

一类信息干预下具有非线性感染率的 HIV/AIDS模型

许志航, 张太雷*, 侯悦, 乔霞

(长安大学 理学院, 陕西西安 710064)

摘要: 根据艾滋病的传播机理, 建立了一类受信息影响且具有非线性感染率的 SEI_1I_2A 传染病模型. 首先, 给出了模型的基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 和两类平衡点: 无病平衡点和地方病平衡点; 通过构造Lyapunov函数和LaSalle不变集原理证明了 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时无病平衡点的全局稳定性, 借助第二加性复合矩阵的方法证明了 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时地方病平衡点的全局稳定性. 其次, 选取河南省2005年至2019年新发艾滋病病例数据进行了数值模拟. 最后, 对部分参数进行敏感性分析, 研究结果表明易感者与无意识的感染者和潜伏者的有效接触率对基本再生数有着较大的影响. 扩大艾滋病信息宣传的覆盖面、提高公众对艾滋病的检测意识可以有效地降低艾滋病的传播率, 控制艾滋病的蔓延.

关键词: 信息影响; HIV/AIDS模型; 全局稳定性; 第二加性复合矩阵

中图分类号: O175.13

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0193-16

§1 引言

艾滋病毒(HIV)是感染人类免疫系统的慢病毒, 属于逆转录病毒的一种, 而艾滋病(Acquired Immune Deficiency Syndrome)是由感染艾滋病毒(HIV)引起, 对人体健康具有极大危害的传染病. 大多数感染者是因为输入含有HIV病毒的血液、不安全的性接触和母婴垂直传播等途径产生的. 目前, 世界卫生组织将艾滋病视为影响公众健康的重要公共卫生难题之一, 根据国家疾病预防控制中心发布的数据来看, 近十年来, 艾滋病的死亡率位于甲乙类传染病第一, 且新发艾滋病感染人数持续上升. 其死亡率从2002年0.07/10万增长到2018年1.31/10万, 于2021年降至1.28/10万^[1], 由此可见, 虽然艾滋病患者在持续增加, 但其死亡率在近几年却有所下降, 导致这种趋势的主要原因是由于我国在艾滋病信息宣传和预防方面做了不懈努力.

随着信息化产业的高速发展, 媒体能够更加及时、准确地报道出各类突发疾病的信息, 信息实时共享已成为了可能. 从此次抗击新冠疫情中可以看出, 信息在预防和控制疾病传播中起

收稿日期: 2024-02-21 修回日期: 2024-10-19

*通讯作者, Email: tlzhang@chd.edu.cn

基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划(2025JC-YBMS-004)

到了至关重要的作用,因此在疫情爆发时期掌握相关信息是应对疫情的关键.近些年来,许多学者在建立传染病模型时将信息因素考虑其中.例如,Yuan等^[2]假设疾病相关信息按照Logistic增长,建立了具有信息变量的SIR模型,研究表明随着信息量的增加,感染者数量不断下降,但当信息承载量处于中间水平时,感染者数量呈周期状.Huo等^[3]建立了具有信息影响的SEIM模型,通过构造函数证明了平衡点的稳定性,研究发现信息因素对于降低传染率有很大的作用.Fahad等^[4]建立了具有意识分类和信息时滞影响的传染病模型,并对此模型进行了动力学分析,研究发现若提高媒体信息宣传方案的执行率,则受感染的人数就会下降.Pawelek等^[5]假设公众在获取关于流感的信息后行为会发生改变,提出了用 $\beta e^{-\alpha T}$ 作为有效接触率的SEIT模型,其中 α 表示疾病信息对传染率的影响程度,研究表明通过社交媒体来传播疾病信息可以降低流感病毒的感染率.Zhang等^[6]建立了一种具有疫苗接种和信息干预的乙肝传染病模型,揭示了接种疫苗和信息宣传能够有效的控制疾病.张杰豪等^[7]建立了一类疾病传染率与潜伏者移出率受信息干预的SEIR模型,通过数值模拟验证了信息实时共享对于疫情防控有着显著作用.

事实上,像艾滋病这种长期存在的传染病,人们只有在爆发时期会高度关注其相关信息,而随着疾病的持续蔓延,人们对其关注度也随之降低,冉艳等^[8]对武汉市1158名大学生进行了艾滋病健康信息素养的调查,旨在了解现阶段大学生对于艾滋病健康信息的认识程度,通过多元线性回归分析发现大学生对艾滋病健康信息的认识不足,导致艾滋病感染人群主要集中在青少年中,因此不能忽视信息对于艾滋病传播的影响.目前国内外有很多学者基于艾滋病的传播机理,从传染病动力学的角度进行了较为深入的研究^[9-16],但关于具有信息影响的艾滋病动力学系统的研究尚不多见.根据以上叙述,考虑到信息对艾滋病的传播具有一定的抑制作用,引用更一般的光滑函数 $\beta(I_1)=\beta_1-\beta_2f(I_1)$ 和 $\rho(E)=\beta_3-\beta_4f(E)$ 作为有效接触率,建立并研究一类具有信息影响和非线性感染率的 SEI_1I_2A 艾滋病模型.

§2 模型建立

艾滋病的感染期包括3个阶段:急性感染期、潜伏期和艾滋病期.基于艾滋病的传播机理,将某一区域内 t 时刻的总人数 $N(t)$ 划分为5类:易感者 $S(t)$ 、潜伏者 $E(t)$ 、无意识的HIV感染者 $I_1(t)$ 、有意识的HIV感染者 $I_2(t)$ 和艾滋病人 $A(t)$.艾滋病的主要传染源为潜伏者、HIV感染者和艾滋病人,随着艾滋病防治工作和宣传工作的不断深入,人们能够更加清晰地认识艾滋病,有意识的HIV感染者会对自己的行为加以控制,从而假设有意识的感染者不与易感者之间发生接触感染.又由于艾滋病人的症状明显,活动能力有限,故本文忽略艾滋病人易感者接触.用双线性函数 $\beta(I_1)=\beta_1-\beta_2f(I_1)$ 表示在信息影响下易感者与无意识的HIV感染者的有效接触率,用 $\rho(E)=\beta_3-\beta_4f(E)$ 表示在信息影响下易感者与潜伏者的有效接触率,建立传染病动力学模

型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]SI_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)]SE - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]SI_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)]SE - \gamma_1 E - \gamma_2 E - \mu E, \\ \frac{dI_1}{dt} = \gamma_1 E - \rho I_1 - \tau_1 I_1 - \mu I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} = \gamma_2 E + \rho I_1 - \tau_2 I_2 - \mu I_2, \\ \frac{dA}{dt} = \tau_1 I_1 + \tau_2 I_2 - \mu A - dA. \end{cases} \quad (1)$$

在模型(1)中, Λ 表示人口输入率; μ 表示自然死亡率; d 表示因病死亡率; β_1 和 β_3 分别表示易感者与无意识的HIV感染者和潜伏者接触的基本感染率; β_2 和 β_4 分别表示信息对无意识的HIV感染者和潜伏者传播疾病的最大削弱作用, 由于信息影响的有限性, 故 $\beta_1 > \beta_2$, $\beta_3 > \beta_4$; γ_1 和 γ_2 分别表示潜伏者转化为无意识的HIV感染者和有意识的HIV感染者的比率; τ_1 和 τ_2 分别表示无意识的HIV感染者和有意识的HIV感染者转化为艾滋病人的比率; ρ 表示无意识的HIV感染者转化为有意识的HIV感染者的比率. 假设信息对于疾病的抑制具有正面影响, 函数 $f(I_1)$ 和 $f(E)$ 分别表示在信息作用下无意识的HIV感染者和潜伏者对传染率的影响函数, 即当没有艾滋病感染者时, 信息传播不会影响人们的行为, 从而 $f(0) = 0$; 当有艾滋病感染者时, 人们就会意识到潜在的危险, 随着信息所发布的艾滋病患者的增多, 人们的警惕心理就越强, 易感者与患者接触的机会则越少, 从而有 $f'(I_1) \geq 0$, $f'(E) \geq 0$. 又由于信息的影响力有限, 则有 $\lim_{I_1 \rightarrow \infty} f(I_1) = 1$, $\lim_{E \rightarrow \infty} f(E) = 1$. 综上所述, $f(I_1)$ 和 $f(E)$ 满足条件

$$(a) f(0) = 0; (b) f'(I_1) \geq 0, f'(E) \geq 0; (c) \lim_{I_1 \rightarrow \infty} f(I_1) = 1, \lim_{E \rightarrow \infty} f(E) = 1.$$

容易看出, 模型(1)的解具有非负性, 并将(1)中的5个式子相加得

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - dA \leq \Lambda - \mu N.$$

则模型(1)最大正向不变集为

$$X = \left\{ (S, E, I_1, I_2, A) \in \mathbf{R}_+^5 : S + E + I_1 + I_2 + A \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

接下来将在 X 中研究模型(1)解的动力学性质.

§3 平衡点的存在性

平衡点对于模型(1)的研究有着至关重要的作用, 因此本节将先讨论无病平衡点和地方性平衡点的存在性.

容易验证, 模型(1)始终存在无病平衡点 $P^0 = (S^0, E^0, I_1^0, I_2^0, A^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$. 根据文献[17]中再生矩阵方法, 计算出模型(1)的基本再生数

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\beta_3(\rho + \tau_1 + \mu) + \beta_1\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}.$$

关于模型(1)平衡点的存在性, 有如下结论.

定理1 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 模型(1)仅存在无病平衡点 $P^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)不仅存在无病平衡点 P^0 , 还存在唯一的地方病平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, A^*)$.

证 显然模型(1)总存在无病平衡点 P^0 . 现只需证当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点 P^* . 若地方病平衡点 P^* 存在, 则它满足代数方程组

$$\begin{cases} \Lambda - [\beta_1 - \beta_2 f(I_1^*)]S^*I_1^* - [\beta_3 - \beta_4 f(E^*)]S^*E^* - \mu S^* = 0, \\ [\beta_1 - \beta_2 f(I_1^*)]S^*I_1^* + [\beta_3 - \beta_4 f(E^*)]S^*E^* - \gamma_1 E^* - \gamma_2 E^* - \mu E^* = 0, \\ \gamma_1 E^* - \rho I_1^* - \tau_1 I_1^* - \mu I_1^* = 0, \\ \gamma_2 E^* + \rho I_1^* - \tau_2 I_2^* - \mu I_2^* = 0, \\ \tau_1 I_1^* + \tau_2 I_2^* - \mu A^* - dA^* = 0. \end{cases} \quad (2)$$

通过方程组(2)中前三个式子得

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}{\mu} E^*, \\ S^* &= \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)E^*}{[\beta_1 - \beta_2 f(I_1^*)]I_1^* + [\beta_3 - \beta_4 f(E^*)]E^*}, \\ E^* &= \frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1^*. \end{aligned}$$

将 E^* 分别代入上述 S^* 中得

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}{\mu} \cdot \frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1^*, \quad (3)$$

$$S^* = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}{\gamma_1[\beta_1 - \beta_2 f(I_1^*)] + [\beta_3 - \beta_4 f\left(\frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1^*\right)](\rho + \tau_1 + \mu)}. \quad (4)$$

根据(3)和(4)令

$$\begin{aligned} \psi(I_1) &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}{\mu} \cdot \frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1, \\ \varphi(I_1) &= \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}{\gamma_1[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] + [\beta_3 - \beta_4 f\left(\frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1\right)](\rho + \tau_1 + \mu)}. \end{aligned}$$

显然 $\psi(I_1)$ 为严格单调递减函数. 记 $\varphi(I_1) = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \mu}{h(I_1)}$, 其中

$$h(I_1) = \frac{\gamma_1[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]}{\rho + \tau_1 + \mu} + \beta_3 - \beta_4 f\left(\frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1\right),$$

对 $h(I_1)$ 求导可得

$$h'(I_1) = -\frac{\gamma_1 \beta_2 f'(I_1)}{\rho + \tau_1 + \mu} - \frac{\beta_4(\rho + \tau_1 + \mu)}{\gamma_1} f'\left(\frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1\right) \leq 0.$$

所以 $h(I_1)$ 为单调递减函数, 从而 $\varphi(I_1)$ 为单调递增函数. 令 $G(I_1) = \psi(I_1) - \varphi(I_1)$, 则 $G(I_1)$ 为严格单调递减函数. 当 $I_1 = 0$ 时, 结合 $\mathcal{R}_0 > 1$, 可得

$$G(0) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}{\gamma_1 \beta_1 + \beta_3(\rho + \tau_1 + \mu)} > 0,$$

当 $I_1 = \frac{\Lambda}{\mu}$ 时, 得

$$\psi\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) = \frac{\Lambda}{\mu} \left[1 - \frac{\mu\gamma_1 + \gamma_1(\rho + \tau_1) + (\gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}{\mu\gamma_1}\right] < 0, \quad \varphi\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) > 0.$$

于是 $G\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) < 0$. 根据零点定理和 $G(I_1)$ 的严格单调递减性可知存在唯一解 $I_1^* \in \left(0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)$. 将 I_1^* 代

入方程组(2)得

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\gamma_1 A}{\gamma_1 \mu + \gamma_1 [\beta_1 - \beta_2 f(I_1^*)] I_1^* + (\tau_1 + \rho + \mu) \left[\beta_3 - \beta_4 f\left(\frac{\tau_1 + \rho + \mu}{\gamma_1} I_1^*\right) \right] I_1^*}, \\ E^* &= \frac{\rho + \tau_1 + \mu}{\gamma_1} I_1^*, \quad I_2^* = \frac{\gamma_2 (\tau_1 + \rho + \mu) + \gamma_1 \rho}{\gamma_1 (\tau_2 + \mu)} I_1^*, \\ A^* &= \frac{\gamma_1 (\mu + \tau_2) \tau_1 + \tau_2 [\gamma_2 (\tau_1 + \rho + \mu) + \gamma_1 \rho]}{\gamma_1 (\mu + \tau_2) (\mu + d)} I_1^*. \end{aligned}$$

综上所述, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点.

注1 讨论无病平衡点和地方性平衡点的稳定性对于疾病的流行趋势具有十分重要的意义. 无病平衡点对应着疾病最终是否消亡, 而地方病平衡点对应着疾病是否能够持久存在而形成地方病.

§4 无病平衡点的稳定性

本节讨论无病平衡点的全局稳定性和吸引性. 首先给出无病平衡点的局部稳定性.

定理2 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P^0 局部渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P^0 不稳定.

证 模型(1)在 $P^0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ 处的Jacobi矩阵为

$$J(P^0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_3 \frac{A}{\mu} & -\beta_1 \frac{A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 \frac{A}{\mu} - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu & \beta_1 \frac{A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & -\rho - \tau_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \rho & -\tau_2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 & -\mu - d \end{pmatrix}.$$

记 $J(P^0)$ 的特征方程为

$$f(\lambda) = (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + d)(\lambda + \mu + \tau_2)g(\lambda),$$

令

$$g(\lambda) = \lambda^2 + \left(\omega_1 + \omega_2 - \beta_3 \frac{A}{\mu}\right) \lambda + \omega_2 \left(\omega_1 - \beta_3 \frac{A}{\mu}\right) - \gamma_1 \beta_1 \frac{A}{\mu},$$

其中 $\omega_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \mu$, $\omega_2 = \rho + \tau_1 + \mu$. 显然 $J(P^0)$ 有5个特征值, $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\mu - d$, $\lambda_3 = -\mu - \tau_2$, 而 λ_4 和 λ_5 为方程 $g(\lambda) = 0$ 的根. 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时

$$\lambda_4 + \lambda_5 = \beta_3 \frac{A}{\mu} - \omega_1 - \omega_2 < 0, \quad \lambda_4 \lambda_5 = \omega_2 \left(\omega_1 - \beta_3 \frac{A}{\mu}\right) - \gamma_1 \beta_1 \frac{A}{\mu} > 0.$$

所以当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $J(P^0)$ 具有5个负实部的根, 因此无病平衡点 P^0 局部渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, λ_4 和 λ_5 中存在一个正实部特征根, 故 P^0 不稳定.

接下来将讨论无病平衡点的全局性态.

定理3 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P^0 全局渐近稳定; 当 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时, P^0 全局吸引.

证 构造Lyapunov函数 $V(t) = \gamma_1 E(t) + \left[(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu) - \beta_3 \frac{A}{\mu}\right] I_1(t)$, 沿着模型(1)的解, 对

函数 $V(t)$ 求全导数得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = & \gamma_1 \{ [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S E - \gamma_1 E - \gamma_2 E - \mu E \} + \\ & \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu - \beta_3 \frac{A}{\mu} \right) [\gamma_1 E - (\rho + \tau_1 + \mu) I_1] = \gamma_1 [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S I_1 + \\ & \gamma_1 [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S E - (\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu) I_1 - \gamma_1 \beta_3 \frac{A}{\mu} E + \beta_3 \frac{A}{\mu} (\rho + \tau_1 + \mu) I_1 \leq \\ & I_1 \left[\gamma_1 \beta_1 \frac{A}{\mu} - (\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu) + (\rho + \tau_1 + \mu) \beta_3 \frac{A}{\mu} \right] = \\ & I_1 (\mathcal{R}_0 - 1)(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu). \end{aligned}$$

当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$, 令

$$\Omega_1 = \left\{ (S, E, I_1, I_2, A) \in X \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\} = \left\{ (S, E, I_1, I_2, A) \in X \mid I_1 = 0 \right\},$$

在 Ω_1 内当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S \rightarrow \frac{A}{\mu}$, $E \rightarrow 0$, $I_2 \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$, 所以 $\{P^0\}$ 是 Ω_1 中模型(1)的最大 ω 不变集. 由LaSalle不变集原理可知, X 内任何轨线都趋于 P^0 , 结合定理2, 无病平衡点 P^0 在 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时全局渐近稳定.

当 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = & \gamma_1 \{ [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] (S - S^0) I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S E - \gamma_1 E - \gamma_2 E - \mu E \} + \\ & \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu - \beta_3 \frac{A}{\mu} \right) [\gamma_1 E - (\rho + \tau_1 + \mu) I_1] + \gamma_1 \frac{A}{\mu} [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 \leq \\ & \gamma_1 [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] (S - S^0) I_1 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu) I_1 + \beta_3 \frac{A}{\mu} (\rho + \tau_1 + \mu) I_1 + \\ & \gamma_1 \beta_1 \frac{A}{\mu} I_1 = (S - S^0) I_1 \gamma_1 [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] + I_1 (\mathcal{R}_0 - 1)(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu) = \\ & (S - S^0) I_1 \gamma_1 [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] \leq 0. \end{aligned}$$

令 $\Omega_2 = \left\{ (S, E, I_1, I_2, A) \in X \mid \frac{dV}{dt} = 0 \right\}$, 有下面两种情况.

(i) 若 $S = S^0$, 则在不变集合 X 中有 $E(t) = I_1(t) = I_2(t) = A(t) = 0$.

(ii) 若 $S \neq S^0$, 则有 $I_1 = 0$. 在 Ω_2 内, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S \rightarrow \frac{A}{\mu}$, $E \rightarrow 0$, $I_2 \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$.

综上所述, $\{P^0\}$ 是 Ω_2 的最大 ω 不变集. 由LaSalle不变集原理知, 无病平衡点 P^0 在 $\mathcal{R}_0 = 1$ 时全局吸引.

注2 本节首先通过证明无病平衡点 P^0 在 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时的局部稳定性, 反映出当初值落在 P^0 附近, 疾病最终会消亡; 而当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P^0 不稳定, 意味疾病将流行. 接着通过证明无病平衡点 P^0 在 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时的全局稳定性, 意味着可以将初值扩大到更大的范围内变化, 随着时间的推移, 疾病最终会灭绝.

§5 地方病平衡点的稳定性

§3已经证明当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点 P^* , 接下来将给出地方病平衡点 P^* 的全局稳定性.

因为模型(1)的前3个方程都不包含 I_2 和 A , 因此先分析由模型(1)前3个方程构成的子模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]SI_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)]SE - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]SI_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)]SE - \gamma_1 E - \gamma_2 E - \mu E, \\ \frac{dI_1}{dt} = \gamma_1 E - \rho I_1 - \tau_1 I_1 - \mu I_1. \end{cases} \quad (5)$$

在证明地方病平衡点 P^* 的全局稳定性前, 先给出下述引理. 考虑微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma \subset \mathbf{R}^n. \quad (6)$$

设 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ 是满足方程组(6)的初始值为 $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ 的解, 给出如下的基本假设.

(H₁) 方程组(6)存在一个紧吸引子集 $K \subset \Gamma$;

(H₂) 方程组(6)在 Γ 内有唯一的平衡点 $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma$.

引理1^[18](Bendixson判据) 设 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})$ 是一个 $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 矩阵函数, 且对 $\mathbf{x} \in \Gamma$ 时 $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in C^1$. 假设 $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})$ 存在且在 $\mathbf{x} \in K$ 上是连续的, K 是一个紧的吸引集, 定义

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \sup_{\mathbf{x}_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\mathbf{B}(\mathbf{x}(v, \mathbf{x}_0))) dv,$$

这里

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_f \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{f}^{[2]}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}^{-1},$$

$\mathbf{P}_f$ 是把矩阵 $\mathbf{P}$ 的每一个元素 $\mathbf{P}_{ij}$, 用 $\mathbf{P}_{ij}$ 沿 $\mathbf{f}$ 的方向导数 $\frac{\partial \mathbf{P}_{ij}^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \left. \frac{d\mathbf{P}_{ij}}{dt} \right|_{(6)}$ 取代得到的矩阵,

$\frac{\partial \mathbf{f}^{[2]}}{\partial \mathbf{x}}$ 是 $\mathbf{f}$ 的Jacobi矩阵 $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ 的第二加性复合矩阵, $\mu(\mathbf{B})$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 的Lozinskiĭ测度, 其中

$$\mu(\mathbf{B}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + h\mathbf{B}\| - 1}{h}.$$

如果 Γ 是单连通的, 条件 $q < 0$ 则方程组(6)不存在任何闭轨, 包括周期轨道、同宿轨道和异宿轨道.

注3 记 $J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ 是Jacobi矩阵, 则当 $n = 3$ 时, $J = (a_{ij})$ 的第二加性复合矩阵 $J^{[2]}$ 满足

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}.$$

引理2^[18] 若 Γ 是单连通区域, 且满足条件(H₁)和(H₂), 则当 $q < 0$ 时, 方程组(6)在 Γ 唯一的平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ 在 Γ 内是全局渐近稳定的.

接下来, 利用引理1和引理2来证明模型(5)的地方病平衡点是全局渐近稳定的.

显然, 模型(5)的最大正向不变集为 $\Sigma = \left\{ (S, E, I_1 \in \mathbf{R}_+^3) \mid S + E + I_1 \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$, 且模型(5)的无病平衡点为 $T^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$. 通过定理1, 同理知当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(5)存在唯一的地方病平衡点 $T^* = (S^*, E^*, I_1^*)$. 由定理2和定理3, 可知当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时模型(5)的无病平衡点 T^0 全局渐近稳定, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时 T^0 不稳定.

定理4 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(5)的地方病平衡点 T^* 在最大不变集 Σ 上是全局渐近稳定的.

证 根据文献[19]性质3.3.1可知模型(5)的一致持续性等价于 T^0 的不稳定性, 从而当 $\mathcal{R}_0 >$

1时, 模型(5)是一致持续的. 结合 Γ 的有界性, 模型(5)存在一个紧的吸引集 $K \subset \Gamma$. 因此 (H_1) 和 (H_2) 成立, 由引理2, 现只需证明 $q < 0$.

模型(5)的Jacobi矩阵

$$J = \begin{pmatrix} -a - \mu & b & c \\ a & -b - \omega_1 & -c \\ 0 & \gamma_1 & -\omega_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} a &= [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E, \\ b &= \beta_4 f'(E) SE - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S, \\ c &= \beta_2 f'(I_1) SI_1 - [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S. \end{aligned}$$

J 的第二加性复合矩阵为

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} Q_1 & -\beta_2 f'(I_1) SI_1 + [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S & -\beta_2 f'(I_1) SI_1 + [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S \\ \gamma_1 & Q_2 & \beta_4 f'(E) SE - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S \\ 0 & [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E & Q_3 \end{pmatrix}.$$

其中

$$\begin{aligned} Q_1 &= -[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E - \beta_4 f'(E) SE + \\ &\quad [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S - \gamma_1 - \gamma_2 - 2\mu, \\ Q_2 &= -[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E - \rho - \tau_1 - 2\mu, \\ Q_3 &= -\beta_4 f'(E) SE + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S - \gamma_1 - \gamma_2 - \rho - \tau_1 - 2\mu. \end{aligned}$$

取 $P(x) = P(S, E, I_1) = \text{diag}(1, \frac{E}{I_1}, \frac{E}{I_1})$, 显然 $P(x)$ 可逆, 那么

$$P_f P^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1}, \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1}\right).$$

记矩阵 $B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$, 可将矩阵 B 写成分块矩阵 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中

$$\begin{aligned} B_{11} &= -[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E - \beta_4 f'(E) SE + \\ &\quad [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S - \gamma_1 - \gamma_2 - 2\mu, \\ B_{12} &= \left(\frac{I_1}{E} \{-\beta_2 f'(I_1) SI_1 + [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S\}, \frac{I_1}{E} \{-\beta_2 f'(I_1) SI_1 + [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] S\} \right), \\ B_{21} &= \left(\gamma_1 \frac{E}{I_1}, 0 \right)^T, \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} Q_2 + \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} & \beta_4 f'(E) SE - [\beta_3 - \beta_4 f(E)] S \\ [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)] E & Q_3 + \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令 (u, v, w) 代表 $\mathbf{R}^3$ 中的向量, 由于在有限维线性空间上任意两个向量范数都是等价的, 故根据文献[20]定理2.10中列和范数的定义, 将其范数 $\|\cdot\|$ 定义为 $\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v|, |w|\}$. 相应于范数 $\|\cdot\|$ 的Lozinskiĭ测度是 $\mu(B)$, 且由文献[18], $\mu(B) < \sup\{g_1, g_2\}$, 其中 $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$, $g_2 = \mu_1(B_{22}) + |B_{21}|$. $|B_{12}|$ 和 $|B_{21}|$ 是对应于 l_1 的向量范数的矩阵范数, 即

$$|\mathbf{B}_{12}| = \max_j \sum_{i=1} |\mathbf{b}_{ij}|, \quad j = 1, 2, \quad |\mathbf{B}_{21}| = \max_i \sum_{j=1} |\mathbf{b}_{ij}|, \quad i = 1, 2,$$

μ_1 是对应于 $\mathbf{l}_1$ 范数的Lozinskiĭ测度, 因此

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{B}_{11}) = & -[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]I_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)]E - \beta_4 f'(E)SE + \\ & [\beta_3 - \beta_4 f(E)]S - \gamma_1 - \gamma_2 - 2\mu, \end{aligned}$$

$$|\mathbf{B}_{12}| = \frac{I_1}{E} \{[\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]S - \beta_2 f'(I_1)SI_1\},$$

$$|\mathbf{B}_{21}| = \gamma_1 \frac{E}{I_1}.$$

将矩阵 $\mathbf{B}_{22}$ 的每一列非对角线元素的绝对值加到对角线上得到矩阵 $\bar{\mathbf{B}}_{22}$

$$\bar{\mathbf{B}}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} - \rho - \tau_1 - 2\mu & \beta_4 f'(E)SE - [\beta_3 - \beta_4 f(E)]S \\ [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]I_1 + [\beta_3 - \beta_4 f(E)]E & \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} - \gamma_1 - \gamma_2 - \rho - \tau_1 - 2\mu \end{pmatrix}.$$

$\mu_1(\mathbf{B}_{22})$ 为矩阵 $\bar{\mathbf{B}}_{22}$ 对角线上元素的最大值, 从而

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{B}_{22}) = & \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} - \rho - \tau_1 - 2\mu + \max\{0, -\gamma_1 - \gamma_2\} = \\ & \frac{E'}{E} - \frac{I_1'}{I_1} - \rho - \tau_1 - 2\mu. \end{aligned}$$

由模型(5)第2和第3个式子得

$$\begin{aligned} \frac{E'}{E} = & [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)] \frac{SI_1}{E} + [\beta_3 - \beta_4 f(E)]S - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu, \\ \frac{I_1'}{I_1} = & \gamma_1 \frac{E}{I_1} - \rho - \tau_1 - \mu. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} g_1 = & \frac{E'}{E} - [\beta_1 - \beta_2 f(I_1)]I_1 - [\beta_3 - \beta_4 f(E)]E - \\ & \beta_4 f'(E)SE - \beta_2 f'(I_1)SI_1 \frac{I_1}{E} - \mu, \\ g_2 = & \frac{E'}{E} - \mu. \end{aligned}$$

由于 $f'(I_1) \geq 0, f'(E) \geq 0$, 得 $\mu(\mathbf{B}) < \sup\{g_1, g_2\} = \frac{E'}{E} - \mu$, 故

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\mathbf{B}) dv = & \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \mu(\mathbf{B}) dv + \frac{1}{t} \int_{t_1}^t \mu(\mathbf{B}) dv \leq \\ & \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \mu(\mathbf{B}) dv + \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(t_1)} - \frac{t - t_1}{t} \mu, \end{aligned}$$

即

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \sup_{x \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\mathbf{B}) dv \leq -\mu \leq -\frac{\mu}{2} < 0.$$

因此当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(5)满足引理2所有的条件, 模型(5)的地方病平衡点 T^* 全局渐近稳定.

定理5 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)的地方病平衡点 P^* 在 X 内全局吸引.

证 由定理4知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(S, E, I_1) \rightarrow (S^*, E^*, I_1^*)$, 从而得到极限系统

$$\begin{cases} \frac{dI_2}{dt} = \gamma_2 E^* + \rho I_1^* - \tau_2 I_2 - \mu I_2, \\ \frac{dA}{dt} = \tau_1 I_1^* + \tau_2 I_2 - \mu A - dA. \end{cases}$$

根据极限系统可以解得

$$I_2 = e^{-(\tau_2 + \mu)t} \left\{ (\gamma_2 E^* + \rho I_1^*) \int_0^t e^{(\tau_2 + \mu)s} ds + I_2(0) \right\},$$

$$A = e^{-(\mu + d)t} \left\{ (\tau_1 I_1^* + \tau_2 I_2) \int_0^t e^{(\mu + d)s} ds + A(0) \right\}.$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I_2 \rightarrow I_2^*, A \rightarrow A^*$.

故当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型(1)的地方病平衡点 P^* 全局吸引.

§6 数值模拟

根据模型(1)的特点, 以河南省艾滋病的病例数据为例进行研究.

6.1 数据

尽管目前医学研究人员能够研制出抑制HIV病毒活性、缓解疾病发展的药物, 但没有任何药物能够根治艾滋病, 因此HIV/AIDS成为了全世界疾病监测的重要指标之一. 本节基于公共卫生科学数据中心的现有数据^[21], 搜集了河南省2005-2019年的艾滋病发病人数(见表1)并绘制了艾滋病累计病例数直方图(见图1).

表1 河南省2005-2019年新发艾滋病人数

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
人数	2 306	2 142	2 293	1 784	1 851	1 498	1 752	3 193
年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	
人数	2 852	2 868	3 077	3 007	2 997	2 898	3 298	

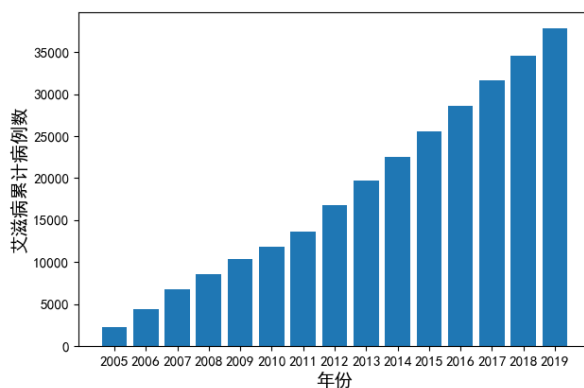


图1 河南省2005-2019年艾滋病累计患病病例数

6.2 参数估计

国家统计局发布的河南省2005年年初的人口约为97 170 000人, 出生率为0.011 67, 自然死亡率为0.006 47, 故假设 $S(0) = 97\ 170\ 000$, $A = 97\ 170\ 000 \times 0.011\ 67 \approx 1\ 133\ 974$, $\mu = 0.006\ 47$.

取饱和函数 $f(I_1) = \frac{I_1}{k + I_1}$ 和 $f(E) = \frac{E}{k + E}$, 其中 k 表示人们在信息影响下对艾滋病的认识产生的偏差程度. 采用非线性最小二乘法(LSM)估计其余重要参数, 参数具体估计策略见图2, 并对河南省2005-2019年艾滋病累计患病病例数(图1)进行数值拟合(图3), 其余参数值见表2.

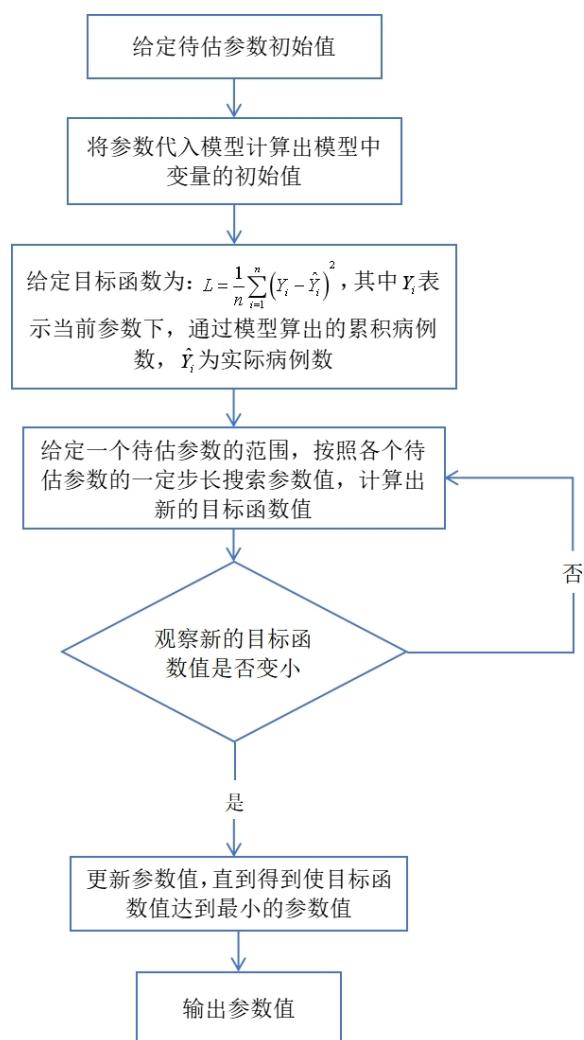


图2 参数估计策略流程图

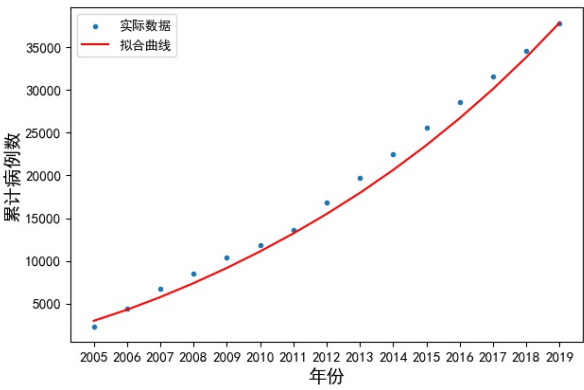


图3 累计艾滋病病例数与模型的拟合数据对比

表2 模型(1)的参数值

参数	含义	参数值	来源
Λ	人口常数输入	1 133 974	[22]
μ	自然死亡率	0.006 47	[22]
d	因病死亡率	0.006 227	估计
β_1	无意识感染者传染率	6.2406×10^{-7}	估计
β_2	信息对无意识感染者传播疾病最大削弱率	4.325×10^{-7}	估计
(1) β_3	潜伏者传染率	7.912×10^{-6}	估计
β_4	信息对潜伏者传播疾病的最大削弱率	8.525×10^{-7}	估计
γ_1	潜伏者转为无意识感染者的比率	0.010 16	估计
γ_2	潜伏者转为有意识感染者的比率	0.031 24	估计
ρ	无意识的感染者转为有意识感染者的比率	0.451 1	估计
τ_1	无意识感染者转为艾滋病人的比率	0.075	估计
τ_2	有意识感染者转为艾滋病人的比率	0.0513 3	估计
k	信息影响下人们对艾滋病认识的偏差率	0.215 4	估计

6.3 参数的敏感性分析

通过理论分析, 艾滋病是否流行取决于基本再生数这个重要的阈值, 而模型(1)的阈值为

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\beta_3(\rho + \tau_1 + \mu) + \beta_1\gamma_1}{(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu)(\rho + \tau_1 + \mu)}.$$

下面使用偏秩相关系数(PRCC)方法来分析模型(1)中的主要参数对于基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 的影响, 当PRCC值显示为正值时, 表示该参数与 $\mathcal{R}_0$ 成正相关, 即参数值越大将导致 $\mathcal{R}_0$ 值越大, 而PRCC值显示为负值时, 表示该参数与 $\mathcal{R}_0$ 成负相关, 即参数值越大将导致 $\mathcal{R}_0$ 值越小. 本文选取6个参数 β_1 、 β_3 、 γ_1 、 γ_2 、 ρ 和 τ_1 进行敏感性分析, 分析结果见图4.

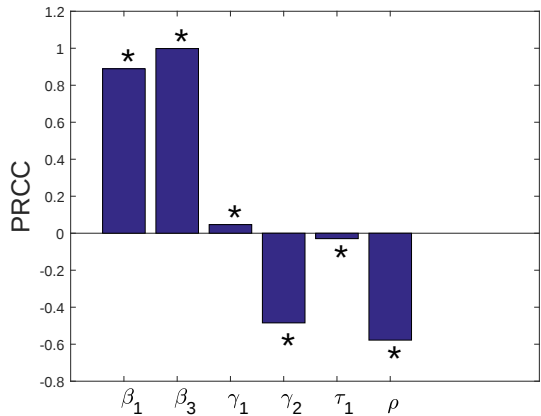


图4 部分相关系数对基本再生数的影响

该结果表明, β_1 、 β_3 和 γ_1 对 $\mathcal{R}_0$ 有正影响, γ_2 、 τ_1 和 ρ 对 $\mathcal{R}_0$ 有负影响. 通过PRCC的结果对抑制疾病传播也得到了启发, 例如: 可以通过减少易感者与艾滋病患者的有效接触率 β_1 、 β_3 来减少 $\mathcal{R}_0$, 以及加强艾滋病相关信息的宣传, 扩大艾滋病毒自我检测试剂的使用等方法都可以增加无意识的感染者转为有意识的感染者的比率 ρ , 从而直接减小 $\mathcal{R}_0$, 抑制艾滋病的传播.

由于艾滋病仍是重大的公共卫生问题, 全球任何国家的人都有可能被感染, 且艾滋病无法被根治, 而预防艾滋病的最佳方式是通过信息和教育来让人们更加了解艾滋病. 因此下面分析参数 β_2 和 k 对艾滋病患者的影响(图5和图6).

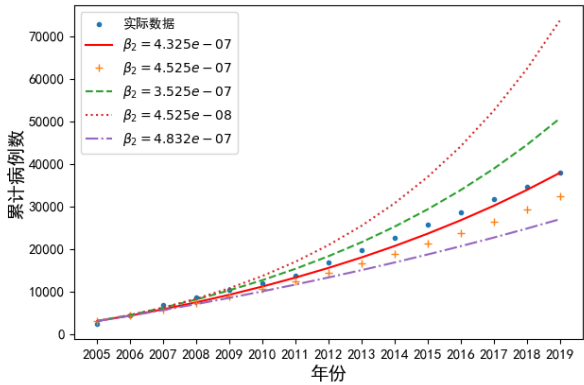
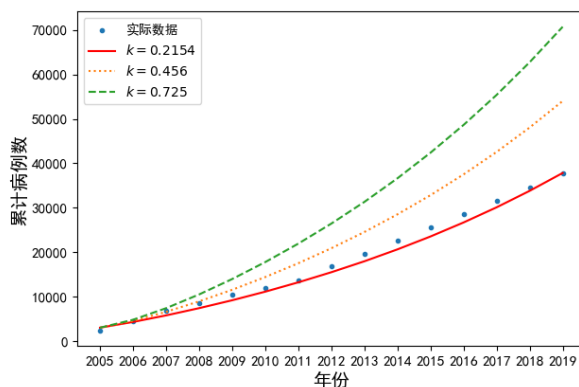


图5 β_2 的敏感性分析

图6 k 的敏感性分析

从图5可以看出: 信息对无意识感染者传播疾病的最大削弱率 β_2 越大时, 累计病例数越少, 而减小 β_2 时艾滋病患者的病例数会显著增加. 如今, 对艾滋病感染者的歧视问题仍是我国在艾滋病防控工作中一个重点关注的问题, 该问题导致多数艾滋病感染者为保护自己, 选择不向他人说明自己的情况, 从而增加了传染率, 而产生该问题的根本原因是: 人们对于艾滋病的认识不足, 所以应加大公众对艾滋病的了解, 消除对艾滋病感染者的歧视和偏见. 从图6可以看出: 信息影响下人们对艾滋病认识的偏差率 k 越大时, 累计病例数也随之增多. 即说明在信息宣传覆盖面不广情况下, 感染者会越来越多. 因此应通过各种渠道向公众宣传艾滋病的知识, 提高人们对艾滋病的认识, 防止艾滋病大面积传播.

§7 结论

本文建立了具有信息影响的 SEI_1I_2A 模型, 首先求解出模型的基本再生数, 通过理论分析证明了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和稳定性. 接着选取河南省2005-2019年艾滋病的病例数据与模型进行数值拟合. 最后, 对阈值 $\mathcal{R}_0$ 的部分参数采取PRCC的方法进行分析, 得到传染率和无意识感染者转为有意识感染者的比率都对 $\mathcal{R}_0$ 有显著的影响, 并基于参数 β_2 和 k 的敏感性分析得到一些行之有效的控制措施. 例如, 加大对艾滋病的重视程度, 扩大艾滋病毒自我检测服务的覆盖面, 做到早检测早发现早治疗, 才可以更好的降低感染者的传染率. 同时通过信息与媒体, 加强艾滋病宣传教育工作, 帮助公众更好的了解预防艾滋病的方法, 正确看待艾滋病. 此外, 应减少对艾滋病患者的歧视, 向患者提供全面的医疗和心理支持, 促进公众对艾滋病的理解, 减少传播风险. 本文的研究结果表明, 以上控制措施都可以从根源上减少艾滋病的传染率, 降低疫情风险.

但实际上, 本文只考虑了信息传播对于疾病有抑制作用, 而现实中有可能出现一些负面信息或者谣言, 从而影响艾滋病感染的动力学传播过程, 因此考虑负面信息对于艾滋病的影响是非常有必要的. 其次, 在信息的传播过程中由于信息具有滞后性, 因此在模型中考虑时滞因素更贴合实际. 这些问题都是在未来研究中需要努力解决的.

参考文献:

- [1] Dou Zhihui, Luo Yanan, Zhao Yan, et al. Trends in mortality and prevalence of reported HIV/AIDS cases-China, 2002-2021[J]. China CDC Weekly, 2023, 5(42): 943-947.
- [2] 原珊珊, 张国洪. 考虑信息变量Logistic自然增长的SIR传染病模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2020, 34(4): 230-234+250.
- [3] Huo Haifeng, Yang Peng, Xiang Hong. Stability and bifurcation for an SEIS epidemic model with the impact of media[J]. Physica, A, Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 490: 702-720.
- [4] Al Basir F, Santanu R, Ezio V. Role of media coverage and delay in controlling infectious diseases: a mathematical model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 337(15): 372-385.
- [5] Pawelek K A, Oeldorf-Hirsch A, Rong L. Modeling the impact of twitter on influenza epidemics[J]. Mathematical Biosciences Engineering, 2014, 11(6): 1337-1356.
- [6] 张靖文, 王浩华. 基于信息干预下HBV传染病模型稳定性分析与最优控制[J]. 海南大学学报(自然科学版), 2022, 40(1): 39-49.
- [7] 张杰豪, 陈永雪, 申佳瑜, 等. 信息效应下SEIR传染病模型的动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(11): 316-323.
- [8] 冉艳, 杜丹丹. 大学生艾滋病健康信息素养的现状调查及影响因素分析[J]. 中国艾滋病性病, 2019, 25(1): 70-73.
- [9] 吴鹏, 何泽荣. 具有非局部感染和周期治疗的HIV感染模型的时空动力学分析[J]. 数学物理学报, 2024, 44(1): 209-226.
- [10] 邢青红, 李灿, 马慧莲, 等. 一类具有时滞的HIV感染模型的动力学性态[J]. 工程数学学报, 2022, 39(5): 750-762.
- [11] Athithan S, Ghosh M. Analysis of a sex-structured HIV/AIDS model with the effect of screening of infectives[J]. International Journal of Biomathematics, 2014, 7(5): 1450054.
- [12] Huo Haifeng, Chen Rui, Wang Xunyang. Modelling and stability of HIV/AIDS epidemic model with treatment[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(13-14): 6550-6559.
- [13] 邓萌, 徐瑞. 一类具有CTL免疫反应和免疫损害的HIV感染动力学模型的稳定性分析[J]. 数学物理学报, 2022, 42(5): 1592-1600.
- [14] 王非, 杨亚莉, 金英姬, 等. 具有两个感染阶段和治疗及非线性发生率的HIV/AIDS模型的研究[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(10): 67-73.
- [15] Wu Peng, Zhao Hongyong. Dynamical analysis of a nonlocal delayed and diffusive HIV latent infection model with spatial heterogeneity[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(10): 5552-5587.
- [16] Wang Wei, Wang Xiunan, Feng Zhaosheng. Time periodic reaction-diffusion equations for modeling 2-LTR dynamics in HIV-infected patients[J]. Nonlinear Analysis-real World Application, 2021, 57: 103184.
- [17] Driessche P V D, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Math Biosci, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [18] Li Michael Y, Muldowney J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1996, 27(4): 1070-1083.
- [19] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004, 150-153+161-162.
- [20] 徐仲, 张凯院, 等. 矩阵论简明教程(第三版)[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

- [21] 公共卫生科学数据中心. 2005-2019年河南省艾滋病确诊病例数[OL].
[https:// www.phsciencedata.cn](https://www.phsciencedata.cn)
- [22] 国家统计局. 2005年初河南省人口数据[OL].
<https://www.stats.gov.cn/sj/ndsj/2005/indexch.htm>

An HIV/AIDS model with nonlinear infection rates under information interventions

XU Zhi-hang, ZHANG Tai-lei, HOU Yue, QIAO Xia
(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: According to the transmission mechanism of HIV/AIDS, an SEI_1I_2A infectious disease model with nonlinear infection rate influenced by information is established. Firstly, the basic reproductive number $\mathcal{R}_0$ and two kinds of equilibrium points of the model, disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point, are given. By constructing Lyapunov function and LaSalle invariant set principle, it is proved that the disease-free equilibrium is globally stable when $\mathcal{R}_0 < 1$. Using the method of the second additive composite matrix, the global stability of the equilibrium point of endemic diseases is proved when $\mathcal{R}_0 > 1$. Secondly, the data of newly annual HIV/AIDS cases in Henan Province from 2005 to 2019 are selected for numerical simulations. Finally, the sensitivity analysis of some parameters shows that the effective contact rate between susceptible people and unconscious infected people and latent people has a great influence on the basic reproductive number. Expanding the coverage of HIV/AIDS information propaganda and raising public awareness of HIV/AIDS testing can effectively reduce the infection rate of HIV/AIDS patients and control the spread of HIV/AIDS.

Keywords: information influence; HIV/AIDS model; global stability; the second additive composite matrix

MR Subject Classification: 34D23; 92B05