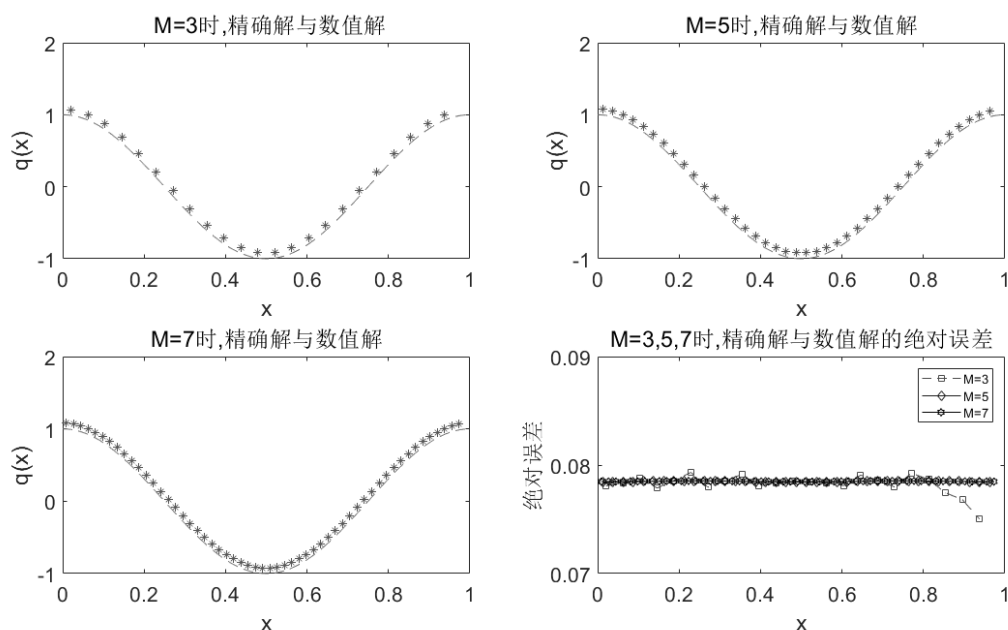


图1 $k=4$, $M=3, 5, 7$ 时, 例3.1中 $q(x)$ 的精确值和近似值及 $q(x)$ 精确解和数值解的绝对误差

从图1可以看出随着 n 增大, $q(x)$ 的精确值和近似值的绝对误差变小, 它们证明了本文的数值解法是有效的.

致谢 作者衷心感谢审稿人耐心细致的工作和宝贵建议, 这些建议提高了本文的质量.

参考文献:

- [1] 李翊神. 边界带参数的二阶微分方程特征值反问题[J]. 数学学报, 1965, 15(1): 74-80.
- [2] Hochstadt H. On inverse problems associated with second-order differential operators[J]. Acta Math, 1967, 119(1): 173-192.
- [3] Fulton C T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1977, 77(3-4): 293-308.
- [4] Freiling G, Yurko V A. Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter[J]. Inverse Probl, 2010, 26(6), 055003(17pp).
- [5] Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe[J]. Acta Math, 1946, 78: 1-96.
- [6] McLaughlin J R. Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness result[J]. J Diff Equ, 1988, 73(2): 354-362.
- [7] Shen Chaoliang. On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equations[J]. SIAM J Math Anal, 1988, 19: 1419-1424.

- [8] Hald O H, McLaughlin J R. Solution of inverse nodal problems[J]. *Inverse Probl*, 1989, 5(3): 307-377.
- [9] Yang Xuefeng. A new inverse nodal problem[J]. *J Diff Equ*, 2001, 169: 633-653.
- [10] Gesztesy F, Simon B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential II: The case of discrete spectrum[J], *Trans Amer Math Soc*, 2000, 352: 2765-2787.
- [11] Cheng Yanhsiou, Law Chunkong, Tsay Jhishen. Remarks on a new inverse nodal problem[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, 248: 145-155.
- [12] Guo Yongxia, Wei Guangsheng. Inverse problems: Dense nodal subset on an interior subinterval[J]. *J Diff Equ*, 2013, 255: 2002-2017.
- [13] Yang Chuanfu. Solution to open problems of Yang concerning inverse nodal problems[J]. *Isr J Math*, 2014, 204: 283-298.
- [14] Wang Yuping, Yurko V A. On the inverse nodal problems for discontinuous Sturm-Liouville operators[J]. *J Diff Equ*, 2016, 260: 4086-4109.
- [15] Neamaty A, Akbarpoor Sh, Yilmaz E. Solving inverse Sturm-Liouville problem with separated boundary conditions by using two different input data[J]. *Int J Comput Math*, 2018, 95(10): 1992-2010.
- [16] Akbarpoor Sh, Koyunbakan H, Dabbaghian A. Solving inverse nodal problem with spectral parameter in boundary conditions[J]. *Inverse Probl Sci Eng*, 2019, 27: 1790-1801.
- [17] Wang Yuping, Yilmaz E, Akbarpoor Sh. The numerical solution of inverse nodal problem for integro-differential operator by Legendre wavelet method[J]. *Int J Comput Math*, 2023, 100, 219-232.
- [18] Rashed M T. Numerical solution of a special type of integro-differential equations[J]. *Appl Math Comput*, 2003, 143(1): 73-88.
- [19] Maleknejad K, Saeedipoor E, Dehbozorgi R. Legendre wavelets direct method for the numerical solution of Fredholm integral equation of the first kind[C]. *Proceedings of the world congress on Engineering*, 2016, vol 1.

The inverse nodal problem and its numerical solutions for a class of Sturm-Liouville operators

CHEN Lu¹, SONG Chen-yang¹, NI Hao-ze¹, WANG Yu-ping²

- (1. Information and Computational Sciences, College of Science, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China;
- 2. Department of Applied Mathematics, College of Science, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: The inverse nodal problem and its numerical solutions for the Sturm-Liouville operator with one boundary condition having the spectral parameter are studied in this paper. The uniqueness theorem for the inverse nodal problem for this operator is firstly established. Then, by using the nodal points of the n -th eigenfunction as input data, approximation solutions for potential function of this operator by Legendre wavelet method are obtained. The numerical example shows that the numerical algorithm is valid.

Keywords: Sturm-Liouville-type operator; inverse nodal problem; numerical solution; potential function; Legendre wavelet method

MR Subject Classification: 34A55; 47E05; 34B99