

非齐次树指标 m 重Markov链转移矩阵 的一个强极限定理

金少华, 李慧云, 杨会明

(河北工业大学 理学院, 天津 300401)

摘要: 近年来树图或者树形网络等诸多复杂系统的结构性质与极限性质逐渐成为研究的热点问题, 特别是在树指标Markov链领域的研究中, 国内外学者们取得了丰富的研究成果. 其极限性质被国内外学者广泛研讨并应用于生物动力学、信息论等诸多领域. 该文研究了非齐次树上 m 重Markov链转移矩阵关于广义赌博系统的一个强极限定理. 首先给出了非齐次树上 m 重Markov链的定义和样本散度的概念, 然后利用构造非负鞅的方法, 给出了非齐次树上 m 重Markov链转移矩阵关于广义赌博系统的一个强极限定理.

关键词: 强极限定理; 鞅; 非齐次树; Markov链; 样本散度

中图分类号: O211.6

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0171-07

§1 引言

树指标随机过程已成为近年来发展起来的概率论的研究方向之一. 强极限定理一直是国际概率论界研究的中心课题之一. Hung^[1]将树指标非齐次Markov链的强大数定律和部分和的熵遍历定理推广到齐次树指标非齐次Markov链的广义熵遍历定理. Jing等人^[2]研究了双无限随机环境下Markov链的一类强极限定理. 作为推论得到了非齐次Markov链的一个强大数定律. 最后, 得到了双无限随机环境中Markov链的随机转移概率调和平均的强极限定理. 金少华等人^[3]通过引入相对熵密度偏差的概念和构造非负鞅, 给出了非齐次树指标 m 重马氏信源的一个强极限定理. Wang等人^[4]给出了非零平稳过程的Markov逼近和广义熵遍历定理. 杨洁等人^[5]研究了树指标非齐次Markov链的广义熵遍历定理. 首先证明了树指标非齐次Markov链上的二元函数延迟平均的强极限定理. 然后得到了树指标非齐次Markov链上状态出现延迟频率的强大数定律以及树指标非齐次Markov链的广义熵遍历定理. Ding等人^[6]证明了随机环境中具有一致有界度的无限树指标Markov链的强大数定律和Shannon-McMillan定理. Zhong等人^[7]首先引入渐近对数似然比作为二叉树上任意随机场与分叉Markov链之间偏差的度量, 然后通过构造一个非负鞅, 建

收稿日期: 2023-02-20 修回日期: 2024-08-13

基金项目: 2023年河北省研究生精品课程立项建设项目, 矩阵论(KCJJPX2023009); 国家自然科学基金(11701139)

立了二叉树指标Markov链的一类强偏差定理. Tang等人^[8]建立了两个渐近循环Markov链之间相对熵密度率的强极限定理. 本文首先构造一模 m 的非齐次树,是对现有非齐次树的推广,然后给出了该非齐树上 m 重非齐次Markov链的定义,最后通过引入样本散度的概念和构造非负鞅,利用Doob鞅收敛定理给出了该非齐树上 m 重非齐次Markov链转移矩阵关于广义赌博系统的一个强极限定理及其推论,所得结论对该非齐树上任意 m 重非齐次Markov链普遍成立.

§2 基本概念

设 $\{N_n, n \geq 1\}$ 是一列正整数集, T 是一个具有根顶点 o 的无限树, 如果 T 的第 n ($n \geq 0$)层上的每个顶点均与第 $n+1$ 层上的 N_{n+1} 个顶点相邻, 则称 T 为广义Bethe树或广义Cayley树. 特别地, 若对非负整数集 N , 用模 m 的同余关系对其分类得到如下模 m 的剩余类

$$\begin{aligned}(0) &= \{0, m, 2m, 3m, \dots, nm, \dots\}, \\(1) &= \{1, m+1, 2m+1, \dots, nm+1, \dots\}, \\&\dots\dots\dots, \\(m-1) &= \{m-1, 2m-1, \dots, (n+1)m-1, \dots\}.\end{aligned}$$

当 $n \in (i)$ 时, 令 $N_{n+1} = \alpha_i$ (α_i 均为正整数且不同时为1), $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, 就得到了一类特殊的非齐次树 $T_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}}$. 以下恒以 T 表示树 $T_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}}$, 以 S^t 表示顶点 t 的所有子代的子图, L_n 表示第 n ($n \geq 0$)层上所有顶点的子图, T_n 表示含有从顶点 o 到第 n 层上所有顶点的子图.

定义2.1 设有限状态空间 $S = \{1, 2, \dots, N\}$, $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 为定义在概率空间 $\{\Omega, F, P\}$ 上取值于 S 的随机变量族, 其联合分布为

$$P(X^{T_n} = x^{T_n}) = p(x^{T_n}). \quad (1)$$

如果存在 $S^{T_{m-1}}$ 上的分布

$$P_0 = \{p_0(x^{T_{m-1}})\}, x^{T_{m-1}} \in S^{T_{m-1}} \quad (2)$$

和定义在 S^{m+1} 上的随机矩阵列

$$P_n = (p_n(y|x_1, x_2, \dots, x_m)), \forall x_i, y \in S, i = 1, \dots, m, n \geq m \quad (3)$$

使得对 $\forall \tau, \mu \in T, \tau \in L_n$, 有

$$\begin{aligned}P_n(X_\tau = y | X_{\tau^1} = x_1, X_{\tau^2} = x_2, \dots, X_{\tau^m} = x_m \text{ 且 } X_\mu; \text{ 满足 } \tau \wedge \mu \leq \tau^m) = \\P_n(X_\tau = y | X_{\tau^1} = x_1, X_{\tau^2} = x_2, \dots, X_{\tau^m} = x_m) = \\p_n(y|x_1, x_2, \dots, x_m), \forall x_i, y \in S, i = 1, \dots, m.\end{aligned} \quad (4)$$

且

$$P_0(X^{T_{m-1}} = x^{T_{m-1}}) = p_0(x^{T_{m-1}}), \forall x^{T_{m-1}} \in S^{T_{m-1}}, \quad (5)$$

则称

$$\{X_\tau, \tau \in T\}$$

为具有初始分布(2)与随机矩阵列(3)的在 S 上取值的树 T 上的 m 重非齐次Markov链.

在上述定义下, 则树 T 上的非齐次 m 重Markov链的联合分布为

$$\begin{aligned}P(X^{T_n} = x^{T_n}) = P(x^{T_n}) = \\p_0(x^{T_{m-1}}) \prod_{k=m}^n \prod_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \dots \prod_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} p_k(x_{\xi_k} | x_{\xi_{k-m}}, \dots, x_{\xi_{k-1}}).\end{aligned} \quad (6)$$

设 Q 是 $\{\Omega, F\}$ 上的另一概率测度, $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 在概率测度 Q 下的联合分布为

$$Q(X^{T_n} = x^{T_n}) = Q(x^{T_n}) = q_0(x^{T_{m-1}}) \prod_{k=m}^n \prod_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \dots \prod_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} q_k(x_{\xi_k} | x_{\xi_{k-m}}, \dots, x_{\xi_{k-1}}). \quad (7)$$

定义2.2 设 $P(X^{T_n})$ 和 $Q(X^{T_n})$ 分别是由(6)和(7)给出, 令

$$h(P|Q) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \ln \frac{P(X^{T_n})}{Q(X^{T_n})}, \quad (8)$$

则称 $h(P|Q)$ 为概率测度 P 相对于概率测度 Q 的样本散度.

定义2.3 对于一组定义在 S^{n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots$)上而且取值于 $[0, b]$ ($b > 0$)的实值函数列 $\{f_n(X_{\xi_0}, X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})\}$, 令 $Z_0 = y$, (y 为任意实数), $Z_{n+1} = f_n(X_{\xi_0}, X_{\xi_1}, \dots, X_{\xi_n})$, $n \geq 0$, 则称 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为广义赌博系统.

§3 强极限定理

引理3.1 设 $P(X^{T_n})$ 和 $Q(X^{T_n})$ 分别是由(6)和(7)给出, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \ln \frac{Q(X^{T_n})}{P(X^{T_n})} \leq 0, P - \text{a.s.} \quad (9)$$

由(9)易见

$$h(P|Q) \geq 0, P - \text{a.s.} \quad (10)$$

引理3.2 设 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 为具有初始分布(2)与随机矩阵列(3)的在 S 上取值的树 T 上的 m 重非齐次Markov链. $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为如前定义的广义赌博系统, λ 为任意常数, 令

$$t_n(\lambda, \omega) = \frac{q_0(X^{T_{m-1}}) \prod_{k=m}^n \prod_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \dots \prod_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \frac{q_k(X_{\xi_k} | X_{\xi_{k-m}}, \dots, X_{\xi_{k-1}}) \cdot \exp(\lambda Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_k^2 X_{\xi_k}^2)}{\mathbb{E}[\exp(\lambda Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_k^2 X_{\xi_k}^2) | X_{\xi_{k-m}}, \dots, X_{\xi_{k-1}}]}}{P(X^{T_n})}, \quad (11)$$

则 $\{t_n(\lambda, \omega), \sigma(X^{T_n}), n \geq m\}$ 在概率测度 P 下是一非负鞅.

证 由(6), 有

$$P(X^{L_n} = x^{L_n} | X^{T_{n-1}} = x^{T_{n-1}}) = \frac{p(x^{T_n})}{p(x^{T_{n-1}})}, \quad (12)$$

而由(11)-(12)有

$$t_{n-1}(\lambda, \omega) = \frac{t_n(\lambda, \omega)}{\frac{\prod_{\xi_{n-m} \in L_{n-m}} \dots \prod_{\xi_n \in s(\xi_{n-1})} \frac{q_n(X_{\xi_n} | X_{\xi_{n-m}}, \dots, X_{\xi_{n-1}}) \cdot \exp(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2)}{\mathbb{E}[\exp(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2) | X_{\xi_{n-m}}, \dots, X_{\xi_{n-1}}]}}{P(X^{T_n})/P(X^{T_{n-1}})}}, \quad (13)$$

由(13)和条件概率的性质有

$$\mathbb{E} \left[\frac{\prod_{\xi_{n-m} \in L_{n-m}} \dots \prod_{\xi_n \in s(\xi_{n-1})} \frac{q_n(X_{\xi_n} | X_{\xi_{n-m}}, \dots, X_{\xi_{n-1}}) \cdot \exp(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2)}{\mathbb{E}[\exp(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2) | X_{\xi_{n-m}}, \dots, X_{\xi_{n-1}}]}}{P(X^{T_n})/P(X^{T_{n-1}})} \middle| \sigma(X^{T_{n-1}}) \right] =$$

$$\sum_{x_{\xi_n} \in S} \prod_{\xi_{n-m} \in L_{n-m}} \dots \prod_{\xi_n \in s(\xi_{n-1})} \frac{q_n(x_{\xi_n} | x_{\xi_{n-m}}, \dots, x_{\xi_{n-1}}) \cdot \exp(\lambda Z_n x_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 x_{\xi_n}^2)}{\mathbb{E}[\exp(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2) | X_{\xi_{n-m}}, \dots, X_{\xi_{n-1}}]} =$$

$$\prod_{\xi_{n-m} \in L_{n-m}} \cdots \prod_{\xi_n \in s(\xi_{n-1})} \frac{\sum_{x_{\xi_n} \in S} q_n(x_{\xi_n} | x_{\xi_{n-m}}, \cdots, x_{\xi_{n-1}}) \cdot \exp\left(\lambda Z_n x_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 x_{\xi_n}^2\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2\right) | X_{\xi_{n-m}}, \cdots, X_{\xi_{n-1}}\right]} =$$

$$\prod_{\xi_{n-m} \in L_{n-m}} \cdots \prod_{\xi_n \in s(\xi_{n-1})} \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2\right) | X_{\xi_{n-m}}, \cdots, X_{\xi_{n-1}}\right]}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda Z_n X_{\xi_n} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_n^2 X_{\xi_n}^2\right) | X_{\xi_{n-m}}, \cdots, X_{\xi_{n-1}}\right]} = 1. \quad (14)$$

由(13)-(14)有

$$\mathbb{E}[t_n(\lambda, \omega) | \sigma(X^{T_{n-1}})] = t_{n-1}(\lambda, \omega).$$

故 $\{t_n(\lambda, \omega), \sigma(X^{T_n}), n \geq m\}$ 在概率测度 P 下是一非负鞅.

定理3.1 设 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 为具有初始分布(2)与随机矩阵列(3)的在 S 上取值的树 T 上的 m 重非齐次Markov链. $\{Z_n, n \geq 0\}$ 和 $h(P|Q)$ 均如前定义, λ 为任意常数, 且对 $\forall n > m$, 有

$$\mathbb{E}(X_{\xi_n} | X_{\xi_{n-m}}, \cdots, X_{\xi_{n-1}}) = 0.$$

令

$$D = \{\omega : h(P|Q) < +\infty\}. \quad (15)$$

设

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \text{Var}(X_{\xi_k} | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}}) = c < +\infty, \quad \text{a.s.} \quad (16)$$

若 $c > 0$, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left[Z_k X_{\xi_k} - \sqrt{\frac{h(P|Q)}{2b^2c}} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right] \leq$$

$$b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)}, \quad \text{a.e. } \omega \in D. \quad (17)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left[Z_k X_{\xi_k} + \sqrt{\frac{h(P|Q)}{2b^2c}} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right] \geq$$

$$-b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)}, \quad \text{a.e. } \omega \in D. \quad (18)$$

若 $c = 0$, 则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq h(P|Q), \quad \text{a.e. } \omega \in D. \quad (19)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} + \frac{1}{2} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \geq -h(P|Q), \quad \text{a.e. } \omega \in D. \quad (20)$$

证 根据引理3.2及Doob鞅收敛定理知, 存在 $A(\lambda) \in F, P(A(\lambda)) = 1$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\lambda, \omega) = t_\infty(\lambda, \omega) < +\infty, \omega \in A(\lambda).$$

从而

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \ln t_n(\lambda, \omega) \leq 0, \omega \in A(\lambda). \quad (21)$$

由(8), (11)和(21)及上极限的性质有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq h(P|Q) +$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \ln E[\exp(\lambda Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_k^2 X_{\xi_k}^2) | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}}],$$

$$\omega \in D \cap A(\lambda). \quad (22)$$

由不等式 $\exp(x - \frac{1}{2}x^2) - 1 - x \leq \frac{1}{2}x^2$ ($x \in \mathbf{R}$), 并注意到 $E(X_{\xi_n} | X_{\xi_{n-m}}, \cdots, X_{\xi_{n-1}}) = 0$, 由(16)和(22)有

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq h(P|Q) + \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} E \left\{ \exp \left(\lambda Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda^2 Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) - 1 - \lambda Z_k X_{\xi_k} \right\} \\ & \quad | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}} \} \leq \\ & h(P|Q) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} E \left[\frac{1}{2} (\lambda Z_k X_{\xi_k})^2 | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}} \right] \leq \\ & h(P|Q) + \frac{\lambda^2 b^2}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} E \left[(X_{\xi_k})^2 | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}} \right] = \\ & h(P|Q) + \frac{\lambda^2 b^2}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \text{Var}(X_{\xi_k} | X_{\xi_{k-m}}, \cdots, X_{\xi_{k-1}}) = \\ & h(P|Q) + \frac{1}{2} \lambda^2 b^2 c, \quad \omega \in D \cap A(\lambda). \end{aligned} \quad (23)$$

若 $\lambda > 0$, 将(23)两端同除以 λ 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq \\ & \frac{h(P|Q)}{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda b^2 c, \quad \omega \in D \cap A(\lambda). \end{aligned} \quad (24)$$

当 $c > 0$ 时, 因函数

$$g(\lambda) = \frac{h(P|Q)}{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda b^2 c$$

在

$$\lambda = \sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}$$

处取得最小值

$$g\left(\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right) = b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)},$$

故在(24)中令 $\lambda = \sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}$, 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \sqrt{\frac{h(P|Q)}{2b^2 c}} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq \\ & b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)}, \quad \omega \in D \cap A\left(\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

又由于 $P\left(A\left(\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right)\right) = 1$, 则由(25)知(17)成立.

若 $c = 0$, 将 $\lambda = 1$ 代入(24) 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \leq h(P|Q), \quad \omega \in D \cap A(1). \quad (26)$$

因 $P(A(1)) = 1$, 则由(26)知(19)成立.

若 $\lambda < 0$, 将(23)两端同除以 λ 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} - \frac{1}{2} \lambda Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \geq \frac{h(P|Q)}{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda b^2 c, \quad \omega \in D \cap A(\lambda). \quad (27)$$

当 $c > 0$ 时, 因函数

$$g(\lambda) = \frac{h(P|Q)}{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda b^2 c$$

在

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}$$

处取得最大值

$$g\left(-\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right) = -b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)},$$

故在(27)中令 $\lambda = -\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} + \sqrt{\frac{h(P|Q)}{2b^2 c}} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \geq -b\sqrt{2c \cdot h(P|Q)} \quad \omega \in D \cap A\left(-\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right). \quad (28)$$

又由于 $P\left(A\left(-\sqrt{\frac{2h(P|Q)}{b^2 c}}\right)\right) = 1$, 则由(28)知(18)成立.

若 $c = 0$, 将 $\lambda = -1$ 代入(27)有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{k=m}^n \sum_{\xi_{k-m} \in L_{k-m}} \cdots \sum_{\xi_k \in s(\xi_{k-1})} \left(Z_k X_{\xi_k} + \frac{1}{2} Z_k^2 X_{\xi_k}^2 \right) \geq -h(P|Q), \quad \omega \in D \cap A(-1). \quad (29)$$

从而定理3.1成立.

本文首先构造了一非齐次树, 然后通过引入广义赌博系统的概念和构造非负鞅, 利用Doob鞅收敛定理给出了该非齐次树上 m 重非齐次Markov链转移矩阵关于广义赌博系统的一个强极限定理及其推论, 所得结论对该非齐次树上任意 m 重非齐次Markov链普遍成立.

参考文献:

- [1] Hung H L. The generalized entropy ergodic theorem for nonhomogeneous Markov chains indexed by a homogeneous tree[J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2020, 34(2): 221-234.

- [2] Jing Y, Yang W G. A class of strong limit theorems for Markov chains in bi-infinite random environment[J]. 应用概率统计, 2021, 37(2): 174-180.
- [3] 金少华, 田雪然. 关于非齐次树指标 m 重马氏信源的一个强极限定理[J]. 应用数学, 2022, 35(4): 776-782.
- [4] Wang Z Z, Yang W G. Markov approximation and the generalized entropy ergodic theorem for non-null stationary process[J]. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences, 2020, 130(12): 899-909.
- [5] 杨洁, 杨卫国. 关于树指标非齐次马氏链的广义熵遍历定理[J]. 数学年刊A辑, 2020, 41(1): 99-114.
- [6] Ding C J, Shi Z Y, Yang W G. The strong law of large numbers and Shannon-McMillan theorem for Markov chains indexed by an infinite tree with uniformly bounded degree in random environment[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2021, 50(15): 3573-3583.
- [7] Zhong P P, Shi Z Y, Yang W G, et al. A class of strong deviation theorems for the random fields associated with bifurcating Markov chains indexed by a binary tree[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2021, 50(5): 1210-1227.
- [8] Tang Y, Yang W G. The strong limit theorem for relative entropy density rates between two asymptotically circular Markov chains[J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2019, 33(2): 161-171.

A strong limit theorem of the transition matrix of m -ordered Markov chains indexed by a non-homogeneous tree

JING Shao-hua, LI Hui-yun, YANG Hui-ming

(College of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: Recently, the structural properties and limit properties of many complex systems such as tree graphs or tree networks have become hot topics in research, especially in the field of tree-index Markov chains. A large number of domestic and foreign scholars have obtained numerous significant research results. Its limit properties has been extensively studied by scholars and applied to many fields such as biodynamics and information theory. In this paper, a strong limit theorem of the transition matrix of m -ordered Markov chains on non-homogeneous trees for generalized gambling system is studied. Firstly the definition of the m -ordered Markov chains on non-homogeneous trees and the concept of sample divergence are given. Then by constructing nonnegative martingales, a strong limit theorem of the transition matrix of m -ordered Markov chains on non-homogeneous trees for generalized gambling system is established.

Keywords: strong limit theorem; martingale; non-homogeneous tree; Markov chains; sample divergence

MR Subject Classification: 60B12