

重尾门限ACD模型的LAD推断

傅可昂^{1,2,3}, 钱虹宇³, 陈颖瑜^{1,2*}

(1. 浙大城市学院 数字金融研究院, 浙江杭州 310015;

2. 浙大城市学院 统计与数据科学系, 浙江杭州 310015;

3. 浙江工商大学 统计与数学学院, 浙江杭州 310018)

摘要: 针对门限自回归条件持续期模型, 在允许误差方差无穷的条件下, 构造模型参数的最小一乘估计, 并证明了该估计的局部渐近正态性. 数值模拟说明在随机误差服从重尾分布的条件下, 最小一乘估计比拟极大似然估计更稳健, 最后将其应用于中远海能股票的价格持续期建模.

关键词: 自回归条件持续期模型; 最小一乘估计; 渐近正态性; 价格持续期

中图分类号: O212.1

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0145-14

§1 引言

假设 T_{t-1} 和 T_t 是金融市场两个连续事件发生的时间, 令 $x_t = T_t - T_{t-1}$ 为事件发生的时间间隔, 称为持续期或久期. 金融领域常用的持续期有价格持续期、交易量持续期等, 这些不规则的持续期数据往往包含了许多市场微观信息(比如交易的聚集或分散), 需要出现在描述数据的模型中, 而采用传统的等间距计量模型对其建模则会丢失很多信息. 有鉴于此, Engle和Russel^[1]提出了自回归条件持续期(ACD)模型, 并用其刻画经过“日内效应”调整的持续期数据, 从而开启了对ACD模型及其应用的研究.

简单ACD(1,1)模型可表示为

$$x_t/\varphi_t = \varepsilon_t,$$

$$\varphi_t = \omega + \alpha x_{t-1} + \beta \varphi_{t-1},$$

其中 ε_t 为独立同分布的非负误差项且满足 $E\varepsilon_t = 1$, $\varphi_t = E(x_t|\mathcal{F}_{t-1})$ 为持续期 x_t 的条件期望, $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(x_{t-1}, \dots, x_1)$ 是前 $t-1$ 次交易的信息集. 由于持续期 x_t 恒为正, 故 φ_t 也应该恒为正. 众所周知, 高频数据还存在着明显的日内效应, 即在日内表现出周期性的规律, 因此和Engle和Russel^[1]一样, 本文的 x_t 为去除日内效应后的持续期数据.

收稿日期: 2023-08-22 修回日期: 2024-04-12

*通讯作者: chenyy@hzcu.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY23A010001)

自从Engle和Russel^[1]用误差项服从指数分布和Weibull分布的简单ACD模型(此时该ACD模型被称为EACD和WACD模型)较好地捕捉到了交易间隔的变化规律,众多学者纷纷开始了对简单ACD模型的研究:如Lunde^[2], Grammig等人^[3], Bhatti^[4]和Zheng等人^[5]分别提出了误差项服从Gamma分布、Burr分布、Birnbau-Saunders分布和Fréchet分布的GACD、BACD、BS-ACD和FACD模型; Sauloa等人^[6]基于偏态BS分布提出了ACD分位数模型,并验证说明比传统BS-ACD模型具有更好的尾部拟合效果.

由于金融高频数据的非线性性质,使得上述简单ACD模型不能很好地分析股票市场,需要引入更复杂的模型. Zhang等人^[7]为解释数据中的非线性性质与结构突变,将门限的思路引入到ACD模型中,形成了门限自回归条件持续期(TACD)模型. 该思路是用分段线性化方法对非线性模型进行处理,利用部分线性化的方式展现了不同阶段的状态并反映了市场机制转换中“跳”的现象. 本文采用如下形式的TACD(1,1)模型

$$x_t/\varphi_t = \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$\varphi_t = \omega^g + \alpha^g x_{t-1} + \beta^g \varphi_{t-1}, \quad \text{如果 } z_{t-d} \in R_g, \quad (2)$$

其中 $R_g = [r_{g-1}, r_g)$, $g = 1, 2, \dots, G$, 正整数 G 为阶段数, $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_G = \infty$ 为门限值, z_{t-d} 为门限变量, 正整数 d 为延迟参数. 对于任意的 $g = 1, 2, \dots, G$, 有

$$\omega^g > 0, \quad \alpha^g \geq 0, \quad \beta^g \geq 0.$$

目前对于TACD模型的研究较少,模型涉及的参数估计方法主要以极大似然估计(MLE)或拟极大似然估计(QMLE)为主. 由(2)式可知, φ_t 与 g 和 $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^G)^T$ 有关, 其中 $\theta^g = (\omega^g, \alpha^g, \beta^g)$, $g = 1, 2, \dots, G$, 为第 g 阶段模型的参数, 故将 φ_t 记为 $\varphi_t^g(\theta)$. 当 $z_{t-d} \in R_g$ 时, $\varphi_t^g(\theta)$ 可进一步表示为

$$\varphi_t^g(\theta) = \frac{\omega^g}{1 - \beta^g} + \alpha^g x_{t-1} + \alpha^g \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^g)^m x_{t-1-m}. \quad (3)$$

当误差项服从指数分布时,模型参数的MLE可表示为

$$\hat{\theta}_{\text{mle}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{t=v+1}^n \left(\frac{x_t}{\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)} + \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right), \quad (4)$$

其中 Θ 为参数空间, $v \geq d$, n 为样本数. 若误差项不服从指数分布, (4)式所得即为模型参数的QMLE, 记作 $\hat{\theta}_{\text{qMLE}}$. 由于在实际中观测到的数据有限, 所以 $\varphi_t^g(\theta)$ 可近似地表示为

$$\tilde{\varphi}_t^g(\theta) = \frac{\omega^g}{1 - \beta^g} + \alpha^g x_{t-1} + \alpha^g \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^g)^m x_{t-1-m} I(t-1-m \geq 1).$$

从而在(4)式中用 $\tilde{\varphi}_t^g(\theta)$ 替代 $\varphi_t^g(\theta)$ 后可得实际中常用的模型参数的QMLE, 记作 $\tilde{\theta}_{\text{qMLE}}$.

众所周知, 金融市场容易受新消息的影响而产生波动, 从而导致持续期中存在较多的异常值, 使得持续期数据往往呈重尾分布(甚至方差不存在). 对中远海能股票(具体股票信息见§4)的价格持续期作Hill估计图(图中间的是Hill估计值, 另外两条分别为95%置信水平下的上下限)分析, 如图1所示, 无法得出中远海能的价格持续期数据的二阶矩(方差)有限这一结论.

在对ACD类模型进行参数估计时, 应用最多的是QMLE方法. 众所周知, QMLE只有在假设模型误差方差有限的条件下, 才具有相合性和渐近正态性^[8]. 根据图1所示, 金融数据往往呈现出重尾的性质, 因此在参数估计时运用QMLE就显得不合适. Lu等人^[9]提出了广义最小二乘估计(GLSE), 并说明该估计比QMLE较优, 但是它却要求数据的四阶矩有限. 鉴于金融高频数据一

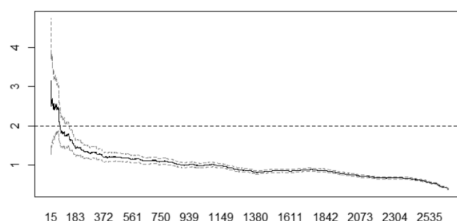


图 1 中远海能价格持续期Hill估计图

般都呈现明显的“尖峰重尾”性, 其方差甚至可能无穷, 同时受傅可昂等人^[10]的启发, 本文采用最小一乘估计(LAD)方法对TACD(1, 1)模型进行参数估计, 其主要优点是不用事先假定误差分布, 且不要求误差方差有限.

§2 主要结论

由于关心的是TACD模型中的参数估计, 故假设门限值已知(实证分析时可用Chan^[11]提出的超一致估计方法进行估计). 对(1)式两边取对数得 $\ln x_t = \ln \varphi_t + \ln \varepsilon_t$. 令 $y_t = \ln x_t$, 则TACD(1, 1)模型中参数的LAD可定义为

$$\hat{\theta}_{\text{lad}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{t=v+1}^n \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right|.$$

令 $\eta_t(\theta) = y_t - \ln(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g))$, 则有

$$\hat{\theta}_{\text{lad}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=v+1}^n |\eta_t(\theta)|. \quad (5)$$

由于在实际中只能观测到有限个数据, 则 $\varphi_t^g(\theta)$ 可近似地表示为 $\tilde{\varphi}_t^g(\theta)$, 因此有

$$\tilde{\theta}_{\text{lad}} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{t=v+1}^n \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right|.$$

令

$$U_t(\theta) = (U_t^1(\theta), \dots, U_t^G(\theta))^T,$$

其中

$$\begin{aligned} U_t^g(\theta) &= (U_{t0}^g(\theta), U_{t1}^g(\theta), U_{t2}^g(\theta))^T, \quad U_{t0}^g(\theta) = \frac{\partial \ln(\varphi_t^g(\theta))}{\partial \omega^g}, \\ U_{t1}^g(\theta) &= \frac{\partial \ln(\varphi_t^g(\theta))}{\partial \alpha^g}, \quad U_{t2}^g(\theta) = \frac{\partial \ln(\varphi_t^g(\theta))}{\partial \beta^g}, \quad g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned}$$

由(3)可知, 当 $z_{t-d} \in R_g$ 时,

$$\begin{aligned} U_{t0}^g(\theta) &= \frac{1}{\varphi_t^g(\theta)} \frac{1}{1 - \beta^g}, \\ U_{t1}^g(\theta) &= \frac{1}{\varphi_t^g(\theta)} (x_{t-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^g)^m x_{t-1-m}), \\ U_{t2}^g(\theta) &= \frac{\alpha^g}{\varphi_t^g(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} m (\beta^g)^{m-1} x_{t-1-m}. \end{aligned}$$

显然

$$U_t(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right).$$

令

$$\Sigma_\theta = \mathbf{E} U_t(\theta) U_t(\theta)^T, \Sigma_{\theta^g} = \mathbf{E} U_t^g(\theta) U_t^g(\theta)^T,$$

则由门限的性质可知 $\Sigma_\theta = \text{diag}(\Sigma_{\theta^1}, \Sigma_{\theta^2}, \dots, \Sigma_{\theta^G})$. 为了研究 $\hat{\theta}_{\text{lad}}$ 的渐近分布, 先给出如下假设.

A1 $\theta_0 = (\theta^{10}, \theta^{20}, \dots, \theta^{G0})^T$ 均为正值, $\alpha^g > 0$, $\beta^g > 0$ 且 $\alpha^g + \beta^g < 1$, 其中 θ_0 为参数 θ 的真实值, $\theta^{g0} = (\omega^{g0}, \alpha^{g0}, \beta^{g0})^T$ 为参数 θ^g 的真实值, $g = 1, 2, \dots, G$;

A2 $\{\varepsilon_t\}$ 是均值为1的非负独立同分布随机变量序列;

A3 矩阵 Σ_{θ_0} 是非奇异阵;

A4 $\eta_t(\theta_0)$ 的分布函数为 $F(x)$, 密度函数为 $f(x)$ 且处处可微,

$$f(0) > 0, \sup_x f(x) < \infty, \sup_x |f'(x)| < \infty.$$

注2.1 条件A1和A2是TACD模型研究中常用的假设, 它保证了持续期序列 $\{x_t\}$ 的平稳性和遍历性^[6] 以及 $\mathbf{E} x_t < \infty$. 同理, 结合(3)式可知 $U_{ti}^g(\theta)$ ($g = 1, 2, \dots, G; i = 0, 1, 2$) 都是有界的随机变量, 从而降低了对 $U_t(\theta)$ 的矩要求.

接下来给出本文的主要结论.

定理2.1 如果假设条件A1-A4成立, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, v 满足 $v/n \rightarrow 0$, 则在 θ_0 的半径为 r ($r > 0$) 的邻域内, 存在一个局部极小值 $\hat{\theta}_{\text{lad}}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{lad}} - \theta_0) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1}}{4f(0)^2}\right).$$

其中 $r > 0$ 为一个足够小的常数, $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛.

由于实际中无法获得 $\varphi_t(\theta)$, 只能获得 $\tilde{\varphi}_t(\theta)$. 定理2.2说明 $\tilde{\theta}_{\text{lad}}$ 也有类似结论.

定理2.2 如果假设条件A1-A4均成立, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, v 满足 $v/n \rightarrow 0$ 和 $v/\ln n \rightarrow \infty$, 则定理2.1的结论对 $\tilde{\theta}_{\text{lad}}$ 也成立, 即存在局部极小值 $\tilde{\theta}_{\text{lad}}$ 使得

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{\text{lad}} - \theta_0) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1}}{4f(0)^2}\right).$$

§3 数值模拟

本节通过数值模拟来比较MLE(QMLE)和LAD两种估计方法的估计效果. 考虑二阶段TACD(1, 1)模型, 模型形式为

$$\begin{aligned} x_t / \varphi_t &= \varepsilon_t, \\ \varphi_t &= \begin{cases} \omega^1 + \alpha^1 x_{t-1} + \beta^1 \varphi_{t-1}, & x_{t-1} > r, \\ \omega^2 + \alpha^2 x_{t-1} + \beta^2 \varphi_{t-1}, & x_{t-1} \leq r. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

在上述二阶段TACD(1, 1)模型中, 假定参数的真实值为 $\theta_0 = (\theta^{10}, \theta^{20})^T$, 其中 $\theta^{10} = (0.1, 0.2, 0.7)$, $\theta^{20} = (0.1, 0.3, 0.6)$, 门限变量为 x_{t-1} , 门限值 r 取0.45. 在模拟过程中, 分别令误差项 ε_t 服从均值为1且方差有限的分布(Exp(1), Pareto(3, 2)和Fréchet(2.1, 0.59)分布)和均值为1但方差无限的分布(Pareto(1.5, 0.5)和Fréchet(1.5, 0.37)分布), 同时选择 $v = n^{1/4}$. 采用平均偏

差bias和均方误差MSE来对估计效果进行比较, 其计算公式分别为

$$\text{bias}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\tau}_i - \tau) \quad \text{和} \quad \text{MSE}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\tau}_i - \tau)^2,$$

其中 τ 表示待估参数的真实值, $\hat{\tau}_i$ 表示第 i 次估计时待估参数的估计值, m 表示重复模拟的次数.

考虑到TACD模型主要用于研究金融高频数据中交易时间间隔的动态特征, 随机模拟部分主要分析大样本下的表现, 因此在样本量 n 分别选取200和500并重复运行1000次的条件下, 比较两种估计方法的估计效果, 具体结果如表1-表4所示.

表 1 不同分布下估计方法的bias对比表($n=200$)

分布	方法	$\text{bias}(\omega^1)$	$\text{bias}(\alpha^1)$	$\text{bias}(\beta^1)$	$\text{bias}(\omega^2)$	$\text{bias}(\alpha^2)$	$\text{bias}(\beta^2)$
Exp(1)	LAD	0.02029	-0.00906	-0.04061	0.01984	0.02655	-0.01265
	MLE	0.03130	-0.02919	-0.01355	0.01345	0.01125	-0.01516
Pareto(3, 2)	LAD	0.01000	-0.00806	-0.03694	0.01661	0.00418	-0.00825
	QMLE	0.04964	-0.04089	-0.03171	0.01665	0.02264	-0.02621
Fréchet(2.1, 0.59)	LAD	0.00186	-0.00572	-0.00429	0.01147	0.01409	-0.01244
	QMLE	0.02352	-0.02103	-0.01877	0.00515	0.02851	-0.01183
Pareto(1.5, 0.5)	LAD	0.01653	0.00228	-0.07260	0.01074	-0.01603	-0.00884
	QMLE	0.05771	-0.06259	-0.04271	0.01761	0.05280	-0.05151
Fréchet(1.5, 0.37)	LAD	0.00072	0.00245	-0.03245	0.00538	-0.0187	0.00709
	QMLE	0.03507	-0.04553	-0.03715	0.008106	0.05787	-0.03823

表 2 不同分布下估计方法的MSE对比表($n=200$)

分布	方法	$\text{MSE}(\omega^1)$	$\text{MSE}(\alpha^1)$	$\text{MSE}(\beta^1)$	$\text{MSE}(\omega^2)$	$\text{MSE}(\alpha^2)$	$\text{MSE}(\beta^2)$
Exp(1)	LAD	0.01309	0.00862	0.02035	0.00499	0.03631	0.01653
	MLE	0.00919	0.00710	0.01525	0.00433	0.03701	0.01330
Pareto(3, 2)	LAD	0.01413	0.00809	0.02237	0.004563	0.04438	0.02047
	QMLE	0.02140	0.01042	0.03156	0.00511	0.04545	0.02362
Fréchet(2.1, 0.59)	LAD	0.00195	0.00200	0.00382	0.00378	0.01674	0.00905
	QMLE	0.00547	0.00419	0.01002	0.00728	0.02739	0.02198
Pareto(1.5, 0.5)	LAD	0.03200	0.01418	0.05778	0.00262	0.05589	0.01798
	QMLE	0.07703	0.03164	0.08429	0.00984	0.07224	0.05235
Fréchet(1.5, 0.37)	LAD	0.00938	0.00507	0.01569	0.00190	0.02823	0.01020
	QMLE	0.03193	0.01602	0.04038	0.00671	0.04909	0.03950

由表1-表4可知, 当样本量较大且误差项服从重尾分布(特别是方差无穷)时, LAD的估计结果整体较优, 这说明LAD的估计结果更为稳健, 更适合具有重尾性和极端值的金融数据建模.

为了更直观地比较两种估计方法的估计效果, 将 $n = 500$ 且误差项服从Frécht(2.1, 0.59)分布时的两种参数估计结果作箱线图, 具体结果如图2和图3所示. 显然, 箱线图也支持LAD的估计结果整体较优这一结论.

§4 实证分析

本节对§1中提及的中远海能股票(600026)的价格持续期数据进行实证分析. 考虑到股票数

表 3 不同分布下估计方法的bias对比表($n=500$)

分布	方法	$\text{bias}(\omega^1)$	$\text{bias}(\alpha^1)$	$\text{bias}(\beta^1)$	$\text{bias}(\omega^2)$	$\text{bias}(\alpha^2)$	$\text{bias}(\beta^2)$
Exp(1)	LAD	0.00914	-0.00196	-0.01782	0.00715	0.01260	-0.00713
	MLE	0.01517	-0.01049	-0.01010	0.00269	0.01097	-0.00502
Pareto(3, 2)	LAD	0.00690	0.00018	-0.02356	0.00403	0.01481	-0.00395
	QMLE	0.02582	-0.01848	-0.01412	0.00588	0.01848	-0.01332
Fréchet(2.1, 0.59)	LAD	-0.00042	-0.00204	-0.00017	0.00060	0.01488	-0.00344
	QMLE	0.01316	-0.00715	-0.01473	-0.00946	0.02357	0.00010
Pareto(1.5, 0.5)	LAD	0.01030	0.00506	-0.04271	0.00330	-0.00015	-0.00271
	QMLE	0.04949	-0.02759	-0.05004	0.00853	0.03750	-0.02966
Fréchet(1.5, 0.37)	LAD	0.00079	-0.00026	-0.00967	0.00253	0.00016	-0.00193
	QMLE	0.03003	-0.01988	-0.03194	0.00244	0.04234	-0.02215

表 4 不同分布下估计方法的MSE对比表($n=500$)

分布	方法	$\text{MSE}(\omega^1)$	$\text{MSE}(\alpha^1)$	$\text{MSE}(\beta^1)$	$\text{MSE}(\omega^2)$	$\text{MSE}(\alpha^2)$	$\text{MSE}(\beta^2)$
Exp(1)	LAD	0.00292	0.00272	0.00587	0.00216	0.01299	0.00641
	MLE	0.00209	0.00193	0.00411	0.00135	0.01115	0.00379
Pareto(3, 2)	LAD	0.00410	0.00253	0.00762	0.00152	0.01639	0.00723
	QMLE	0.00619	0.00317	0.00855	0.00171	0.01926	0.00839
Fréchet(2.1, 0.59)	LAD	0.00043	0.00066	0.00105	0.00083	0.00523	0.00182
	QMLE	0.00130	0.00156	0.00300	0.00427	0.01221	0.00822
Pareto(1.5, 0.5)	LAD	0.01027	0.00487	0.02104	0.00111	0.02508	0.00781
	QMLE	0.03655	0.01480	0.04105	0.00695	0.04000	0.02650
Fréchet(1.5, 0.37)	LAD	0.00238	0.00139	0.00351	0.00067	0.00860	0.00366
	QMLE	0.01363	0.00859	0.01375	0.00425	0.02414	0.02149

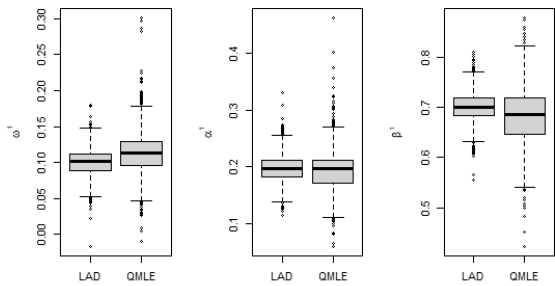


图 2 Frécht(2.1, 0.59) 误差分布下第一阶段参数估计

据存在着“月初效应”与“月末效应”, 因此这里选择时间跨度从2019年8月12日到2019年8月16日的的数据, 数据每3秒计数一次(数据来源于大富翁数据中心).

本节中的价格持续期是指价格的变化超过某一阈值所需要的时间, 其中价格的变化指的是数据变化的绝对值. 在我国, 沪深股票股价变动的最小单位是0.01元, 所以将阈值设为0.01元. 根据价格持续期的定义, 价格的绝对值每变化0.01元所需要的时间即为所研究的价格持续期. 同时, 为了消除高频数据日内效应对模型的影响, 在建模前采用三次样条插值法去除价格持续期的日内效应^[1], 其中样条节点分别为每个交易日的10:00, 10:30, 11:00, 11:30, 13:30, 14:00, 14:30, 15:00.

图4和图5为中远海能的原始价格持续期折线图(纵坐标代表原始价格持续期值, 横坐标代表持续期序列值)和调整后的价格持续期折线图(纵坐标代表调整后的价格持续期值, 横坐标代表持续期序列值). 由两张持续期图可以看出, 原始价格持续期与调整后的价格持续期一样, 都存在着明显的聚集效应, 也就是说在较长的持续期后面紧跟的是较长的持续期, 而在较短的持续期后面紧跟的是较短的持续期, 并且持续期的波峰与波谷也交替出现.

对原始价格持续期和调整后价格持续期做描述性统计分析, 结果如表5所示. 由表中数据可知, 调整后的价格持续期的均值接近于1, 持续期的标准差、偏度和峰度都有所减小; 调整后的价格持续期的偏度仍旧大于0, 且峰度仍旧大于3, 说明在去除了日内效应后, 持续期的分布仍旧不满足正态分布, 从JB统计量也能得出相同的结论; LB检验统计量则说明, 去除日内效应后的持续期之间还是存在着很强的自相关性, 这说明了去除日内效应并不能完全消除自相关性.

表 5 调整前后中远海能价格持续期描述性统计分析表

持续期个数	均值	标准差	偏度	峰度	JB统计量	LB(10)统计量
2658	26.261	71.400	7.923	87.270	868046.951 (0)	67.266 (0)
2658	1.006	2.232	7.182	78.671	705648.558 (0)	31.061 (0)

接下来考虑对去除日内效应后的持续期之间的这种自相关性应用形如(6)式的TACD模型进行建模. 由于门限值并不是已知的, 因此借鉴Chan^[11]提出的超一致估计量方法来寻找该门限值. 该方法的基本想法是: 如果在一批序列数据中存在着门限效应, 那么门限变量的样本值应该会频繁地穿过门限值. 识别门限值的具体方法如下: 先选取一步延迟调整持续期作为模型的门限变量, 将门限变量对应的样本值从小到大进行排列并去除其中的前15%和后15%的数据, 剩下的70%的数据为待定的门限值, 将这70%的数据依次作为门限值代入模型中进行参数估计, 根据参数估计得到的系数建立模型进而计算相对应的残差平方和, 残差平方和最小的那个模型即为最佳模型, 该模型对应的门限值即为所需的门限值. 在基于TACD(1, 1)模型的建模过程中, 对中远海能调整后的持续期运用超一致估计量方法识别的门限值为0.375.

在识别了TACD(1, 1)模型的门限值之后, 利用LAD和QMLE两种估计方法对TACD(1, 1)模型进行参数估计, 并通过AIC指标对模型估计结果进行评价, 具体结果见表6. 由表中数据可知, $\hat{\alpha}^1 + \hat{\beta}^1$ 和 $\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2$ 都小于1, 所以满足模型平稳性的要求; $\hat{\alpha}^1 + \hat{\beta}^1$ 和 $\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2$ 的值都比较大, 说明了持续期具有明显的聚集效应. 同时, 从AIC指标来看, LAD的估计结果优于QMLE.

为了与其他ACD模型比较建模效果, 对数据分别进行简单ACD(1, 1)模型和多阶段TACD模

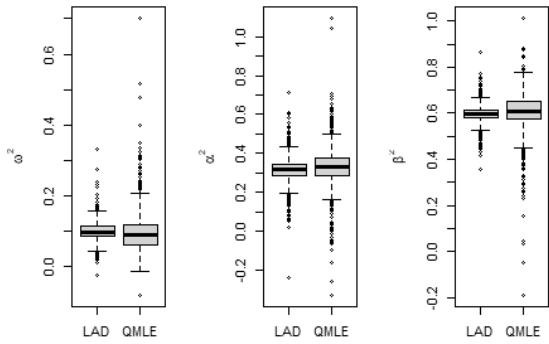


图 3 Frécht(2.1, 0.59)误差分布下第二阶段参数估计

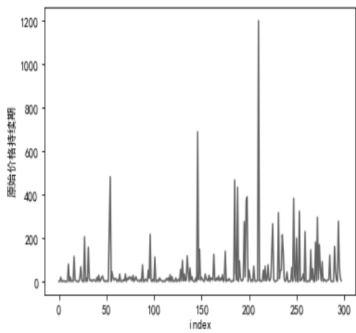


图 4 中远海能原始价格持续期

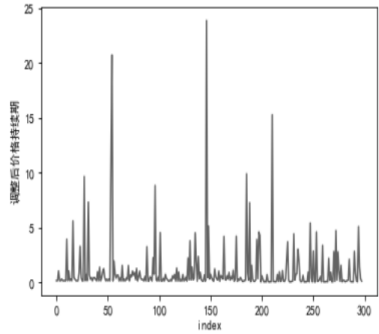


图 5 中远海能调整后价格持续期

表 6 二阶段TACD模型估计结果对比表

估计方法	$\hat{\omega}^1$	$\hat{\alpha}^1$	$\hat{\beta}^1$	$\hat{\omega}^2$	$\hat{\alpha}^2$	$\hat{\beta}^2$	AIC
LAD	0.0349	0.1707	0.7971	0.0131	0.3104	0.6744	2.7935
QMLE	0.0114	0.1691	0.81735	0.0316	0.2581	0.7035	4.5367

型(以三阶段TACD模型为例)建模, 同样给出LAD和QMLE两种估计结果, 具体结果如表7和表8所示.

表 7 简单ACD模型的估计结果对比表

估计方法	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	AIC
LAD	0.0235	0.1811	0.7883	3.1259
QMLE	0.0135	0.1743	0.8092	4.6679

表 8 三阶段TACD模型的估计结果对比表

估计方法	$\hat{\omega}^1$	$\hat{\alpha}^1$	$\hat{\beta}^1$	$\hat{\omega}^2$	$\hat{\alpha}^2$	$\hat{\beta}^2$	$\hat{\omega}^3$	$\hat{\alpha}^3$	$\hat{\beta}^3$	AIC
LAD	0.0143	0.1746	0.8085	0.0106	0.2456	0.7481	0.0142	0.1523	0.8283	2.7877
QMLE	0.0124	0.1656	0.82935	0.0104	0.2535	0.7027	0.0122	0.1753	0.8196	4.5287

对比表6和表7可知: 简单ACD模型下LAD估计的AIC指标上升到了3.1259(上升了11.90%), MLE的AIC指标上升到了4.6679(上升了2.89%). 这说明和简单ACD模型相比, 在采用相同估计方法的情况下, TACD(1, 1) 模型对数据的拟合程度更好. 对比表6和表8 可发现: 三阶段ACD模型下LAD估计的AIC指标下降到了2.7877(下降了0.21%), MLE的AIC指标下降到了4.5287(下降了0.18%). 这说明和二阶段TACD模型相比, 在采用相同估计方法的情况下, 多阶段TACD模型对数据的拟合程度可能会更好; 然而从结果来看, 效果提升不明显, 但计算量大大增加, 因此本文认为二阶段TACD模型已基本适用.

一般在建立模型后, 都要进行残差检验来判断残差 $\frac{x_t}{\varphi_t}$ 是否满足独立同分布, 从而判断出此模型对数据拟合的是否充分. 由图6和表9可认为残差序列平稳且相互之间不存在相关性, 即可认为残差项为纯随机序列, 这也说明TACD(1, 1)模型拟合充分, 建模效果较好.

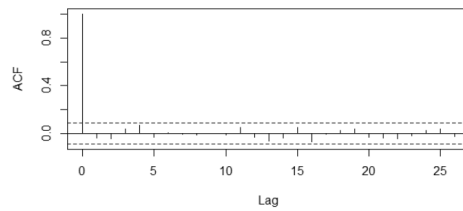


图 6 中远海能残差自相关图

§5 结论证明

下面给出定理2.1和定理2.2的证明, 在证明之前给出如下引理.

引理5.1^[12] 设 $\nu_n(\cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^q$ 中的随机过程, 在 $C(\mathbf{R}^q)$ 中有 $\nu_n(\cdot) \xrightarrow{d} \nu(\cdot)$, 其中 $C(\mathbf{R}^q)$ 表示由 $\mathbf{R}^q$ 中的连续函数所组成的线性空间.

(i) 若 ξ_n 和 ξ 分别是 $\nu_n(\cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$ 的最小值点, ξ 依概率唯一, $\nu_n(\cdot)$ 具有凸的样本路径, 则在 $\mathbf{R}^q$ 中有 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

(ii) 若 ξ 是 $\nu(\cdot)$ 唯一的最小值点, 则 $\nu_n(\cdot)$ 存在局部极小值点 ξ_n , 使得在 $\mathbf{R}^q$ 中有 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

表 9 残差Ljung-Box检验结果表

滞后阶数	LB统计量	P值
10	5.3677	0.8653
20	15.674	0.7366

证明具体可见Davis等人^[12]中的引理2.2和注记1.

接下来开始定理2.1的证明.

令 $\sigma = (\sigma_1^1, \sigma_2^1, \sigma_3^1, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_1^G, \sigma_2^G, \sigma_3^G)^T := n^{\frac{1}{2}}(\theta - \theta_0)$, 并记

$$S_n(\sigma) = \sum_{t=v+1}^n (|\eta_t(n^{-\frac{1}{2}}\sigma + \theta_0)| - |\eta_t(\theta_0)|). \quad (7)$$

由(5)可知, $\hat{\sigma}_{\text{lad}} := n^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_{\text{lad}} - \theta_0)$ 能使(7)式达到最小.

令

$$S_n^*(\sigma) := \sum_{t=v+1}^n (|\eta_t(\theta_0) - n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)| - |\eta_t(\theta_0)|),$$

则由公式

$$|x - y| - |x| = -y\{I(x > 0) - I(x < 0)\} + 2 \int_0^y \{I(x \leq s) - I(x \leq 0)\} ds$$

可得

$$\begin{aligned} S_n^*(\sigma) &= \sum_{t=v+1}^n \left(-n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)(I(\eta_t(\theta_0) > 0) - I(\eta_t(\theta_0) < 0)) + \right. \\ &\quad \left. 2 \int_0^{n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)} (I(\eta_t(\theta_0) \leq s) - I(\eta_t(\theta_0) \leq 0)) ds \right) := \\ &\quad -\sigma^T T_n + 2 \sum_{t=v+1}^n \xi_t(\sigma), \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} T_n &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=v+1}^n U_t(\theta_0) (I(\eta_t(\theta_0) > 0) - I(\eta_t(\theta_0) < 0)), \\ \xi_t(\sigma) &= \int_0^{n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)} (I(\eta_t(\theta_0) \leq s) - I(\eta_t(\theta_0) \leq 0)) ds. \end{aligned}$$

由于 $\eta_t(\theta_0) = y_t - \ln(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta_0) I(z_{t-d} \in R_g))$ 独立同分布, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{t=v+1}^n E(\xi_t(\sigma) | \mathfrak{F}_{t-1}) &= \\ \sum_{t=v+1}^n E\left(\int_0^{n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)} (I(\eta_t(\theta_0) \leq s) - I(\eta_t(\theta_0) \leq 0)) ds \mid \mathfrak{F}_{t-1}\right) &= \\ \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}}\sigma^T U_t(\theta_0)} E(I(\eta_t(\theta_0) \leq s) - I(\eta_t(\theta_0) \leq 0)) ds &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} (F(s) - F(0)) ds = \\
& \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} \left(s f(0) + \frac{1}{2} s^2 f'(s^*) \right) ds = \\
& \sigma^T \left(\frac{f(0)}{2n} \sum_{t=v+1}^n U_t(\theta_0) (U_t(\theta_0))^T \right) \sigma + \frac{1}{2} \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} s^2 f'(s^*) ds,
\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{S}_t = \sigma(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$, s^* 介于 0 与 s 之间. 从而可得

$$S_n^*(\sigma) = -\sigma^T T_n + f(0) \sigma^T \left(\frac{1}{n} \sum_{t=v+1}^n U_t(\theta_0) (U_t(\theta_0))^T \right) \sigma + R_n(\sigma), \quad (9)$$

其中

$$R_n(\sigma) = \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} s^2 f'(s^*) ds + 2 \sum_{t=v+1}^n (\xi_t(\sigma) - \mathbb{E}(\xi_t(\sigma) | \mathfrak{S}_{t-1})).$$

若假设条件 A4 满足, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由 $U_t(\theta)$ 中每个元素的有界性(注 2.1)可知, 对每个 $\sigma \in R^{3G}$ 有

$$\left| \sum_{t=v+1}^n \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} s^2 f'(s^*) ds \right| \leq \frac{1}{3} n^{-\frac{3}{2}} \sup_x f'(x) \|\sigma\|^3 \sum_{t=v+1}^n \|U_t(\theta_0)\|^3 \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

又因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_t^2(\sigma)) &= \mathbb{E} \left(\int_0^{n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0)} (F(s) - F(0)) ds \right)^2 \leq \\
&\mathbb{E} \left(n^{-\frac{1}{2}} |\sigma^T U_t(\theta_0)| \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} |\sigma^T U_t(\theta_0)|} |F(s) - F(0)| ds \right) \leq \\
&n^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left(|\sigma^T U_t(\theta_0)| \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} |\sigma^T U_t(\theta_0)|} (F(s) - F(0))^{\frac{1}{2}} ds \right) \leq \\
&n^{-\frac{1}{2}} \sup_x f(x)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left(|\sigma^T U_t(\theta_0)| \int_0^{n^{-\frac{1}{2}} |\sigma^T U_t(\theta_0)|} s^{\frac{1}{2}} ds \right) \leq \\
&n^{-\frac{5}{4}} \|\sigma\|^{\frac{5}{2}} \sup_x f(x)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}(\|U_t(\theta_0)\|^{5/2}),
\end{aligned}$$

则在假设条件 A4 满足的条件下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\sum_{t=v+1}^n (\xi_t(\sigma) - \mathbb{E}(\xi_t(\sigma) | \mathfrak{S}_{t-1})) \right)^2 = \\
&\sum_{t=v+1}^n \mathbb{E}(\xi_t(\sigma) - \mathbb{E}(\xi_t(\sigma) | \mathfrak{S}_{t-1}))^2 \leq \\
&2 \sum_{t=v+1}^n \mathbb{E}(\xi_t^2(\sigma)) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

因此对每个 $\sigma \in R^{3G}$ 有 $R_n(\sigma) = o_p(1)$. 同时在假设条件 A1-A4 成立的条件下, 根据遍历性定理可

得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=v+1}^n U_t(\theta_0) U_t(\theta_0)^T \rightarrow \Sigma_{\theta_0}.$$

由此可得, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f(0)\sigma^T \left(\frac{1}{n} \sum_{t=v+1}^n U_t(\theta_0) (U_t(\theta_0))^T \right) \sigma + R_n(\sigma) \rightarrow f(0)\sigma^T \Sigma_{\theta_0} \sigma.$$

至于 T_n , 结合鞅中心极限定理^[13]即得 $T_n \xrightarrow{d} \Phi$, 其中 $\Phi \sim N(0, \Sigma_{\theta_0})$. 因此由(9)式可知

$$S_n^*(\sigma) \xrightarrow{d} -\sigma^T \Phi + f(0)\sigma^T \Sigma_{\theta_0} \sigma.$$

记

$$H_t(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right),$$

$$S_n^+(\sigma) = \sum_{t=v+1}^n \left(|\eta_t(\theta_0) - n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0) + \frac{1}{2} n^{-1} \sigma^T H_t(\theta_0) \sigma| - |\eta_t(\theta_0)| \right).$$

显然, $H_t(\theta) = \frac{\partial U_t(\theta)}{\partial \theta^T}$, 且由 $H_t(\theta)$ 的有界性(与 $U_t(\theta)$ 的有界性类似)易知, 对任意给定的 σ ,

$$S_n^+(\sigma) - S_n^*(\sigma) \xrightarrow{p} 0,$$

所以有

$$S_n^+(\sigma) \xrightarrow{d} -\sigma^T \Phi + f(0)\sigma^T \Sigma_{\theta_0} \sigma.$$

注意到

$$|S_n(\sigma) - S_n^+(\sigma)| \leq \sum_{t=v+1}^n \left| \eta_t(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} \sigma) - \left| \eta_t(\theta_0) - n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0) + \frac{1}{2} n^{-1} \sigma^T H_t(\theta_0) \sigma \right| \right|, \quad (10)$$

且对 $\eta_t(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} \sigma)$ 在 θ_0 处进行 Taylor 展开, 可得

$$\eta_t(\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} \sigma) = \eta_t(\theta_0) - n^{-\frac{1}{2}} \sigma^T U_t(\theta_0) + \frac{1}{2} n^{-1} \sigma^T H_t(\theta^*) \sigma,$$

其中 θ^* 在 θ_0 和 $\theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} \sigma$ 之间. 将其代入(9)式即有

$$|S_n(\sigma) - S_n^+(\sigma)| \leq \frac{1}{2} n^{-1} \sum_{t=v+1}^n |\sigma^T (H_t(\theta^*) - H_t(\theta_0)) \sigma|.$$

显然 $\theta^* \xrightarrow{p} \theta_0$, 从而可得对任意给定的 σ , $S_n(\sigma) - S_n^+(\sigma) \xrightarrow{p} 0$, 所以有

$$S_n(\sigma) \xrightarrow{d} -\sigma^T \Phi + f(0)\sigma^T \Sigma_{\theta_0} \sigma.$$

由于

$$-\sigma^T \Phi + f(0)\sigma^T \Sigma_{\theta_0} \sigma$$

是 σ 的函数, 且在 $\sigma = \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1} \Phi}{2f(0)}$ 处取得最小值, 根据引理5.1, 由于凸性假设不一定满足, 故只能得到一系列局部极小值, 其分布收敛到 $\sigma = \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1} \Phi}{2f(0)}$. 因此, 在假设条件A1-A4均成立的条件下, 在 θ_0 的半径为 $r(r > 0)$ 的邻域内, 存在一个局部极小值 $\hat{\theta}_{\text{lad}}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\text{lad}} - \theta_0) \xrightarrow{d} \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1} \Phi}{2f(0)} \sim N\left(0, \frac{\Sigma_{\theta_0}^{-1}}{4f^2(0)}\right).$$

定理2.1证明完毕.

接下来开始证明定理2.2.

由

$$\begin{aligned} & \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right| = \\ & \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) + \right. \\ & \left. \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) - \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right| \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} & \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right| - \left| \ln \frac{\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)}{\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)} \right| \leq \\ & \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right| \leq \\ & \left| y_t - \ln \left(\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g) \right) \right| + \left| \ln \frac{\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)}{\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)} \right|. \end{aligned}$$

由于 $v/n \rightarrow 0$, 故为证定理2.2成立, 只需证明

$$\sup_{\theta \in \Delta} \sum_{t=v+1}^n \left| \ln \frac{\sum_{g=1}^G \tilde{\varphi}_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)}{\sum_{g=1}^G \varphi_t^g(\theta) I(z_{t-d} \in R_g)} \right| = o_p(1), \quad (11)$$

其中 Δ 表示真实参数的一个足够小的开邻域.

由 $\varphi_t(\theta)$ 和 $\tilde{\varphi}_t(\theta)$ 的定义以及 $\ln(1+x) \sim x$ (x 充分小) 可知, 要想证明(11)式成立, 只需证明

$$\sup_{\theta \in \Delta} \sum_{t=v+1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^g(\beta^g)^m x_{t-1-m} I(t-1-m < 1) = o_p(1) \quad (12)$$

对 $g = 1, 2, \dots, G$ 成立即可.

由Markov不等式可知, 对任意的 $\delta > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq v+1} P \left(\sum_{m=1}^{\infty} (\beta^g)^m x_{t-1-m} I(t-1-m < 1) > \delta \right) \leq \\ & \delta^{-1} \sup_{t \geq v+1} E \left| \sum_{m=\lfloor v-1 \rfloor}^{\infty} (\beta^g)^m x_{t-1-m} \right| = \\ & \delta^{-1} \sum_{m=\lfloor v-1 \rfloor}^{\infty} (\beta^g)^m E|x_1| < \infty, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\lfloor z \rfloor$ 表示不超过 z 的最大整数, 在最后一步中利用了 $0 < \beta^g < 1$ ($g = 1, 2, \dots, G$) 和 $E|x_1| < \infty$. 因此, 结合 $\frac{v}{\ln n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 和(13)式即可得(12)式成立, 定理2.2证毕.

参考文献:

- [1] Engle R F, Russell J R. Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data[J]. *Econometrica*, 1998, 66(5): 1127-1162.
- [2] Lunde A. A generalized gamma autoregressive conditional duration model[Z]. Discussion paper, Aalborg University, 2000.
- [3] Grammig J, Maurer K O. Non-monotonic hazard functions and the autoregressive conditional duration model[J]. *The Econometrics Journal*, 2000, 3(1): 16-38.
- [4] Bhatti C R. The Birnbaum-Saunders autoregressive conditional duration model[J]. *Mathematics & Computers in Simulation*, 2010, 80(10): 2062-2078.
- [5] Zheng Yao, Li Yang, Li Guodong. On Fréchet autoregressive conditional duration models[J]. *Journal of Statistical Planning & Inference*, 2016, 175: 51-66.
- [6] Saulo H, Balakrishnan N, Vila R. On a quantile autoregressive conditional duration model[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2023, 203: 425-448.
- [7] Zhang Michael Yuanjie, Russell J R, Tsay R S. A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data[J]. *Journal of Econometrics*, 2001, 104(1): 179-207.
- [8] Cavaliere G, Mikosch T, Rahbek A, et al. Tail behavior of ACD models and consequences for likelihood-based estimation[J]. *Journal of Econometrics*, 2024, 238(2): 105613.
- [9] Lu Wanbo, Ke Rui. A generalized least squares estimation method for the autoregressive conditional duration model[J]. *Statistical Papers*, 2019, 60(1): 123-146.
- [10] 傅可昂, 吴梦雪, 黄炜, 等. ACD模型自加权LAD估计的渐近性[J]. *高校应用数学学报*, 2020, 35(3): 253-264.
- [11] Chan K S. Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model[J]. *The Annals of Statistics*, 1993, 21(1): 520-533.
- [12] Davis R A, Knight K, Liu Jian. M-estimation for autoregressions with infinite variance[J]. *Stochastic Processes and their Applications*, 1992, 40(1): 145-180.
- [13] Hall P, Heyde C C. *Martingale Limit Theory and Its Application*[M]. New York: Academic Press, 1980.

LAD-based inference for threshold ACD models with heavy tails

FU Ke-ang^{1,2,3}, QIAN Hong-yu³, CHEN Ying-yu^{1,2}

(1. Institute of Digital Finance, Hangzhou City University, Hangzhou 310015, China;

2. Department of Statistics and Data Science, Hangzhou City University, Hangzhou 310015, China;

3. School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The least absolute deviation estimator for threshold autoregressive conditional duration models with possibly infinite variance is proposed in this paper, and the local asymptotic normality of this estimator is indicated. A large number of simulation studies confirm our theoretical results and suggest that the proposed estimator is more robust compared to quasi-maximum likelihood estimation. An application to the stocks' price durations shows that the performance of the proposed estimator is much better.

Keywords: autoregressive conditional duration; least absolute deviation estimation; asymptotic normality; price duration

MR Subject Classification: 62F12