

粒态智能数学初探

黄崇福^{1,*}, 黄云东²

(1. 北京师范大学 地理科学学部 灾害风险科学研究院, 北京 100875;

2. 圣爱德华大学 比尔芒迪商学院, 美国 得克萨斯州奥斯汀 78704)

摘要: 从2023年开始, 基于深度学习算法的人工智能(AI), 已经进入商业化应用阶段, 正在快速改变世界. 然而, 审视人工神经网络等AI底层模型, 不难发现, 现有的AI均是由传统数学支持的, 是机械式AI, 因为数字和空间是传统数学中的基本元素, 是用来描述物理世界, 而不是人类智能的. 本文首次提出了以粒和态为基本元素的粒态智能数学(GSIM). “概念”、“知识”和“意识”, 称为思维活动中的粒. 一个粒可能变化的某种态势, 称为该粒的一个态. 传统数学是GSIM的一个特例. 传统数学中的所有运算和模型, 均是GSIM中的运算和模型. 除此以外, GSIM中的基本运算, 至少还应该增加平均、裂化、互动、堆砌和融合等. 文中以模糊粒态为例子, 用格贴近度描述相像性, 讨论了通过粒和态相互借鉴, 实现“举一反三”的粒态扩散模型.

关键词: 人工智能; 传统数学; 智能数学; 意识流; 粒态扩散

中图分类号: TP18

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2025)02-0127-18

§1 引言

目前流行的, 基于深度学习算法的人工智能(Artificial Intelligence, AI), 称为生成式AI. 底层模型是人工神经网络(Artificial Neural Network, ANN). 利用某种学习方法, ANN将来自给定学习样本的统计信息扩散到神经元之间的权值连接上, 并形成分类阈值. 经过训练的AI可以很好地用于模式识别. 深度学习是指人工神经网络具有许多隐藏层, 可以更深入地学习大数据. 生成式人工智能的机械本质在于它只会“鹦鹉学舌”, 不会考虑新问题, 没有真正的智能.

机械式AI正在加速技术和社会变化. AlphaFold能够产生高度准确的蛋白质结构预测, 谷歌DeepMind的AI已经发现了220万种新材料, OpenAI的GPT-4o能够处理文本、语音和视频, 为人类与机器互动创造了条件. AI具有“知识全面”、“不知疲劳”及“速度快捷”等优势, 如能让其具有意识, 生出些许智能, 它就能帮助人们更好地应对不确定世界.

AI有望为人类带来巨大利益, 也会带来新的潜在风险. 机械式AI的安全问题, 本质上与汽车、电器和核装置带来的问题并没有什么本质的不同, 但更危险. AI杜撰参考文献, 由幻觉产

收稿日期: 2024-10-19 修回日期: 2025-03-18

*通讯作者, Email: hchongfu@bnu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(41671502)

生了欺骗,是一个十分普遍的现象。尤其是AI给出张冠李戴的答案时,会误导用户。张冠李戴式弱智AI的风险,才是当下AI最大的风险。只有让AI具有风险意识,能够分析其自身行为对人类的威胁,并能规避之,人类的安全才有保障。如果只是被动防御,最终导致防不胜防。

现代计算机的超级算力快速完成已有的AI算法(例如大规模人工神经网络),从而使AI实现了商业化应用。事实上,如今的AI,只具有传统数学支持的统计学习和决策优化能力,并无真正的智能^[1]。数字和空间是传统数学中的基本元素,是用来描述物理世界,而不是人类的智能。

以描述意识为基础,以人类思维活动为研究对象的数学,称为智能数学(Intelligent Mathematics, IM)^[2]。IM不可能是传统数学的良性拓展。概念、知识和意识是IM中的基本元素。显然,没有IM,就不可能产生有意识的AI。

人工智能中的智能,是通过学习和训练得到的理解、分析、解决问题的能力。这种能力包括逻辑思维、数学能力、语言能力、生产能力和生存能力,是一种对信息的处理和运用的能力。智能数学中的智能涉及到了人类的智慧,是在本能、知识、经验和理解的基础上,所形成的判断力、洞察力和明智的决策能力,是一种对价值观和道德原则的综合运用,超越了简单的知识和技能。本能是一种与生俱来的冲动或行动动机,是未经学习,由基因决定的行为模式。本能智慧是一种先天的、内在的、不依赖于学习或经验的行为模式,它是生物体内的固定反应机制,用于确保物种的生存和繁衍。

由蛛丝马迹举一反三,是人类应对未知世界的本能智慧之一。这种智慧在于能够用不完整的知识看到更大的图景,从而让人类对未知世界有所预感。然而,由于个人和团队的知识有限、疲劳和反应时间缓慢,他们很难及时捕捉和管理未知世界。这种推断和预感是意识流过程,而不仅仅是统计学习和决策优化,因为未知世界不提供大数据。“举一反三”是一种扩散外推法,即从少量信息中推断出一系列可能性。

1997年,这一现象被描述为信息扩散原理^[3]:当人类使用不完备数据来估计因果关系时,必定存在适当的扩散函数和相应的算子来部分填补不完备中的空白,使扩散估计比非扩散估计更接近真实关系。扩散函数具有可解释性和灵活性,因此在风险分析中得到了广泛应用。

可以认为,信息扩散技术(Information Diffusion Technology, IDT)在用小样本探知未知世界时,有明显的优势,但它仍然是在传统数学的框架内。目前的IDT无法模拟意识流,因为传统数学描述不了人脑中的意识。但信息扩散原理或许是敲开IM大门的一块砖,因为它已经触碰到意识流中“举一反三”的表述。如果IDT能够真正激发有意识的人工智能,那么世界的发展轨迹将发生变化。

本文的组织结构如下: §2回顾了传统数学; §3探讨了在传统数学基础上的当前人工智能的局限性; §4介绍了智能数学的框架; §5提出了粒态智能数学; §6提出了借鉴式粒态扩散模型; §7是结语与讨论。

§2 传统数学

研究静态问题的第一代数学,其代表性符号是阿拉伯数字、四则运算符、几何图形、代数符号和矩阵等。人们从简单的计数到美轮美奂的代数系统,并坚韧不拔地证明大量关于“数”的定律,历经几千年,构建了第一代数学;研究动态问题的第二代数学,其代表性符号是极限、无穷大、无穷小、微分、积分、矢量和形形色色的空间符号等。从牛顿研究天体运动规律的需要,到柯西简洁而严格地证明了牛顿-莱布尼茨微积分学,再到充满争议的主观-非主观概率论,历经

三百多年, 人们构建了第二代数学; 研究数学结构和泛化问题的第三代数学, 其代表性符号是集合、映射和关系等. 从康托尔提出集合论, 到拓扑学、模糊数学和流形等大量现代数学的出现, 历经一百多年, 人们构建了第三代数学. 在本文中, 笔者统称这三类代数学为传统数学.

第一代数学的核心内容是代数学和几何学. 研究数的部分, 属于代数学的范畴; 研究形的部分, 属于几何学的范畴. 代数涉及使用符号的算术运算. 代数有助于将问题或情况表示为数学表达式. 它包括 x 、 y 、 z 等变量, 以及加法、减法、乘法和除法等数学运算, 以形成一个有意义的数学表达式. 几何主要处理对象的形状和大小、它们的相对位置以及空间的特性.

中国的《九章算术》(公元前2世纪)无疑是第一代数学中最古老、影响最大的著作之一. 该书中的盈不足术是求解代数方程最古老的方法^[4]. 以欧几里得《原本》(公元前3世纪)等为代表的古希腊数学, 建立了公理和演绎推理, 即形式数学证明的概念. 这一创新对随后的数学发展产生了无与伦比的影响^[5].

第二代数学的核心内容是微积分. 基于几何方面的考虑, 牛顿和莱布尼茨在引入一种新的变量计算方法的过程中分别各自独立发现了微积分, 它的两个主要概念是导数和积分. 导数给出了函数的变化率, 积分给出了曲线下的面积. 微分学处理导数, 即变化率和切线; 积分学处理积分, 即面积和体积. 在十八世纪, 随着问题越来越复杂, 微积分确实变得更具分析性, 因此经常被称为数学分析.

如今, 稍微复杂一点的数学应用, 例如电磁科学和人工智能等, 都离不开微积分. 在卫星轨道控制领域, 无论是由开普勒轨道参数以闭合形式参数化, 还是用牛顿公式获得非球面重力模型、其他天体的重力以及推进推力、大气阻力和太阳辐射压力等非保守力的影响^[6], 都会用到加速度(速度关于时间的导数).

AI是一个没有单一定义的广阔领域, 涵盖了从面向符号推理的算法到认知模拟和神经形态机器的研究主题, 最终导向了ANN^[7]. ANN中的任何训练算法, 如反向传播(Back-Propagation, BP)网络中的梯度下降法, 都是数学分析中寻求极值的算法^[8]. 爱因斯坦广义相对论中使用的黎曼几何是高斯微分几何的推广^[9].

可以说, 第二代数学在现代科学技术中发挥着最关键的作用.

第三代数学的核心内容是集合论. 集合可以被认为是将单个对象组合成一个整体. 集合的存在性和基本性质是由适当的形式公理假设的. 所有数学对象都可以理解为集合. 纯集合论的形式语言允许将所有数学概念和论点形式化. 集合论已经成为数学的标准基础.

将几何图形在连续改变形状后还能保持不变的性质, 用集合上的空间连续性和连通性进行描述, 形成了一般拓扑学, 亦称为点集拓扑学. 采用拓扑学作为研究工具, Kosterlitz和Thouless证明了超导现象能够在低温下产生, 并阐释了超导现象在较高温度下也能产生的机制-相变. 与此同时, Haldane发现了拓扑结构如何解释某些材料的磁性. 2016年诺贝尔物理学奖表彰了他们对物质拓扑相变和拓扑相的理论发现^[10]. Zadeh通过引入模糊集的概念开创了全新的范式, 在模糊集中, 隶属度是一个程度问题, 而不是肯定或否定的问题^[11]. 使用模糊集的数学模型称为模糊数学模型. 它们与清晰模型大不相同, 因为在清晰模型中, 参数是固定的. 在现实中, 模型参数可能不是固定的, 可能由于多种原因而变化. 例如, 肿瘤本质上是动态的, 导致了动态的生长模式, 模糊模型可以根据真实程度估计肿瘤负担^[12]. 利用拓扑同胚, 人们将流形(广义曲线和曲面的概念)扩展到更复杂的任意维对象, 从而产生了一系列降维算法. n -流形是一个与 n 维欧几里得空间同胚的空间. 来自不同流形同胚构造的不同降维算法已经大量用于机器学习^[13].

在中世纪直至16世纪的学科体系中, 数学科学从属于神学和哲学, 特别是自然哲学, 但数学科学的从业者使用传统数学来解决运动等物理问题^[14]. 换言之, 传统数学只能书写物理的宇宙, 书写不了宇宙中包括人类智慧在内的诸多细节. 如今, 传统数学中的数字和空间已经被广义化, 数学体系变得极为复杂, 数学家之间的交流也变得相当困难.

人工智能并不是数学的一部分, 而仅仅是数学模型的应用. 用传统数学构造的任何人工智能模型, 都不具备真正的智力能力.

§3 人工智能

莱特兄弟发明飞机^[15]之前, 人类尝试在空中飞行有着悠久的历史. 人工智能(Artificial Intelligence, AI)的传说可以追溯到古埃及, 但可考证的是起源于古希腊哲学家亚里士多德时代^[16]. 伴随着人们在纸上首次设计了一台可工作的计算机, 相应的人工智能发展经过两个多世纪的漫长历程^[17].

一般来说, AI被认为是机器对人类智能过程的模拟. AI有时被称为机器智能, 是由机器展示的智能, 与人类和其他动物展示的自然智能形成对比. 在计算机科学中, AI研究被定义为对“智能主体”的研究: 能够感知环境, 并采取行动以成功实现目标的智能机器. 通俗地说, “人工智能”一词是指机器模仿人类的“认知”功能和“智能”行为, 如“学习”和“解决问题”等. “人工智能”一词是约翰·麦卡锡在命名1956年在美国达特茅斯学院举行的夏季人工智能会议时首次创造的^[18].

现代AI经历了四个发展阶段: (1) 从1936年的图灵机到1965年的Zadeh模糊集; (2) 从模糊集到1997年的信息粒理论; (3) 从信息粒到IBM 2011年的超级计算机Watson; (4) 从Watson到2022年由OpenAI开发的ChatGPT.

1936年, 图灵出版了《论可计算数》一书, 提出了一种抽象机器, 现在被称为“图灵机”: 使用一组精确、有限的规则(由有限的表给出)从一种状态移动到另一种状态, 并根据单个符号从磁带上读取^[19]. 今天的所谓AI, 其实是一个计算机系统, 计算机的发明和发展无疑是二十世纪最深远成就之一, 而图灵对其有三个开创性贡献: 一是为了解决数学中的可计算性问题, 他为图灵机开发了一个简单的数学模型; 二是他积极参与建造最早的电子、可编程数字计算机; 最后, 他为思考提供了一个优雅的操作定义, 在很多方面, 它推动了整个人工智能领域的发展^[20]. 第一个工作的AI程序是1951年编写的, 在曼彻斯特大学的Ferranti Mark I Machine计算机上运行, 其跳棋程序由Christopher Strachey编写, 国际象棋程序由Dietrich Prinz编写^[18].

1965年, Zadeh提出了模糊集理论和模糊逻辑理论. 他的目标是从数学基础上为AI的发展开辟一条新道路. 经典的集合论只能表达精确概念, 刻板的程序使计算机在识别和控制上无法模拟人脑在识别和控制中由于使用模糊词句而带有的灵活机动性. 为了改变这种情况, 他通过数学描述探索了模糊概念, 并将经典集合扩展为模糊集合^[21]. 模糊集的隶属度概念与多值逻辑中谓词的真值有关, 但它们的作用是非常不同的, 模糊集理论的动机与多值逻辑的动机也非常不同^[22]. 这种差异推动了AI的突破, 刺激了专家系统^[23]、知识工程^[24]、模糊控制^[25]、软计算^[26]等AI新技术的喷涌而出. 1982年, Hopfield模型^[27]的出现使McCulloch和Pitts在1943年首次描述的人工神经网络(ANN)^[28]重新活跃起来, 导致了ANN的研究热潮. 针对“许许多多人赖以作出决策的论据既是模糊又是粒状的”这一事实, Zadeh在1979年提出了信息粒概念^[29], 并

于1997年形成了模糊信息粒理论^[30]: 人类认知的基础有三个基本概念: 粒化、组织和因果关系. 模糊信息粒化是广义约束的概念. 粒的主要类型有: 可能性、真实性和概率性.

如果说一个世纪前, “智能”纯粹是人类的概念, 而人类的智能启发了研究人员在20世纪60年代提出了人工智能的概念, 那么可以说, 超级计算机“Watson”的出现, 标志着AI到了可实质性服务于人类的阶段, 也就是本文所界定的AI第三个发展阶段. “Watson”的起源可以追溯到1997年5月, 当时一群IBM研究人员开始开发“深蓝”, 这是一种人工智能解决方案, 可以解决复杂问题、适应环境并分析新信息. 2011年, IBM在热门游戏节目《危险边缘》中推出了第一个版本的“Watson”, 以挑战卫冕冠军. 它展示了机器学习算法如何搜索庞大的数据库来找到常见问题的答案. 结果是“Watson”战胜了人类参与者^[31]. “Watson”没有连接至互联网, 因此不会通过网络进行搜索, 仅靠内存资料库作答.

2022年11月, 美国人工智能公司OpenAI发布了一款名为ChatGPT的AI聊天机器人工具, 标志着AI的发展进入第四个阶段. ChatGPT在互联网上运行, 其基础是生成预训练转换器(Generative Pre-trained Transformer, GPT)架构^[32]. 通俗地讲, ChatGPT是一个由OpenAI开发的大型语言模型. 它的目的是使用自然语言处理算法, 对各种提示和问题产生类似人类的反应. 从本质上讲, 它是一个人工智能语言模型, 旨在模拟人类对话, 并根据它所学的知识, 尽它所能回答问题^[33]. 自ChatGPT发布以来, 许多研究都强调了ChatGPT的卓越性能, 但有证据表明, 人类程序员在编程环境中解决问题的某些方面保持着比ChatGPT的竞争优势. ChatGPT在IEEEExtreme编程问题集上获得的平均分数比人类平均分数低3.9到5.8倍^[34].

显然, ChatGPT、Sora、Gemini、Claude和Grok-2等都是当今强大的AI产品. 利用互联网上的大量数据“理解”了人类产生的自然语言的微妙之处的AI, 正在以令人难以置信的速度改变世界. 作为不知疲倦的帮手, AI至少会从改变交通和城市生活、个人助手、助力科学和医疗研究等三个方面显著改善人类现有的世界. 然而, 依赖机器学习的AI面具之下的本质仍然是统计. 而且, 这些AI程序, 尽管应用广泛, 通常是由不了解其功能的用户使用, 存在严重缺陷. 例如, ChatGPT因其“幻觉”的倾向而受到批评, 在这种现象中, 人工智能程序以高度自信的方式给出了事实上不正确的答案^[17].

可以说, 当前的AI依赖于大型语言模型和大型训练数据集. 遗憾的是, 前者仍然是传统数学的产物, 例如ANN模型; 后者注定了如今的AI只能按受训数据回答问题, 任何的偏离, 都可能出现一系列错误. 这样的AI, 其实是一个聪明的木偶, 没有丁点智慧. 在将人类从机械性的事务中解放出来的同时, 人类也不得不面临许多安全风险问题^[35]. 张冠李戴式的弱智, 是当下AI最大的风险.

图灵测试为AI作为一门学科的诞生和快速发展提供了灵感. 也许可以公平地说, 没有任何争议达到图灵测试提出的问题的广度、范围或深度. 这些争论涵盖了关于意识、灵性、人类智能的作用和性质以及人类本质的深刻哲学问题^[36]. 从人工智能领域最初的目标“狭义人工智能”的“思维机器”, 到有意识地执行人类能够完成的任何任务的通用人工智能(Artificial General Intelligence, AGI)^[37], 它们都没有超越图灵测试时期人们关注的问题. 生物启发认知架构或许是构建AGI的理想计算框架^[38], 从而使其具有鲁棒性、灵活性和对环境的适应性. 似乎人类正处于一个对自然智能系统的可见性正在爆炸的时刻. 但迄今为止, 通用人工智能的可能性仍然是一种愿望、虚构的, 并被认为是人类社会的一种风险^[39].

传统数学模型支持的人工智能可以进行更复杂的推理, 更有效地利用因果关系, 但没有探

索新任务的好奇心,没有人类的道德美德和其他能力.因此,无论如何提升算力,无论模型多复杂,它都不会进化为“人类水平AI”的AGI.

的确,如果AGI在人类感兴趣的几乎所有的领域都大大超过了人类认知能力,则可能对人类的生存构成威胁^[40].对未来“设想世界”中的AGI无人作战飞行器系统,Salmon等识别出五大风险类别:性能不达标风险、目标不一致风险、超智能失控风险、过度控制风险、弱智能化风险^[41].他们建议制定控制措施来管理风险,包括对AGI开发人员的控制、AGI内部的控制以及更广泛的社会技术系统控制.

总体而言,具有超级智能的AGI仍然是一个“零假设”,超级智能的可能性和风险可以继续被忽视^[42].以人类目前的“数学”和“0-1”计算机,只能实现数字智能意义上的AGI,也可称为灵巧AI,人们须面对灾难性风险.这一情形类似于,如果人们只循着仿真大鸟扇动翅膀的思路研制出飞行器,而没有出现空气动力学,就不会有今天的飞机,飞行风险将会高很多.

为了避免超级智能对人类造成的灾难,Bostrom认为社会应该阻碍危险和有害技术的发展,但这几乎是无可救药的困难^[40].笔者认为,只有出现有安全意识的AI,才能有效避免灾难性风险的出现.安全意识是一种知觉,而通常所说的意识是一种状态.处于意识状态的人,才能感知安全或不安全.意识主要是指人们对外界和自身的觉察与关注程度.意识是大脑最神秘的现象之一,也是人工智能研究的终极目标.笔者将能够感知外部世界和自身的AI称为有意识的AI.

回顾AI发展的上述四个阶段,笔者冒昧地预言,AI的第五个阶段将是从小巧AI到有意识AI的尝试,聪明的木偶将成为智慧的助手.届时,有限的训练数据只扮演种子数的角色,智能数学模型将使AI具有维护人类安全的意识,更好地为人类服务,并将安全风险降至最低.

§4 智能数学

智能数学(Intelligent Mathematics, IM)是一个热门话题,但人们的视角各不相同,并没有聚集到超越传统数学的方向上来.有学者将具有格结构的模糊数学称为IM^[43];还有一本发表数学、计算机和机械技术、经济、人文和医学等领域文章的刊物取名《Intelligent Mathematics》^[44];也有作者称近似分析为IM,并在Springer出版专著《Intelligent Mathematics: Computational Analysis》^[45].这类IM,其实都是传统数学的一部分.本文论及的IM,不是这类IM.

人工智能(Artificial Intelligence, AI)的主要目标是使机器能够完成通常需要人类智能的复杂任务,它可能是最需IM的学科.然而,AI的研究,目前仍陷于用代数学和微积分建立的模型之中.只不过由于计算机科学的飞速发展,传统数学建立的大语言模型得以运行,大数据集训练AI得以实现.AI的能力似乎呈指数级增长,以至于人们误以为AI已经取得了突破.

把结构主义AI、功能主义AI、行为主义AI三大流派有机地统一起来形成的机制主义AI理论^[46],其实是一个以概率论、矩阵和数学映射为基础的,处理信息的理论体系,仍然属于机械式AI的范畴.力图为该AI理论提供支撑的泛逻辑学理论^[47],是将广义概率论视作智能信息处理的理论依据,扩充了现有处理不确定性的逻辑体系,并称之为柔性信息处理模式.

事实上,基于代数学和微积分的任何数学,都不是用来表述人类思维活动的工具,不是智能数学.这是因为,当昏迷后意识丧失时,思维活动就会停止,这意味着,人类思维活动的基础是意识,而并非任何意识都能在物质世界中找到原像.例如,婴儿出生就知道吃东西,此时他的脑海

中并无任何的概念, 驱动其活动的, 是求生的本能意识. 传统数学, 并不提供描述意识的工具, 也就无从谈及如何描述本能意识和后天意义支配下的思维活动. 据此, 本文给出智能数学的定义.

定义1 以描述意识为基础, 以人类思维活动为研究对象的数学, 称为智能数学.

意识, 通常被认为是一个心理学名词, 主要是指人们对外界和自身的觉察与关注程度. 哲学范畴的意识是指人的头脑对于客观物质世界的反映, 是感觉、思维等各种心理过程的总和. 临床医学中, 意识被具体化为人们对周围环境、自身状况、周围环境事物之间的关系以及自身与环境之间相互关系的觉察、理解与反应的能力. 在机制主义的人工智能理论中, 意识被认为是人们在一定的知识支持下和在目标牵引下对来自外部和内部的刺激信息所产生的觉察、理解和反应能力.

显然, 无论是考虑了生存欲等“原意识”的心理学意义上的“意识”, 还是用知识对信息进行“觉察”的AI关注的“意识”, 都无法在其基础上建立起智能数学. 心理学的“意识”中, 研究对象的原像仍在物质世界中. 例如, “群体欲”这一原意识, 其原像就是物质世界中的某种“集合”. 现在的AI关注的“意识”, 更是离不开物质世界, 因为其依托的“信息”是指客体所呈现的“状态及其变化方式”. 这里的“客体”, 是物质世界中的对象.

本文认为, 意识世界与物质世界, 是两个完全不同的世界, 也不存在数学意义上的同构关系. 意识世界能部分感知物质世界, 物质世界也能部分地感知意识世界, 但意识世界中的大多数对象, 在物质世界中并没有原像. 例如, 生存的本能意识, 并非是物质世界中某种生灭过程的像, 因为两者完全不在一个层次上.

在人类的思想交流中, 人们往往借助物质世界作为媒介, 通过比喻和列举等方式, 向他人表达自己的意识. 然而, 并非任何意识, 均能通过此媒介表达出来. 很多意识性的内容, 只可意会, 不可言传.

意识世界, 并非唯心主义的产物, 而是一种客观存在, 只不过不能完全用物质世界的观点来认识罢了. 意识, 是人类了解宇宙和自己的最后堡垒, 也是人类寻求突破遗传制约和优化自身物种的核心和希望所在. 显然, 无意识的机器, 不能觉醒意识的机器, 再高水平的智能, 也是一个自动化的机器. 意识, 作为非物质世界中的对象, 人类对其奥秘知之甚少. 当下, 任何试图给其下一个普适性定义的企图, 都是徒劳的.

在传统数学的版图中, 数字、算子和结构, 都是要素. 随着数学的发展, 数字升华为用字母代表的变量, 算子发展为复杂的数学物理模型, 实数空间结构拓扑到一般意义的集合上, 拓扑上还可建立超拓扑.

或许从“概念”、“知识”和“意识”这三个基元素出发, 能一步一步地生长出IM的版图.

4.1 “概念”的定义

“概念”是指对事物整体或者本质的感观、印象或看法, 其同义词包括“想法”、“思想”、“观念”和“印象”等, 而“观念”是指对事物的总体印象, 非常朦胧, 尤其指一些你认为不对的事情的概念. 对旧事物涉及的概念, 明确的数学概念等, 通常用“概念”; 对新事物涉及的概念, 一些朦朦胧胧才形成的概念, 则多用“观念”.

显然, 思维活动中的“概念”, 远比数理逻辑中的“概念”复杂, 并非都可以用内涵和外延来表达. 仅仅通过对内涵和外延施加约束是无法实现这一解决方案的. 从IM研究的需要出发, 本文给出“概念”的定义如下:

定义2 人类在认识过程中, 把所感知的事物的共同本质特点抽象出来, 加以概括, 从感性认识上升到理性认识, 所形成的一种表达, 称为概念.

例如, 商品、机械、人类、沟通、高、幸福、疫情和战争等等, 都是概念. 必须强调的是, 定义2不是一个普适性定义, 仅仅是为研究IM而提出.

4.2 “知识”的定义

“知识”是指对某类事物的大量感知, 形成对该类事物的认识, 其同义词包括“理解”、“领悟”、“把握”和“握住”等. “理解”侧重于知道或感知, 而“领悟”意味着抓住或捕捉到. 自然界和社会生活中存在的大量因果关系, 被认为是重要的知识.

在哲学中, 对知识的研究被称为认识论. 两千多年前, 希腊哲学家柏拉图将知识定义为“合理的真实信仰”. 三百年多前, 英国哲学家培根提出“知识就是力量”这个口号. 今天, 关于知识的定义, 仍是哲学家们持续辩论的问题. 柏拉图的知识三标准, 被认为条件不充分, 追加条件之一, 是要求知识“追踪真相”^[48].

在心理学中, 个体通过与环境相互作用后获得的信息被称之为知识. 心理学家们将知识分为陈述性知识和程序性知识. 前者是描述客观事物的特点及关系的知识, 并分三种不同水平: 符号表征、概念、命题; 后者是一套关于办事的操作步骤. 这类知识主要用来解决“做什么”和“如何做”的问题.

知识, 至今并没有一个统一而明确的界定, 但有一些基本的共识: 知而识之就叫知识. 换言之, 对事物知而识之所形成的认识, 均可称为知识. 据此, 本文给出“知识”的定义如下.

定义3 人类通过对某类事物的大量感知, 形成对该类事物具有指导意义的结构化的认识, 称为知识.

例如, “地球绕着太阳转”、“房地产泡沫不可能永远膨胀下去”和“6度及以上地震区的建筑须设防”等, 都是知识. 一些知识很简单, 例如“ $1+1=2$ ”; 一些知识则非常复杂, 例如“相对论”.

知识的类型非常多, 表示知识的方法也就很多. 仅在知识工程中就多达九种: 介谓词逻辑法、产生式法、框架法、脚本法、嵌入式法、过程法、语义网法、Petri网法、面向对象法等. 如今还流行利用图形模型表示事物之间的关系和属性的知识图谱法.

4.3 “意识”的定义

正如上一节所述, 人类对“意识”的奥秘知之甚少, 很难给其下一个普适性定义. 然而, 数学的严密性又要求界定研究对象, 从IM研究的需要出发, 本文给出意识的定义如下.

定义4 人脑中由本能、经验和知识形成的, 据以对自身行为进行控制的依据, 称为意识.

例如, 人们对风险现象的理解并进行风险治理的依据, 称为风险意识. 意识有本能意识和后天意识之分.

任何不依赖于经验的行为, 都称为本能. 刚刚在海滩上孵化的海龟具有自动移向海洋的本能. 本能行为也称为先天行为. 人脑中由本能形成的, 据以对自身行为进行控制的依据, 称为本能意识, 也称先天意识. 本能行为不一定受大脑控制. 本能并不等于本能意识. 只有觉醒后, 才有意识. 例如, 婴儿饿了, 会哭闹, 说明生存本能意识觉醒了. 如果婴儿出生时就有某种脑功能障碍, 其求生的本能仍在, 但“饿了就哭闹”的本能意识可能觉醒不了.

人脑中由经验和知识形成的, 据以对自身行为进行控制的依据, 称为后天意识. 没吃早餐的考生在考场饿了, 经验性的意识使之暂时不进食; 面对滋味鲜美的河豚, 毒性知识形成的意识, 迫使食客动筷前三思.

仅就个体的经验意识而言, 其内容不断地变化, 非常复杂. 为了概括来自外界或内部无意识中的某些信息、情感、欲望以连续运动的方式进、出意识的过程, 人们创造出“意识流”这个词, 代表一系列瞬间的意识“现在”时刻^[49]. 在谐和客观复原(Orchestrated Objective Reduction)理论中, 不同的意识状态(例如: 正常、改变、做梦、麻醉等)可以通过具有不同物理量(例如不同频率等)的意识流来表达^[50].

人脑“做梦”被认为是意识流的流动过程. 根据意识流内容的不同, 意识流被分为信息意识流、情绪意识流、欲望意识流, 而根据意识流的来源和形式的不同, 又把意识流分为内吸流、内闯流、外吸流、外闯流. 值得注意的是, 物质世界中的流体, 显然不是意识流的原像. 流体力学模型, 无法描述意识流.

潜意识对心理活动有着微妙的影响, 这也是最难掌握的部分^[51]. 在日常生活中, 人们被一系列令人困惑的信号所包围, 这些信号的一部分是由潜意识感知和处理的^[52]. 不同于弗洛伊德意义上的“无意识”, 潜意识是指存在于个体头脑中但没有被个体意识到的意识. 潜意识思维的结果可能会在大脑过渡到与其专注于这一思维主题相对应的状态时被检测到^[53]. 而自我动机可能是潜意识的核心^[54]. 情绪功能可能是潜意识的一部分. 因此, “潜意识”始终能够对不断收到的大量信息进行分类, 就像一种“活的自动驾驶仪”. 这些潜意识行为足以确保人类的生存^[55].

在现实生活与科学探索中, 人们通过观察和思维来对社会乃至自然界未知世界进行认知, 意识流在思维活动中发挥着举足轻重作用. 不经过大脑思考的本能意识和后天生成的意识, 都是意识流的组成部分. 意识流中的成分与观察得到的信息, 左右着思维活动的结果.

在目前的AI研究中, 人们能训练一个复杂的数字神经网络, 实现在不熟悉和黑暗的环境中导航, 已经是很高的“智能”水平了, 但与意识流支撑下的创造性思维相比, 完全不在一个层次上. 在意识流中, 本能意识是生命的看护者, 后天意识中有创造性思维动因.

知识是后天意识生长的土壤, 人脑觉醒的意识是种子. 没有种子, 土壤中长不出后天意识. 存储了天量知识的机器, 没有意识的种子, 出现不了后天意识, 不能进行创造性思维.

从表面上看, 创造性思维似乎是一种跳出思维定势的技能^[56]. 事实上, 创造性思维是创造力在完成一系列创造性任务时的表现, 而创造力是推动创新和进步的动力. 托兰斯创造性思维测试(Torrance Tests of Creative Thinking, TTCT)在教育研究和实践中使用最多, 包括天才识别^[57]. TTCT和其他大量的研究, 主要涉及最低级和中层的创造性思维^[58], 甚至于爬楼梯等短期体育活动都能增强这种创造性思维的能力^[59]. 最高层次的创造性思维涉及个人特质, 甚至基因. 爱因斯坦以最高层次的创造性思维证明了空间和时间不是绝对的, 而是相对的, 质量也可以转化为能量. 对于那些天生渴望知识的人来说, 创造性思维的种子往往会给他们更高的创造潜力^[60]. 从根本上说, 科学研究是创造力的延伸^[56].

§5 粒态智能数学

以描述意识为基础, 以人类思维活动为研究对象的智能数学(Intelligent Mathematics, IM), 涉及从概念生成到思想交流全过程的数学描述问题. 建立这样的一个完全不同于传统数学的数学体系, 是一项艰巨的任务. 本文提出粒态智能数学, 尝试走出第一步.

在前述人工智能(Artificial Intelligence, AI)发展的第二个阶段中,粒计算^[30]涉及的粒,是给定论域上的一个集合.笔者认为,任何一个个体的“概念”、“知识”和“意识”,均可称为一个粒.不需要某种集合来描述的粒,更为普遍.

定义5 “概念”、“知识”和“意识”,称为思维活动中的粒.

例如,“大多数瑞典人都很高”是一个关于瑞典人知识的模糊信息粒,可用一个身高论域上的模糊集来定义.又例如“中国高铁”、“俄乌冲突”等是“概念”类的粒,没有必要用集合来定义.此外,“经济环境在好转”、“群体欲”、“暴雨即将来临”等,是“意识”类的粒,不可能用集合来定义.也就是说,粒,既包括集合上定义的粒,但不受集合论约束的粒更多.

在人脑的思维过程中,“概念”、“知识”和“意识”等各种各样的粒在流动,他们并不需要集合以及映射等来支撑,更没有拓扑空间等数学结构的含意.否则,很难解释盲人的世界中也有智慧,更无法解释没有数学之前的古人如何决策.今天,人们用数学大模型,效率极低地模拟一丁点人类的智能,还全拜托计算机强大的计算能力.如果一个数被视为零维空间中的一个点,那么在绝大多数情况下,思维活动中的粒应该是1、2、3或 n 维空间中的线、面、体及立方体.人类的智慧,更多地是在线、面、体上展开,并非一定要降维到点上才能说得清楚.“树高百米必有根,江流万里必有源”这类的知识,不需降维到像素来解释.数字时代向粒子时代的发展,是必然趋势.如果将函数和集合视为粒,则泛函分析^[61]和随机集理论^[62],都是研究粒空间上的数学结构.模糊粒计算,比它们简单多了.本文定义的“粒”,直接挣脱了以往的所有束缚,希望在智能数学中发挥关键作用.

粒是思维的基本元素,但必须动起来,才能形成意识流.例如,一位传染病专家对新冠肺炎(Corona Virus Disease, COVID-19)感染率的判断是一个粒.这个粒通常是“知识”或“意识”中的一类,也可能是一个综合体.然而,只有这位专家考虑了COVID-19感染率随各种环境的变化,他才能形成与此粒有关的后续意识流.笔者将粒可能变化的态势,称为粒的态.

定义6 一个粒可能变化的某种态势,称为该粒的一个态.

例如,“瑞典人平均身高已基本固定”是知识类模糊信息粒“大多数瑞典人都很高”的一个态.又例如,“中国高铁正在走出国门”是概念类粒“中国高铁”的一个态,而“三公里外正在下雨”是意识类粒“暴雨即将来临”的一个态.地震地质专家对一条断裂活动程度的评定^[63],是该断裂的一个态.也就是说,态是粒的一个附加动态属性,助推粒进入思维轮机.

显然,同时捕捉粒和态,是人类快速分析环境,适应环境,进而改进环境的智力能力.

观察或思考的角度不同,态势的描述可能会大相径庭.例如,在分析传染病死亡风险时,对感染率的判断是一个粒,而感染率的可能变化是一个态.从医疗资源的角度来看,感染率变化可能不大;但从交通要道上人员流动很快的角度观察或思考,感染率变化可能会很大;从综合所有影响因素的角度进行描述会导致另一个态.观察或思考的视角被称为态的底板.在同一底板上对粒进行态势描述,有利于思想沟通.

定义7 观察或思考态的角度,称为态的底板.

例如,态“瑞典人平均身高已基本固定”的底板是“宏观角度”,“中国高铁正在走出国门”的底板是“大规模施工”,而“三公里外正在下雨”的底板则是“目测距离”.有时,需明示态的底板,以避免混淆.大多数情况下,底板是某种不言自明共识意义上的,不必加以说明.例如,“城市扩张”之态,须说明态的底板是土地,还是其它.而“收入增加”之态,不言自明的底板是钱.

在意识流中, 粒和态都不一定被量化. 形式上, 将粒和态分别记为 g 和 s . 由它们组成的证据, 记为

$$e = g + s@. \quad (1)$$

式中, 符号“+”不是加法, 而是指 s 附属于 g . 在电子邮箱地址中, 符号“@”起到了分隔用户名和邮件服务器域名的作用, 同时也指定了接收邮件的服务器. 在表达式(1)中, 符号“@”表示态 s 具有动态性和信息可通信性.

如果说虚数 i 的引入, 使得人们建立了复分析理论和方法, 大大拓展了数学分析能力, 那么态 s 的引入可以帮助人们建立一种称为粒态智能数学(Granule-State Intelligent Mathematics, GSIM)的智能数学.

正如实分析中的所有运算和模型, 均是复分析中的运算和模型一样, 作为GSIM的一部分, 传统数学中的所有运算和模型, 均是GSIM中运算和模型. 例如, 数字的加减乘除四则运算是GSIM中的运算; 用词语代替数进行计算及推理, 实现对复杂信息系统的模糊推理和控制的词计算模型^[64], 是GSIM中的一种模型.

5.1 粒的性质

令

$$\Omega = \{\alpha, \beta, \delta\}. \quad (2)$$

式中

$$\begin{cases} \alpha \triangleq \text{“概念”}, \\ \beta \triangleq \text{“知识”}, \\ \delta \triangleq \text{“意识”}. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\triangleq$ 是定义符号.

$\forall \lambda \in \Omega$, 如果粒 g 是关于 λ 的, 称 g 是 λ 类粒, 记为 g_λ . 例如, $h \triangleq$ “中国高铁”, 而 h 是 α 类粒, 记为 h_α . 显然, 一个杯子的一张照片和一袋大米的一次称重, 同为 α 类粒; “杯子可用于喝水”和“南方人习惯吃大米”, 同为 β 类粒; “群体欲”和“暴雨即将来临”, 同为 δ 类粒.

一切由粒描述的东西均称为对象. 例如, 物理世界中的实物、过程、机理、架构、宇宙, 数学中的数、集合、复分析、深度学习模型, 以及经济学中的GDP(国内生产总值)、CPI(居民消费价格指数)、汇率等等, 都是对象. COVID-19, “战争”, “上帝”也是对象. 事实上, 他们都是人类思考的对象.

定义8 粒的表现形式, 称为粒的形.

例如, “中国高铁”、“大多数瑞典人都很高”和“群体欲”的形都是文字. 而一个杯子的照片, 其形是照片. 感染率的形是数字. 粒“三公里外正在下雨”的形是距离和雨量. 思维中数不胜数的粒, 既有具体的形, 也有抽象的形. 液态、固态和气态都是常见的形, 凭空想像出来的对象也有形. 既有低维的形, 也有高维的形, 还有混混沌沌的形.

数, 比较单纯, 早已在生产实践中形成了加法、减法、乘法和除法四则运算, 并在十八世纪发展出了微分和积分运算. 集合, 就比较复杂, 但无论是并和交等集合层次的运算, 还是拓扑空间中的各种运算, 其运算能力都没有突破, 因为它们大多是借用数运算的功能(例如, 流形的可微), 甚至仅仅是借用名称(例如, 群论中的加群和商群). 也就是说, 虽然传统数学中的所有运算和模型, 均是GSIM中运算和模型, 但在GSIM中能用的基本运算, 只有四则运算和微积分.

GSIM中的基本运算, 至少还应该增加平均、裂化、互动、堆砌和融合等.

- a) **平均**: 生成与数类似的平均意义上的一个新粒态. 当笔者说两个数的和时, 指的是将这两个数通过加法运算得到的总数. 这个总数除以2, 就是两个数的平均. 加法和除法, 构成了平均运算. 可以通过将所有复数的实部和虚部分别相加后, 分别除以复数的数量来计算多个复数的平均. 由于粒的类、对象和形不同, 态的底板不同, 不可能有统一的粒态平均运算. 下一子节, 笔者提出了一个针对模糊粒态的平均运算.

对于全新的粒态智能数学而言, 人们司空见惯的“平均”, 尚未形成统一的运算, 下述的基本运算, 便只能停留在概念化描述. 随着粒态智能数学研究的深入, 终将会出现数学形式化表达.

- b) **裂化**: 一个粒态裂化生成两个粒态. 最简单的裂化: $e = g + s@$ 裂化生成 $e_1 = g, e_2 = s@$.
- c) **互动**: 粒态互动产生新粒态, 例如, 过马路时的人和车互动. 汽车刚出现在马路上时, 行人粒态和汽车粒态反反复复的互动, “运算”出来了最初的交通警察和交通规则.
- d) **堆砌**: 按一定规则将粒态组织起来. 例如, 将大量粒态按其性质存放入到粒态库中.
- e) **融合**: 运行多个粒态, 产生推理结果.

5.2 模糊粒态的“平均”运算

定义9 粒和态均以模糊集表达的粒态, 称为模糊粒态.

例如, 传染病专家以患者百分比给出的感染率判断式(4)是一个模糊粒. 专家根据经验给出的感染率变化趋势判断式(5)是一个模糊态.

$$g = \left\{ \frac{0.1}{0\%}, \frac{1}{10\%}, \frac{0}{20\%}, \frac{0}{30\%}, \frac{0}{40\%}, \frac{0}{50\%}, \frac{0}{60\%}, \frac{0}{70\%}, \frac{0}{80\%}, \frac{0}{90\%}, \frac{0}{100\%} \right\}. \quad (4)$$

$$s = \left\{ \frac{0}{\text{大减}}, \frac{0.2}{\text{略减}}, \frac{0.5}{\text{稳定}}, \frac{0.6}{\text{略增}}, \frac{1}{\text{大增}} \right\}. \quad (5)$$

设式(6)和式(7)中的集合 U 和 V 分别是模糊粒 g 和模糊态 s 的论域,

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \quad (6)$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad (7)$$

则模糊粒 g 和模糊态 s , 分别以(8)和式(9)的模糊集来表达,

$$A_g = (\mu_g(u_1), \mu_g(u_2), \dots, \mu_g(u_n)), \quad (8)$$

$$B_s = (\mu_s(v_1), \mu_s(v_2), \dots, \mu_s(v_m)). \quad (9)$$

式中 $\mu_g(u_i)$ 和 $\mu_s(v_j)$ 分别是元素 u_i 属于模糊集 A_g 和元素 v_j 属于模糊集 B_s 的隶属程度. 设

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_q\} \quad (10)$$

是 q 个模糊粒态的集合, $f_k = g_k + s_k@, k = 1, 2, \dots, q$.

$\forall u \in U, v \in V$, 令

$$\pi_g(u) = \sum_{1 \leq k \leq q} \mu_{g_k}(u). \quad (11)$$

$$\pi_s(v) = \sum_{1 \leq k \leq q} \mu_{s_k}(v). \quad (12)$$

称

$$\Pi_F = \begin{cases} (\pi_g(u_1), \pi_g(u_2), \dots, \pi_g(u_n)), \\ (\pi_s(v_1), \pi_s(v_2), \dots, \pi_s(v_m)) \end{cases} \quad (13)$$

是 F 中粒态的和. 则 F 的平均粒和平均态分别由式(14)和(15), 以 q 除之给出.

$$\bar{A}_g = (\frac{\pi_g(u_1)}{q}, \frac{\pi_g(u_2)}{q}, \dots, \frac{\pi_g(u_n)}{q}), \quad (14)$$

$$\bar{B}_s = (\frac{\pi_s(v_1)}{q}, \frac{\pi_s(v_2)}{q}, \dots, \frac{\pi_s(v_m)}{q}). \quad (15)$$

本文根据粒和态的表达形式, 对粒态进行命名. 当粒和态都是用Zadeh提出的模糊集^[11]表达时, 称为模糊粒态. 同理, 粒和态都用复数表达时, 可称其为复粒态. 这类粒态, 终归是用传统数学表达, 应该不是粒态智能数学中的主流粒态. 或者说, 粒态智能数学不可能完全建立在传统数学之上.

§6 借鉴式粒态扩散模型

人类智慧远胜于机械式人工智能的关键, 不是记忆力, 不是速度, 更不是耐力, 而是可由蛛丝马迹举一反三的推理能力. 这种能力, 就是对意识流中的粒态, 进行某种联想和扩散处理. 本节提出一种相互借鉴式粒态扩散模型, 以图部分实现这种能力. 与传统信息扩散技术^[65]最大的不同是, 这种扩散不是通过扩散函数进行的, 理论上可以对任何类型的粒态进行. 设

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\} \quad (16)$$

是 q 个粒态集合, $e_k = g_k + s_k @$, $k = 1, 2, \dots, q$, 且不同的粒之间可以进行相像性比较, 不同的态之间亦然. 式(16)中的 E 与式(10)中的 F 有所不同. F 中 g 和 s 分别是模糊粒和模糊态, 而 E 中 g 和 s 并不限于模糊粒和模糊态, 是一般性的粒和态.

以 φ_g 和 φ_s 分别记粒比较和态比较的某种方式. 为部分弥补信息缺口的传统信息扩散技术, 将观测值在周围扩散, 这就要求观测值有一个值域. 一般性的粒和态脱离了传统数学的约束后, 就没有了值域的概念. 只有当粒态为传统数学中的对象后, 才能定义距离, 才能使用传统信息扩散技术. 对于一般的粒态集合 E , 我们用 $\varphi(e_k, e_j)$ 表示 e_k 和 e_j 的相像性. φ 值越大, 表示越相像.

对任何一种粒态, 人脑中都有比较的方式, 而且大多数不是数学公式. 例如, 比较两位美女, 普通人不会用数学方式去测量她们的相近程度, 而且, 多数情况下与个人的偏好有关, 甚至比较方式随环境而变. 意识流中的“举一反三”, 通常是在一个人的大脑中封闭进行的, 但也常听取别人建议, 调整粒态. 可以将这种模式系统化, 提出通过相互借鉴实现“举一反三”的粒态扩散模型.

不失一般性, 假定可相互借鉴的粒态数 $q > 4$, 并假定

$$\varphi_g(g_1, g_2), \varphi_g(g_1, g_3), \varphi_g(g_1, g_4) \geq \varphi_g(g_1, g_k), k > 4. \quad (17)$$

换言之, 笔者假定粒 g_2, g_3 和 g_4 比其它粒都更相像粒 g_1 时, s_1 可借鉴 s_2, s_3, s_4 进行调整, 或者说, s_2, s_3, s_4 的信息, 扩散给了 s_1 . 于是, s_1, s_2, s_3, s_4 的平均, 就是 g_1 对应的, 调整后的态.

需特别说明的是, 为书写方便, 此处笔者假定了 g_2, g_3, g_4 与 g_1 最靠近, 其它情况也是同理, 只不过下标写法稍复杂一些.

上述由粒之间相像性, 对态进行“举一反三”扩散的方式, 也可用于对粒的扩散. 不失一般性, 假定

$$\varphi_s(s_1, s_{k_1}), \varphi_s(s_1, s_{k_2}), \varphi_s(s_1, s_{k_3}) > \varphi_s(s_1, s_k), k \neq k_1, k_2, k_3. \quad (18)$$

则借鉴态的相像性, “举一” g_1 , “反三” $g_{k_1}, g_{k_2}, g_{k_3}$. 它们的平均, 就是 s_1 对应的, 调整后的粒.

当 E 是模糊粒态的集合时, 用格贴近度^[66]作为相像性, 记为 L .

定义10 设 A, B 是 U 上的两个模糊集, 记

$$A \circ B = \bigvee_{u \in U} (A(u) \wedge B(u)), \quad (19)$$

$$A \odot B = \bigwedge_{u \in U} (A(u) \vee B(u)). \quad (20)$$

分别叫做 A 与 B 的内积与外积. 这里 $\vee, \wedge$ 分别表示取最大值和取最小值.

$$L(A, B) = \frac{1}{2} [A \circ B + (1 - A \odot B)] \quad (21)$$

叫做 A 与 B 的格贴近度. 例如设

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\} = \{\text{猫}, \text{狗}, \text{兔}, \text{羊}, \text{狼}, \text{狐}\},$$

$$A = (\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), \dots, \mu_A(u_6)) = (0.2, 1, 0.3, 0.1, 0.8, 0.6),$$

$$B = (\mu_B(u_1), \mu_B(u_2), \dots, \mu_B(u_6)) = (0.1, 0.8, 0.2, 0.3, 0.9, 0.5),$$

则

$$\begin{aligned} A \circ B &= (0.2 \wedge 0.1) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.1 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.9) \vee (0.6 \wedge 0.5) = \\ &0.1 \vee 0.8 \vee 0.2 \vee 0.1 \vee 0.8 \vee 0.5 = 0.8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \odot B &= (0.2 \vee 0.1) \wedge (1 \vee 0.8) \wedge (0.3 \vee 0.2) \wedge (0.1 \vee 0.3) \wedge (0.8 \vee 0.9) \wedge (0.6 \vee 0.5) = \\ &0.2 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 0.3 \wedge 0.9 \wedge 0.6 = 0.2, \end{aligned}$$

$$L(A, B) = \frac{A \circ B + (1 - A \odot B)}{2} = \frac{0.8 + (1 - 0.2)}{2} = 0.8.$$

即 A 与 B 的贴近度是0.8. L 的数值越大, 说明两者越相像. 特别需要注意的是, 当一个模糊集中的最大隶属度值小于1时, 该模糊集自身的贴近度也必小于1. 由于本文的借鉴式粒态扩散, 只须比较相对的相像性即可, 所以选择了直观而又方便计算的格贴近度.

§7 结语与讨论

由蛛丝马迹举一反三, 是人类应对未知世界的本能智慧. 人工智能无疑将在认识未知世界中发挥重要作用, 但当前建立在传统数学上的机械式人工智能, 只能分析人们习以为常的世界, 分析不了未知世界, 因为人们没有关于未知世界的足够证据, 所以不存在相应的大数据供人工智能学习. 发展有意识的人工智能, 才能帮助人们更好地认识未知世界, 这就必须突破传统数学的约束, 建立以智能数学为依托的人工智能.

意识流中流动的“概念”、“知识”和“意识”是思维活动中的粒. 一个粒可能变化的某种态势, 称为该粒的一个态. 以粒和态为基本元素形成的智能数学称为粒态智能数学. 以数字和空间为基本元素, 用来描述物理世界的传统数学, 是粒态智能数学的一个特例. 传统数学中的所有运算和模型, 均是粒态智能数学中的运算和模型. 除此以外, 粒态智能数学中的基本运算, 至少还应该增加平均、裂化、互动、堆砌和融合等.

在意识流中, 粒和态都不一定被量化. 人们脑海里隐约出现的粒, 多数没有必要量化, 少数不可能量化. 例如, “幽灵”就不可能量化. 幽灵是指在现实世界和精神世界中约隐约现, 难以捉摸, 解释不清楚的东西. 例如, 人们脑海里出现的幻影就是典型的“幽灵”.

粒态智能数学中的粒态相互借鉴, 可以实现“举一反三”的粒态扩散. 相比传统数学中信息扩散技术, 具有更大的灵活性, 体现了人类思维活动中的联想和扩散多样性.

根据信息扩散原理, 一定存在合适的扩散方式, 使粒态扩散后, 可以帮助人们在信息不完备

时,也能较好地认识未知世界.对于模糊粒态来说,借助计算仿真实验,是找到较好扩散方式的途径之一.对于不可量化的粒态来说,扩散方式的研究,更具挑战性.

本文仅仅是推开了发展智能数学的一条门缝.但愿人们能走出“用传统数学的零件,组装出智能数学来”的空想,正视未知世界需要人类智慧才能解决的问题,推进机械式人工智能向有意识人工智能的发展,解决一些传统数学方法解决不了的问题.

本文作者用粒态智能数学再次分析了2020年3月新冠肺炎(COVID-19)爆发之初一个案例^[67],推断出未来30天内,案例城市中因COVID-19死亡的人数,将远远多于179830人,而不仅仅是只多到189170^[68].

我国在人工智能领域有庞大的科研队伍,由国家自然科学基金项目资助的基础研究已有10个二级代码^[69],完全有可能在跟踪美国的人工智能发展之外,率先突破传统数学的束缚,在智能数学方面有所建树,为有意识的人工智能在中国的出现创造条件.

参考文献:

- [1] Bringsjord S, Govindarajulu N S. Given the web, what is intelligence, really?[J]. *Metaphilosophy*, 2012, 43(4): 464-479.
- [2] 黄崇福. 地震风险感知的智能数学描述方式[J]. *风险分析与危机反应*, 2018, 8(3): 163-176.
- [3] Huang Chongfu. Principle of information diffusion[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 91(1): 69-90.
- [4] Zhang Huili, Qin Lijuan. An ancient Chinese mathematical algorithm and its application to nonlinear oscillators[J]. *Computers and Mathematics with Applications* 2011, 61(8): 2071-2075.
- [5] Sialaros M. New history of Greek mathematics[J]. *Historia Mathematica*, 2023, 65: 30-32.
- [6] Burrioni T, Thangavel K, Servidia P, et al. Distributed satellite system autonomous orbital control with recursive filtering[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2024, 145: 108859.
- [7] Bardozzo F, Terlizzi A, Simoncini C, et al. Elegans-AI: how the connectome of a living organism could model artificial neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2024, 584: 127598.
- [8] Huang Chongfu, Moraga C. A diffusion-neural-network for learning from small samples[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2004, 35(2): 137-161.
- [9] Zund J D. Some comments on Riemann's contributions to differential geometry[J]. *Historia Mathematica*, 1983, 10(1): 84-89.
- [10] Bradley D. Nobel Prizes 2016[J]. *Materials Today*, 2016, 19(10): 553.
- [11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [12] Khaliq R, Iqbal P, Bhat S A, et al. A fuzzy mathematical model for tumor growth pattern using generalized Hukuhara derivative and its numerical analysis[J]. *Applied Soft Computing*, 2022, 118: 108467.
- [13] Han Henry, Li Wentian, Wang Jiacun, et al. Enhance explainability of manifold learning[J]. *Neurocomputing*, 2022, 500: 877-895.
- [14] Remmert V R. Galileo, God and Mathematics[C]. Koetsier T, Bergmans L, Ed., *Mathematics and the Divine*, Elsevier Science, 2005, 347-360.
- [15] Marx H F. Unlocking the secrets of the first airplane to fly: the Wright flyer project story[J]. *Technology in Society*, 2001, 23(1): 1-9.
- [16] Chang A C. History of Artificial Intelligence[M]. Chang A C, Ed., *Intelligence-Based Medicine*, New York: Academic Press, 2020, 23-27.
- [17] Grzybowski A, Pawlikowska-Lagód K, Lambert W C. A history of artificial intelligence[J]. *Clinics in Dermatology*, 2024, 42(3): 221-229.

- [18] Russell S J, Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach (4th ed.)[M]. Pearson: Hoboken, 2021.
- [19] Morris F L, Jones C B. An early program proof by Alan Turing[J]. Annals of the History of Computing, 2008, 6(2): 139-143.
- [20] French R M. The Turing test: the first 50 years[J]. Trends in Cognitive Sciences, 2000, 4(3): 115-122.
- [21] Wang Peizhuang, Guo Guirong, Shi Yong, et al. Editorial: to honor our mentor and friend, professor L. A. Zadeh[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2017, 16(6): 1447-1449.
- [22] Zadeh L A. Fuzzy logic—a personal perspective[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 281: 4-20.
- [23] Daniel M, Hájek P, Nguyen P H. CADIAG-2 and MYCIN-like systems[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 1997, 9(3): 241-259.
- [24] Peek N, Combi C, Marin R, et al. Thirty years of artificial intelligence in medicine (AIME) conferences: a review of research themes[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2015, 65(1): 61-73.
- [25] Zadeh L A. A rationale for fuzzy control[J]. Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems, 1972, 94: 3-4.
- [26] Zadeh L A. Soft computing and fuzzy logic[J]. IEEE Software, 1994, 11(6): 48-56.
- [27] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1982, 79(8): 2554-2558.
- [28] McCulloch W S, Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity[J]. Bulletin of mathematical biology, 1943, 5(4): 115-133.
- [29] Zadeh L A. Fuzzy sets and information granularity[C]. Gupta M M, Ragade R K, Yager R R, Ed., Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland, 1979, pp. 3-8.
- [30] Zadeh L A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(2): 111-127.
- [31] Nisbet R, Miner G, Yale K. IBM Watson[C]. Nisbet R, Miner G, Yale K, Ed., Handbook of Statistical Analysis and Data Mining Applications (Second Edition), New York: Academic Press, 2018, p773-781.
- [32] Haleem A, Javaid M, Singh R P. An era of ChatGPT as a significant futuristic support tool: a study on features, abilities, and challenges[J]. BenchCouncil Transactions on Benchmarks, Standards and Evaluations, 2022, 2(4): 100089.
- [33] Kmiecik M. ChatGPT in third-party logistics-the game-changer or a step into the unknown?[J]. Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity, 2023, 9(4): 100174.
- [34] Koubaa A, Qureshi B, Ammar A, et al. Humans are still better than ChatGPT: case of the IEEEExtreme competition[J]. Heliyon, 2023, 9(11): e21624.
- [35] Anderljung M, Barnhart J, Korinek A, et al. Frontier AI Regulation: Managing Emerging Risks to Public Safety[DB/OL]. July, 2023, <https://arxiv.org/pdf/2307.03718>, Accessed July 2, 2024.
- [36] Korukonda A R. Taking stock of Turing test: a review, analysis, and appraisal of issues surrounding thinking machines[J]. International Journal of Human-Computer Studies. 2003, 58(2): 240-257.
- [37] Kumpulainen S, Terziyan V. Artificial general intelligence vs. industry 4.0: do they need each other?[J]. Procedia Computer Science, 2022, 200: 140-150.
- [38] Boris B, Slavin B B. An architectural approach to modeling artificial general intelligence[J]. Heliyon, 2023, 9(3): e14443.

- [39] Triguero I, Molina D, Poyatos J, et al. General purpose artificial intelligence systems (GPAIS): properties, definition, taxonomy, societal implications and responsible governance[J]. *Information Fusion*, 2024, 103: 102135.
- [40] Bostrom N. *Superintelligence: Paths, Dangers, Strategies*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2014.
- [41] Salmon P M, McLean S, Carden T, et al. When tomorrow comes: a prospective risk assessment of a future artificial general intelligence-based uncrewed combat aerial vehicle system[J]. *Applied Ergonomics*, 2024, 117: 104245.
- [42] Brundage M. Taking superintelligence seriously: Superintelligence: Paths, dangers, strategies by Nick Bostrom (Oxford University Press, 2014)[J]. *Futures*, 2015, 72: 32-35.
- [43] 刘忠, 史光亚, 刘云丰. 智能数学在有机化学中的应用[J]. *计算机与应用化学*, 1988(4): 241-249.
- [44] *Intelligent Mathematics*[OL]. Linköping, Sweden, <http://int-math.com>. Accessed July 2, 2024.
- [45] Anastassiou G A. *Intelligent Mathematics: Computational Analysis*[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [46] 钟义信. 机制主义人工智能理论——一种通用的人工智能理论[J]. *智能系统学报*, 2018, 13(1): 2-18.
- [47] 何华灿. 泛逻辑学理论-机制主义人工智能理论的逻辑基础[J]. *智能系统学报*, 2018, 13(1): 19-36.
- [48] Nozick R. *Philosophical Explanations*[M]. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1981.
- [49] Tonello L, Cocchi M, Gabrielli F, et al. Stream of consciousness: quantum and biochemical assumptions regarding psychopathology[J]. *Medical Hypotheses*, 2017, 101: 78-84.
- [50] Hameroff S, Penrose R. Conscious events as orchestrated space-time selections[J]. *NeuroQuantology*, 2003, 1(1): 1-35.
- [51] Liu Qing. Graphic creative design based on subconsciousness theory[J]. *NeuroQuantology*, 2018, 16(6): 471-477.
- [52] Hoshiyama M, Kakigi R, Watanabe S, et al. Brain responses for the subconscious recognition of faces[J]. *Neuroscience Research*, 2003, 46(4): 435-442.
- [53] Temkin A Y. Consciousness, subconsciousness, theory of states of mind and its applications[J]. *NeuroQuantology*, 2011, 9(4): 669-680.
- [54] Higueta D F T. *Analyzing Subconsciousness for Symphonic Orchestra*[D]. Tempe: Arizona State University, 2022.
- [55] Agid Y. Subconsciousness, emotional disorders, and basal ganglia[J]. *Revue Neurologique*. 2017, 173(3): 101-102.
- [56] Lantsoght E O L. *The A-Z of the PhD Trajectory: A Practical Guide for a Successful Journey*[M]. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
- [57] Acar S, Lee L E, Scherer R. A reliability generalization of the Torrance Tests of creative thinking-figural[J]. *European Journal of Psychological Assessment*, Advance online publication, 2024.
- [58] Jalongo M R, Saracho O N. *Writing for Publication: Transitions and Tools That Support Scholars' Success*[M]. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
- [59] Kawashima C, Chen C, Hagiwara K, et al. Evaluating the impact of a short bout of stair-climbing on creative thinking in a between-subjects pretest posttest comparison study[J]. *Scientific Reports*. 2024, 14(1): 176.
- [60] Raffaelli Q, Malusa R, de Stefano N A, et al. Creative minds at rest: creative individuals are more associative and engaged with their idle thoughts[J]. *Creativity Research Journal*, 2024, 36(3): 396-412.

- [61] Collatz L. Functional Analysis and Numerical Mathematics[M]. New York: Academic Press, 1966.
- [62] Inoue H, Taylor R L. Laws of large numbers for exchangeable random sets in Kuratowski-Mosco sense[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2006, 24(2): 263-275.
- [63] 黄崇福, 汪培庄. 利用专家经验对活动断裂量化的模糊数学模型[J]. 高校应用数学学报, 1992, 7(4): 525-530.
- [64] Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(2): 103-111.
- [65] Huang Chongfu. Information diffusion techniques and small sample problem[J]. International Journal of Information Technology and Decision Making, 2002, 1(2): 229-249.
- [66] 汪培庄. 模糊数学简介(1)[J]. 数学的实践与认识, 1980(2): 45-59.
- [67] Huang Chongfu. Analysis of death risk of COVID-19 under incomplete information[J]. Journal of Risk Analysis and Crisis Response, 2020, 10(2): 43-53.
- [68] Huang Chongfu, Huang Yundong. Granule-state intelligent mathematics for analyzing unseen risks[J]. Journal of Risk Analysis and Crisis Response, 2024, 14(4): 423-452.
- [69] 谢国, 王乐, 宋和平, 等. 2023年度人工智能领域国家自然科学基金项目申请与资助情况综述[J]. 模式识别与人工智能, 2024, 37(2): 95-105.

Preliminary exploration of granule-state intelligent mathematics

HUANG Chong-Fu¹, HUANG Yun-dong²

(1. Academy of Disaster Risk Sciences, Faculty of Geographical Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. The Bill Munday School of Business, St. Edward's University, Austin, Texas 78704, USA)

Abstract: Since 2023, artificial intelligence (AI) based on deep learning algorithms has entered the commercial application stage and is rapidly changing the world. However, looking at AI underlying models such as artificial neural networks, it is not difficult to find that existing AI is supported by traditional mathematics (TM) and is mechanical AI, because numbers and space are fundamental elements in TM, used to describe the physical world rather than human intelligence. This paper for the first time proposes the granule-state intelligent mathematics (GSIM) based on granules and states as basic elements. “Concept”, “Knowledge”, and “Consciousness” are referred to as granules in thinking activities. A certain situation in which a granule may change is called a state of that granule. The traditional mathematics is a special case of GSIM. All operations and models in traditional mathematics are operations and models in GSIM. In addition, the basic operations in GSIM should at least include averaging, cracking, interaction, stacking, and fusion. Taking fuzzy granule-state as an example and using the lattice degree of nearness to describe similarity, this paper discusses the granule-state diffusion model that achieves “drawing inferences about other cases from one instance” through mutual reference between granule and state.

Keywords: artificial intelligence; traditional mathematics; intelligent mathematics; stream of consciousness; granule-state diffusion

MR Subject Classification: 68T01; 68T20