高校应用数学学报
2025, 40(1): 68-78

一类带有非线性阻尼项的磁流体动力学方程组的光滑解的整体存在性

李林锐， 洪明理

(防灾科技学院 基础部, 河北三河 065201)

摘　要: 此文研究了一类带有非线性阻尼项的不可压缩磁流体动力学方程组解的存在性和唯一性的定性性质, 通过古典的能量方法和Sobolev紧性嵌入方法获得了解的整体存在性, 利用Gagliardo-Nirenberg插值不等式和其它的一些重要不等式得到了解的正则性结果, 这些结果在很大程度改善了之前相关文献的结果, 揭示了磁流体运动的物理现象, 为磁流体动力学的发展提供了必要的理论基础.

关键词: 磁流体动力学方程组; 多孔介质; 粘性流; Sobolev紧性嵌入
中图分类号: O175.14
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2025)01-0068-11

§1　引　言

磁流体动力学方程组描述了导电流体在电磁场中运动的状态, 在地球物理学、空气动力学、天体物理或宇宙等离子体物理学等领域中具有非常重要的应用. 与其相关的解的存在性、唯一性和稳定性问题因其物理背景的重要性、复杂性, 其数学方面的挑战性, 吸引了许多学者的研究兴趣, 同时也取得了很好的结果[1-6]. 本文考虑带有非线性阻尼项的不可压缩磁流体动力学方程组的初始值问题

$$\begin{cases} \partial_t u+(u\cdot\nabla)u+a|u|^4u+\nabla p-B\cdot\nabla B=\nu\Delta u+f, & (01)\\ \partial_t B+(u\cdot\nabla)B=\kappa\Delta B+B\cdot\nabla u, & (02)\\ \mathrm{div}u=\mathrm{div}B=0, & (03)\\ u(x,0)=u_0, B(x,0)=B_0. & (04)\end{cases}\tag{I}$$

其中$u(x,t),B(x,t)$分别表示磁流体动力学方程组中未知的速度场和磁场, $p(x,t)$表示未知的压力, 所有的函数自变量定义在空间$x\in\Omega=T^2$和时间$t\in\mathbf{R}^+$, 压力函数$p(x,t)$能够从能量方程中通过两边取散度并且利用不可压条件然后取Laplace算子的逆运算可求出. 方程组中的非线性阻尼项$a|u|^4u$表示Brinkman-Forchheimer扩展Darcy定律, 这一项在描述流体在多孔介质中的运动平衡中具有重要的作用. 方程组中的参数$\nu>0,\kappa>0$分别表示粘性系数和磁扩散系数, 分别是

收稿日期: 2023-09-18　　修回日期: 2024-07-17
基金项目: 中央高校基本科研业务费专题研究项目(ZY20215116); 国家自然科学基金(12071192)

流体中古典Reynolds数和磁Reynolds数的倒数. 磁流体动力学方程组中如果没有非线性阻尼项, 则忽略了磁流体中的惯性力或加速度对磁流体实际运动的影响, 与经典的磁流体动力学方程组相比, 非线性阻尼项的存在使得磁流体动力学方程组能够更准确地描述流体在实际运动中的真实行为, 包括涡旋的形成、传播和相互作用等. 另一方面, 非线性阻尼项是导致磁流体系统不稳定性的重要原因之一, 这些不稳定性可能导致湍流、波的传播和破碎等现象. 通过研究磁流体动力学方程组中的非线性阻尼项, 可以更深入地理解这些不稳定性的产生机制, 以及它们对磁流体系统的影响. 另外, 非线性阻尼项在证明弱解的唯一性方面也起着非常重要的作用, 也可以借助非线性阻尼项的先验估计获得强解的整体存在性. 此外, 非线性阻尼项的存在使得磁流体动力学方程组能够更准确地预测流体在电磁场中的行为, 包括流速、压力分布、温度分布等. 这对于设计和优化磁流体设备、预测等离子体行为等具有重要意义. 事实上, 假设在多孔的介质, 一个具有大孔隙表面积的大物体, 暴露在磁流体中流动, 使粘性阻力大大超过流体中的加速力, 除非出现湍流. 然而, 一些物理情况(例如在存在重要分子和离子效应的情况下, 在非Newton流体的存在等)违反了Darcy的线性关系规律, 从而使用Forchheimer对Darcy定律的修正, 就是加上在达西定律之外的一个额外的非线性项阻尼仍然有效, 然后引申为Brinkman Forcheheimer扩展达西定律, 从而应用非线性项描述流体在多孔介质中的运动.

在系统(I)中如果$a = 0, f = 0, \nu > 0, \kappa > 0$, Sermange和Temam[1]研究了方程组(I)对于任意的初始条件$(u_0, B_0) \in H^m (m \geq 2)$都有唯一的整体古典解存在; 2016年, 辛思和夏烨[2]研究了有界区域上的非齐次的不可压的磁流体动力学方程组的初边值问题, 其中的粘性系数和电阻系数是与密度函数相关的, 获得了在速度场和磁场较小初始条件下强解的整体适定性; 随后, 刘慧敏、边东芬和蒲学科[3]研究了不带有热扩散项的三维的Boussinesq-MHD方程组的解的整体适定性, 并且通过速度场和温度场的联合估计式得到了温度场的高阶正则性结果; Rahman和朱茂春[4]利用抛物正则化过程和在流动模型中流体的Darcy定律研究了以不断吹/吸方式通过孔道流体的二维磁流体动力学方程弱解的全局正则性. 然后, Titi和Trabelsi[5]通过Faedo-Galerkin方法构造近似解序列, 借助于能量方法获得方程组解的一致先验估计, 结合Aubin紧性理论研究了三维磁流体动力学方程组在多孔介质中对于任意初始条件下的弱解的整体存在性和光滑解的整体适定性. 与此同时, 关于磁流体动力学方程组的解的正则性问题也得到了广泛的关注[6-10], 尤其是对带有部分耗散项和部分粘性项的方程组解的整体正则性, 近些年得到了很多相关的结果[11-13]. 2013年, 吴家宏、吴奕飞和许孝精[15]获得了二维的不可压缩的、无粘性的、非电阻性的、仅仅在速度场上带有阻尼项的磁流体动力学方程组带有小初始扰动的Cauchy问题解的整体存在性和整体解的代数衰减率结果; 随后, 江飞、江松和赵友义[16]研究了三维磁流体动力学方程组在水平方向上周期性区域带有有限高度的初边值问题的解的整体存在性, 他们开创了一种两层能量结构的方法克服了在研究三维非线性磁流体动力学方程组过程中出现的新的困难, 从而证明了初始边界具有小初始情形下的全局平滑解的存在性, 并且解会随着时间呈现指数衰减到某个静止状态, 两层能量结构显示出了两个特点, 低阶能量(泛函)不能被高阶能量控制, 在低阶能量的先验假设下, 可以先关闭高阶能量估计, 然后再进一步关闭低阶能量估计. 2024年, 肖跃龙和李红民[17]研究了在磁场方向和速度方向分别带有非线性阻尼项的三维磁流体动力学方程组的Cauchy问题, 分别讨论了两种情形下不同阻尼项参数对方程组解的影响, 此外也给出了弱解的唯一性和弱解的衰减性以及强解的导数的上确界. 在本文中, 主要聚焦于同时带有粘性和电阻性的两类耗散项, 并且在运动方程中带有Brinkman Forcheheimer扩展Darcy定律阻尼项

的磁流体动力学方程组的整体光滑解的存在性和唯一性, 这是之前相关参考文献的推广和继续深入研究, 之前的文献要么只是研究不带有部分耗散项只有一个非线性阻尼项的磁流体动力学方程组, 要么是只带有耗散项但是不带有非线性阻尼项的磁流体动力学方程组, 而本文中将两者结合起来进行研究, 能够更加真实的模拟流体的实际运动, 也对磁流体动力学的发展提供了进一步的理论深化.

本文研究带有非线性阻尼项的磁流体动力学模型的解的存在性问题, 相比之前文献中的一般方程, 需要处理对应的非线性项, 能量估计需要更加精细和深入, 进一步获得关于解序列$(u^\varepsilon, B^\varepsilon)$的一致先验估计, 对比于古典的磁流体动力学方程组, 研究的系统牵扯到动量方程中带有非线性阻尼项, 这是由于在多孔介质中的Brinkman-Forchheimer扩展Darcy定律所引起的非线性项, 同时由于方程组中磁场和速度场的相互耦合, 使得先验估计过程中将会遇到更多的困难, 因此在本文中通过前面几个命题首先获得关于解的时间导数的估计, 然后通过Sobolev嵌入定理和巧妙的插值不等式最终得到了速度场和磁场的期望的先验估计.

§2 预备知识及主要结果

首先给出一些在证明过程中用到的引理.

引理1[1] 若$f, g \in H^k \cap L^\infty$, 则

$$\|fg\|_{H^k} \le C\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^k} + \|f\|_{H^k}\|g\|_{L^\infty},$$

当$|\alpha| \le k$时, 有

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^2} \le C(\|f\|_{H^k}\|g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^{k-1}}).$$

如果F是光滑函数并且$F(0) = 0$, 则对于任意的$f \in H^k \cap L^\infty$, 有

$$\|F(f)\|_{H^k} \le C_k(\|f\|_{L^\infty})(1 + \|f\|_{H_k}).$$

引理2[14] 若$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^n$上的光滑函数, 如果$1 \le q, r \le \infty, m$是自然数, 假设实数α和自然数j满足

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{2} + (\frac{1}{r} - \frac{m}{n})\alpha + \frac{1-\alpha}{q}$$

和

$$\frac{j}{m} \le \alpha \le 1,$$

则有

$$\|D^j f\|_{L^p} \le C_1\|D^m f\|_{L^r}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} + C_2\|f\|_{L^s},$$

其中$s > 0$是任意数, 并且常数C_1和C_2仅仅依赖于Ω, m, j和s.

本文的主要结果如下.

定理1 在初始条件u_0, B_0满足$\mathrm{div} u_0 = \mathrm{div} B_0 = 0$且$u_0 \in H^s(\Omega), B_0 \in H^s(\Omega) (s \ge 3), f \in L^2$, 在系统(I)中参数$\nu > 0, \kappa > 0$时, 则系统(I)存在唯一整体光滑解$(u, B)$且满足

$$(u, B) \in C([0,T]; H^s(\Omega)) \cap L^2([0,T]; H^{s+1}(\Omega)),$$

其中$0 < T < +\infty$.

§3 主要结果的证明

下面通过以下三个步骤给出定理的证明.

证　步骤1　(u,B)的L^2估计

命题1　令$u_0,B_0\in L^2(\Omega)$, 使得u_0和B_0满足$\mathrm{div}u_0=0,\mathrm{div}B_0=0$, 则

$$\sup_{t\in[0,T]}\|(u,B)\|_{L^2}^2+\int_0^T\|(\nabla u,\nabla B)\|_{L^2}^2+\int_0^T\|u\|_{L^5}^5\le C_1,$$

其中C_1为常数.

证　对系统(I)中的(01)式两边同时乘以u并作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\mu\|\nabla u\|_{L^2}^2+a\|u\|_{L^6}^6=\int_\Omega(B\cdot\nabla B)\cdot u\mathrm{d}x+\int_\Omega fu\mathrm{d}x,\tag{1}$$

对系统(I)中的(02)式两边同时乘以B并在Ω上作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B\|_2^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2=\int_\Omega(B\cdot\nabla u)\cdot B\mathrm{d}x=-\int_\Omega(B\cdot\nabla B)\cdot u\mathrm{d}x,\tag{2}$$

将上面的式子(1)和式子(2)相加可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_2^2+\|B\|_2^2)+2\mu\|\nabla u\|_{L^2}^2+2\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2+2a\|u\|_{L^6}^6\le\|f\|_{L^2}^2\|u\|_2^2.\tag{3}$$

分部积分并利用Gronwall's不等式可得

$$(\|u\|_2^2+\|B\|_2^2)\le e^t((\|u_0\|_2^2+\|B_0\|_2^2))\le C_T,\quad\forall t\in[0,T].\tag{4}$$

同时可以得到

$$\mu\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\kappa\int_0^t\|\nabla B\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\le Ce^{Ct}(\|u_0\|_{L^2}^2+\|B_0\|_{L^2}^2)\le C_T,\quad t\in[0,T]\tag{5}$$

和

$$a\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^6}^6\mathrm{d}\tau\le Ce^{ct}(\|u_0\|_{L^2}^2+\|B_0\|_{L^2}^2)\le C_T,\quad t\in[0,T].\tag{6}$$

步骤2　(u,B)的H^2估计

命题2　假设$u_0,B_0\in L^2(\Omega)$, 并且满足$\mathrm{div}u_0=0,\mathrm{div}B_0=0,B_0\in L^{\frac{9}{2}}$, 则

$$\sup_{t\in[0,T]}\|B(t)\|_{L^{\frac{9}{2}}}\le C_1,\quad\int_0^t\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\le C_1,\tag{7}$$

其中C_1为不依赖于时间t的常数.

证　对系统(I)中的(02)式两边同时乘以$|B|^{\frac{5}{2}}B$, 然后在Ω上分部积分可得

$$\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}-\kappa\int_\Omega\Delta B|B|^{\frac{5}{2}}B\mathrm{d}x=-\int_\Omega B\cdot\nabla(|B|^{\frac{5}{2}}B)\cdot u\mathrm{d}x.\tag{8}$$

其中上式左边第二项可放缩为

$$-\kappa\int_\Omega\Delta B\cdot|B|^{\frac{5}{2}}B\mathrm{d}x\ge\frac{5}{9}\kappa\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2.\tag{9}$$

对于(8)式右边利用Hölder不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式可得

$$\begin{aligned}&|\int_\Omega B\cdot\nabla(|B|^{\frac{5}{2}})\cdot u\mathrm{d}x|\le C_2|\int_\Omega|B|^{\frac{9}{4}}|\nabla(|B|^{\frac{9}{4}})|u|\mathrm{d}x|\le\\&\frac{\kappa}{9}\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2+\frac{C_2}{\kappa}\|u|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2\le\\&\frac{\kappa}{9}\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2+\frac{C_2}{\kappa}\|u\|_{L^6}^2\||B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^3}^2\le\\&\frac{\kappa}{9}\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2+\frac{C_2}{\kappa}\|u\|_{L^6}^2\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}\||B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}\le\\&\frac{\kappa}{9}\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2+\frac{C_2}{\kappa}\|u\|_{L^6}^4\||B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{10}$$

综合(8)-(10)式可得

$$\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}+\frac{\kappa}{3}\|\nabla|B|^{\frac{9}{4}}\|_{L^2}^2\le\frac{C_2}{\kappa}(1+\|u\|_{L^6}^6)\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}.$$

利用(6)式中$\int_0^t\|u(\tau)\|_{L^6}^6\mathrm{d}\tau$的有界性可知

$$\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}\le\frac{C_2}{\kappa}\int_0^t(1+\||u\|_{L^6}^6)\mathrm{d}\tau\|B_0\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}\le C_2'\|B_0\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}\tag{11}$$

并且

$$\int \|\nabla|B|_{L^{\frac{9}{2}}}\|_{L^2}^2 \mathrm{d}\tau \leq CC_2(1+C_2')\|B_0\|_{L^{\frac{9}{2}}}^{\frac{9}{2}}. \tag{12}$$

命题3 假设$u_0, B_0 \in H^1(\Omega)$并且满足初始条件$\mathrm{div} u_0 = 0, \mathrm{div} B_0 = 0, B_0 \in L^{\frac{9}{2}}$, 则有

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla B\|_{L^2}^2) \leq C_3, \quad \int_0^t (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\Delta B\|_{L^2}^2 + \||u|^2\nabla u\|_{L^2}^2)\mathrm{d}\tau \leq C_3. \tag{13}$$

证 在系统(I)中的(01)式两边同时乘以Δu并分部积分可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \nu\|\Delta u\|_{L^2}^2 - a\int_\Omega |u|^4 u\cdot\Delta u \mathrm{d}x = \\ &\int_\Omega (u\cdot\nabla u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x - \int_\Omega (B\cdot\nabla B)\cdot\Delta u\mathrm{d}x - \int_\Omega f\cdot\Delta u\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{14}$$

在系统(I)中的(02)式两边同时乘以ΔB并分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla B\|_{L^2}^2 + \kappa\|\Delta B\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega (u\cdot\nabla B)\cdot\Delta B\mathrm{d}x - \int_\Omega (B\cdot\nabla u)\cdot\Delta B\mathrm{d}x, \tag{15}$$

对(14)式的阻尼项估计为

$$-a\int_\Omega |u|^4 u\cdot\Delta u\mathrm{d}x = 5a\||u|^2\nabla u\|_{L^2}^2. \tag{16}$$

对于(14)式右边的第一项, 利用Hölder不等式和Young's不等式可得

$$\begin{aligned} &|\int_\Omega (u\cdot\nabla u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x| \leq \||u||\nabla u|^{\frac{1}{2}}\|_{L^4}\||\nabla u|^{\frac{1}{2}}\|_{L^4}\|\Delta u\|_{L^2} \leq \\ &\frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu}\||u||\nabla u|^{\frac{1}{2}}\|_{L^4}^2\||\nabla u|^{\frac{1}{2}}\|_{L^4}^2 \leq \\ &\frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{5}{2}a\||u|^2|\nabla u|\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu^2}\||\nabla u|\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{17}$$

对于(14)式右边的第二项, 应用Hölder不等式、Gagliardo-Nirenberg不等式和引理2可得

$$\begin{aligned} &|\int_\Omega (B\cdot\nabla B)\cdot\Delta u\mathrm{d}x| \leq \frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu}\|B|\nabla B|\|_{L^2}^2 \leq \\ &\frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^2\|\nabla B\|_{L^{\frac{18}{5}}}^2 \leq \\ &\frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^2\|\nabla B\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|\Delta B\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \leq \\ &\frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa}{6}\|\Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\nabla B\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

对于(14)式右边最后一项可得

$$|\int_\Omega f\Delta u\mathrm{d}x| \leq \frac{\nu}{8}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu}\|f\|_{L^2}^2. \tag{19}$$

下面估计(15)式右边第一项, 分部积分两次可得

$$\begin{aligned} &|\int_\Omega (u\cdot\nabla B)\cdot\Delta B\mathrm{d}x| = -\int_\Omega \partial_k u^i\partial_i B^j\partial_k B^j\mathrm{d}x - \int_\Omega u\cdot\nabla\partial_k B\cdot\partial_k B\mathrm{d}x = \\ &\int_\Omega (\partial_k u\cdot\nabla)\partial_k B\cdot B\mathrm{d}x \leq \\ &\frac{\nu}{16}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\nu}\|B|\nabla B|\|_{L^2}^2 \leq \\ &\frac{\nu}{16}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\nu}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^2\|\nabla B\|_{L^{\frac{18}{5}}}^2 \leq \\ &\frac{\nu}{16}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\nu}\|B\|_{L^{\frac{9}{2}}}^2\|\nabla B\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|\Delta B\|_{L^2}^{L^{\frac{4}{3}}} \leq \\ &\frac{\nu}{16}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\nu}\|\Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\nabla B\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{20}$$

同理可证

$$|\int_\Omega (B\cdot\nabla u)\Delta B\mathrm{d}x| \leq \frac{\nu}{16}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\nu}\|\Delta B\|_{L^2}^2 + C\|\nabla B\|_{L^2}^2. \tag{21}$$

联合(16)-(21)式可得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla B\|_{L^2}^2) + \nu\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \kappa\|\Delta B\|_{L^2}^2 + 5a\||u|^\alpha\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \\ &C(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla B\|_{L^2}^2), \end{aligned} \tag{22}$$

利用Gronwall's不等式可得(13).

命题4 假设(u,B)是方程组(I)的光滑解, 则有

$$\int_0^t(\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\partial_t B\|_{L^2}^2)\mathrm{d}\tau+(\mu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2)+\frac{2a}{3}\||u\|_{L^6}^6\le C_4. \tag{23}$$

证 在系统(I)中的(01)式乘以u_t加上系统(I)中的(02)式乘以B_t, 然后在区域Ω上分部积分可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\partial_t B\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\kappa}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla B\|_{L^2}^2+\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\cdot\partial_t u\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega(B\cdot\nabla)B\cdot\partial_t u\mathrm{d}x+\int_\Omega(u\cdot\nabla)B\cdot\partial_t B\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla)u\cdot\partial_t B\mathrm{d}x+\frac{2a}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^6}^6=\\&\int_\Omega fu\cdot\partial_t u.\end{aligned} \tag{24}$$

对于(24)式中左边的积分项可以做估计

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\cdot\partial_t u\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla)B\cdot\partial_t u\mathrm{d}x+\int_\Omega(u\cdot\nabla)B\cdot\partial_t B\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla)u\cdot\partial_t B\mathrm{d}x\le\\&\frac14\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\frac12\|\partial_t B\|_{L^2}^2+C(\|u|\nabla u|\|_{L^2}^2+\|B|\nabla B|\|_{L^2}^2+\|u|\nabla B|\|_{L^2}^2+\|B|\nabla u|\|_{L^2}^2)\le\\&\frac14\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\frac12\|\partial_t B\|_{L^2}^2+C(\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2+\\&\|B\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2)\le\\&\frac14\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\frac12\|\partial_t B\|_{L^2}^2+C(\|u\|_{L^2}^{\frac12}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac32}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^{\frac12}\|\Delta B\|_{L^2}^{\frac32}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\\&\|u\|_{L^2}^{\frac12}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac32}\|\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^{\frac12}\|\Delta B\|_{L^2}^{\frac32}\|\nabla u\|_{L^2}^2)\le\\&\frac14\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\frac12\|\partial_t B\|_{L^2}^2+C(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta B\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^8\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^8\|B\|_{L^2}^2).\end{aligned} \tag{25}$$

将(25)式代入(24)式可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\|\partial_t B\|_{L^2}^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2)+\frac{2a}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^6}^6\le\\&C(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta B\|_{L^2}^2)+\|\nabla u\|_{L^2}^8\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^8\|B\|_{L^2}^2+C\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{26}$$

将上式从$[0,t]$上积分可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\partial_t u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\partial_t B\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+(\nu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2)+\frac{2a}{3}\|u\|_{L^6}^6\le\\&C\|u_0\|_{L^6}^6+C(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla B_0\|_{L^2}^2)+C\int_0^t\|\Delta u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau+C\int_0^t(\|\Delta B\|_{L^2}^2+\\&\|\nabla u\|_{L^2}^8\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla B\|_{L^2}^8\|u\|_{L^2}^2)\mathrm{d}\tau\le C.\end{aligned} \tag{27}$$

步骤3 (u,B)的高阶的能量估计

命题5 假设(u,B)是方程组(I)的光滑解, 则有

$$\sup_{t\in[0,T]}(\|\partial_t u\|_{L^2}^2+\||\partial_t B\|_{L^2}^2)+\int_0^t\|(\nabla u_t,\nabla B_t)\|_{L^2}^2)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\||u|^2u_t\|_{L^2}^2\le C. \tag{28}$$

证 对系统(I)中的(01)式两边同时取∂_t, 然后方程两边同时乘以$\partial_t u$可得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|_{L^2}^2+\nu\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\int_\Omega(u\cdot\nabla u_t)\cdot u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla B)_t\cdot u_t\mathrm{d}x+\\&a\int_\Omega(|u|^4u)_t\cdot u_t\mathrm{d}x=\int_\Omega(fu)_t\cdot u_t\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{29}$$

显然

$$\int_\Omega(|u|^4u)_t\cdot u_t\mathrm{d}x=\int_\Omega|u|^4|u_t|^2\mathrm{d}x+4\int_\Omega|u|^2|u\cdot u_t|^2\mathrm{d}x\ge0.$$

对于

$$\int(fu)_t\cdot u_t\mathrm{d}x=|\int_\Omega f_tu(u_t)\mathrm{d}x+\int_\Omega f(u_t)^2\mathrm{d}x\le\frac{\nu}{4}\|u_t\|_{L^2}^2+\|f_0\|_{L^2}^2+C. \tag{30}$$

同理对系统(I)中的(02)式两边同时取∂_t, 然后方程两边同时乘以$\partial_t B$可得

$$\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t B\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B_t\|_{L^2}^2+\int_\Omega(u\cdot\nabla B)_t\cdot B_t\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla u)_t\cdot B_t\mathrm{d}x=0, \tag{31}$$

将(29)式和(31)式的积分项共同处理可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u\cdot\nabla u)_t\cdot u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega (B\cdot\nabla B)_t\cdot u_t\mathrm{d}x+\int_\Omega (u\cdot\nabla B)_t\cdot B_t\mathrm{d}x-\int_\Omega (B\cdot\nabla u)_t\cdot B_t\mathrm{d}x=\\&\int_\Omega (u_t\cdot\nabla u)u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega (B_t\cdot\nabla u)\cdot B_t\mathrm{d}x-\int_\Omega B_t\cdot\nabla B\cdot u_t\mathrm{d}x\le\\&\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla B\|_{L^2}^2\|u_t\|_{L^4}^2\|B_t\|_{L^4}^2\le\\&C(\|u_t\|_{L^4}^2\|B_t\|_{L^4}^2)\le\\&CC_3(\|u_t\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{\frac32}\|B_t\|_{L^2}^{\frac12}\|\nabla B_t\|_{L^2}^{\frac32})\le\\&\frac{\nu}{4}\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\frac{\kappa}{2}\|\nabla B_t\|_{L^2}^2+C_3'(\|u_t\|_{L^2}^2+\|B_t\|_{L^2}^2).\end{aligned}\tag{32}$$

将(29)式和(30)式相加, 并代入(32)式可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_t\|_{L^2}^2+\|B_t\|_{L^2}^2)+\kappa\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+2a\int_\Omega |u|^4|u_t|^2\mathrm{d}x+4a\int_\Omega u^2|u\cdot u_t|^2\mathrm{d}x\le\\&C_3'(\|u_t\|_{L^2}^2+\|B_t\|_{L^2}^2)+C_1C'.\end{aligned}\tag{33}$$

命题6 假设(u,B)是方程组(I)的光滑解, 则有

$$\sup_{t\in[0,T]}(\||u|^2\nabla u\|_{L^2}^2+\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta B\|_{L^2}^2)\le C_5.\tag{34}$$

证 对系统(I)中的(01)式两边同时与Δu作内积可得

$$\begin{aligned}&2a\times 5\||u|^2\nabla u\|_{L^2}^2+\nu\|\Delta u\|_{L^2}^2\le\\&\|u_t\|_{L^2}^2+\|u\cdot\nabla u\|_{L^2}^2+\|B\cdot\nabla B\|_{L^2}^2\le\\&\|u_t\|_2^2+\|u\|_{L^4}^2\|\nabla u\|_{L^4}^2+\frac{\kappa}{4}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\frac{C}{\kappa}\|B\|^2\|\nabla B\|^8\le\\&\|u_t\|_{L^2}^2+C\|u\|^{\frac12}\|\nabla u\|^{\frac32}\|\nabla u\|^{\frac12}\|\nabla^2 u\|^{\frac32}+\\&\frac{\kappa}{4}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\frac{C}{\kappa}\|B\|^2\|\nabla B\|^8+\\&\frac{\kappa}{4}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\frac{C}{\kappa}\|B\|^2\|\nabla B\|^8\le\\&\|u_t\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{C}{\nu}\|u\|^2\|\nabla u\|^8+\frac{\kappa}{4}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\frac{C}{\kappa}\|B\|^2\|\nabla B\|^8.\end{aligned}\tag{35}$$

在上面第二步中用到Hölder不等式和Young不等式. 对系统(I)中的(02)式两边同时与ΔB作内积可得

$$\begin{aligned}&\kappa\|\Delta B\|_{L^2}^2\le\|B_t\|_{L^2}^2+\|u\cdot\nabla B\|_{L^2}^2+\|B\cdot\nabla u\|_{L^2}^2\le\\&\|B_t\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{4}\|\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{\kappa}{4}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\frac{C}{\kappa}\|u\|^2\|\nabla u\|^6\|\nabla B\|^2+\frac{C}{\nu}\|B\|^2\|\nabla B\|^6\|\nabla u\|^2.\end{aligned}\tag{36}$$

将(35)式与(36)式相加可得

$$\begin{aligned}&4a\times 5\||u|^2\nabla u\|_{L^2}^2+\nu\|\Delta u\|_{L^2}^2+\kappa\|\Delta B\|_{L^2}^2\le\\&2\|u_t\|_{L^2}^2+2\|B_t\|_{L^2}^2+C(\|u\|^2+\|B\|^2+\|\nabla u\|^8\|\nabla B\|^8)\le\\&2C_5+CC_1C_3.\end{aligned}\tag{37}$$

在上面证明过程中用到命题1-命题4.

命题7 假设(u,B)是(I)的光滑解, 则存在正常数$C_7>0$,使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla h(t)\|_{L^6}\le C_7.$$

证 对系统(I)中的(01)式作用算子$\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$并应用到自由散度条件可得

$$\Delta h=-\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(u\cdot\nabla u)+\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(B\cdot\nabla B)-a\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(|u|^4u).\tag{38}$$

利用Riesz算子估计式可得

$$\|\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}f\|_{L^p}\le C_p\|f\|_{L^p},\quad 1<p<\infty.\tag{39}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla h(t)\|_{L^6}\leq C_6\|u\cdot\nabla u\|_{L^6}+C_6\|B\cdot\nabla B\|_{L^6}+\||u|^4u\|_{L^6}\leq\\&C_6\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^6}+C_6\|B\|_{H^2}\|B\|_{H^2}+\|u\|_{L^\infty}^4\|u\|_{L^6}\leq\\&CC_6\|u\|_{H^2}^2+CC_6+\|u\|_{H^2}^5\leq\\&CC_6+C_6^{\frac{5}{2}}\leq C_7.\end{aligned}\tag{40}$$

命题8 假设(u,B)是(I)的光滑解, 则有

$$\int_0^t(\|\Delta u\|_{L^p}^2+\|\Delta B\|_{L^p}^2)\mathrm{d}\tau\leq C_8,\quad 其中1\leq p\leq 6.\tag{41}$$

证 对系统(I)中的(01)式两边取L^p范数有

$$\nu\|\Delta u\|_{L^p}\leq\|u_t\|_{L^p}+\|u\cdot\nabla u\|_{L^p}+\|B\cdot\nabla B\|_{L^p}+a\||u|^4u\|_{L^p}+\|\nabla h\|_{L^p}.\tag{42}$$

由命题6可知

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\Delta u\|_{L^6}^2\mathrm{d}\tau\leq C\int_0^t(\|u_t\|_{L^6}^2+\|u\cdot\nabla u\|_{L^6}^2+\|B\cdot\nabla B\|_{L^6}^2+a\||u|^4u\|_{L^6}^2+\|\nabla\pi\|_{L^6}^2)\mathrm{d}\tau\leq\\&CC_5+(CC_6+C_6^{\frac{5}{2}}+C_7)\cdot t\leq C_8.\end{aligned}\tag{43}$$

对于一般的情形$1\leq p\leq 6$同样可以推导出成立.

类似地, 对于系统(I)中的(02)式可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|\Delta B\|_{L^6}^2\mathrm{d}\tau\leq C\int_0^t(\|B_t\|_{L^6}^2+\|u\cdot\nabla B\|_{L^6}^2+\|B\cdot\nabla u\|_{L^6}^2)\mathrm{d}\tau\leq\\&CC_5+(CC_6+C_6^{\frac{5}{2}}+C_7)t\leq C_8.\end{aligned}\tag{44}$$

命题9 假设(u,B)是(I)的光滑解, 则有

$$\sup_{\tau\in[0,t]}(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|\Delta B\|_{L^2}^2)+\int_0^t(\nu\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla\Delta B\|_{L^2}^2)\mathrm{d}\tau\leq C_{10}.\tag{45}$$

证 对系统(I)中的(01)式两边同时作用Δ算子, 并用Δu作内积可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\nu\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2)+\int_\Omega\Delta(u\cdot\nabla u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x-\int_\Omega(B\cdot\nabla B)\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\\&a\int_\Omega\Delta(|u|^4u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\int_\Omega\Delta\nabla h\cdot\Delta u\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{46}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\nu\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2)+\int_\Omega\Delta\cdot\nabla h\cdot\Delta u\mathrm{d}x=\\&-\int_\Omega\Delta(u\cdot\nabla u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x+\int_\Omega\Delta(B\cdot\nabla B)\cdot\Delta u\mathrm{d}x-a\int_\Omega\Delta(|u|^4u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x\leq\\&|\int_\Omega(u\cdot\nabla u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x|+|\int_\Omega\Delta(B\cdot\nabla B)\cdot\Delta u\mathrm{d}x|+|a\int_\Omega\Delta(|u|^4u)\cdot\Delta u\mathrm{d}x|\leq\\&\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{2}{\nu}\|\nabla(u\cdot\nabla u)\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{2C}{\nu}\|B\|_{H^2}^2\|\Delta B\|_{L^2}^2+\\&\frac{\nu}{8}|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+C\|\nabla(|u|^4u)\|_{L^2}^2\leq\\&\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+\frac{2}{\nu}(\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^3}^2\|\nabla u\|_{L^6}^2)+\\&\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+CC_6^2+\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L^\infty}^8\|\nabla u\|_{L^2}^2\leq\\&\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+CC_6^2+\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+CC_6^2+\frac{\nu}{8}\|\nabla\Delta u\|_{L^2}^2+CC_3C_6^4.\end{aligned}\tag{47}$$

同样类似过程可以证明

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta B\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla\Delta B\|_{L^2}^2\leq C_8.\tag{48}$$

命题10 假设初始条件$(u_0,B_0)\in H^s(\Omega)\times H^s(\Omega)(s\geq 3)$, 则有

$$\sup_{\tau\in[0,t]}(\|u\|_{H^s(\Omega)}+\|B\|_{H^s(\Omega)})+\int_0^t(\|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2+\|B\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2)\mathrm{d}\tau\leq C_s.\tag{49}$$

证 由前面的命题1-命题4可知

$$(u,B)\in L^{\infty}_{\rm Loc}([0,+\infty);H^2(\Omega))\cap L^2_{\rm Loc}([0,+\infty);H^3(\Omega)). \tag{50}$$

令$s=|\alpha|\geq 3$, 假设已经证明

$$(u,B)\in L^{\infty}_{\rm Loc}([0,+\infty);H^{s-1}(\Omega))\cap L^2_{\rm Loc}([0,+\infty);H^s(\Omega)). \tag{51}$$

下面证明

$$(u,B)\in L^{\infty}_{\rm Loc}([0,+\infty);H^{s}(\Omega))\cap L^2_{\rm Loc}([0,+\infty);H^{s+1}(\Omega)). \tag{52}$$

对系统(I)中的(01)式两边同时取算子∂_x^α, 然后两边同时关于$\partial^\alpha u$取内积可得

$$\begin{aligned}
&\tfrac12\tfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+\nu\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2=\\
&-\textstyle\int_\Omega\partial^\alpha(u\cdot\nabla u)\cdot\partial^\alpha u\mathrm dx+\int_\Omega\partial^\alpha(B\cdot\nabla B)\cdot\partial^\alpha u\mathrm dx-a\int_\Omega\partial^\alpha(|u|^4u)\cdot\partial^\alpha u\mathrm dx-\\
&\textstyle\int_\Omega\partial^\alpha\nabla p\cdot\partial^\alpha u\mathrm dx\leq\\
&\textstyle|\int_\Omega\partial^{\alpha-1}(u\nabla u)\partial^{\alpha+1}u\mathrm dx|+\int_\Omega|\partial^\alpha(B\cdot\nabla B)\partial^\alpha u\mathrm dx|+|a\int_\Omega\partial^\alpha(|u|^4u)\partial^\alpha u\mathrm dx|+\\
&\textstyle|\int_\Omega\partial^\alpha\nabla p\cdot\partial^\alpha u\mathrm dx|\leq\\
&\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|\partial^{\alpha-1}(u\cdot\nabla u)\|_{L^2}^2+\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|B\|_{H^2}^2\|\partial^{\alpha-1}\nabla B\|_{L^2}^2+\\
&\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{H^{s-1}}^2+\tfrac{\nu}{8}\|\partial^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2\leq\\
&\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C(\|u\|_{L^\infty}^2\|\partial^{\alpha-1}\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^3}^2\|\partial^{\alpha-1}u\|_{L^6}^2)+\\
&C\|\partial^{\alpha-1}(u\cdot\nabla u)\|_{L^2}^2+\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|B\|_{H^2}^2\|\partial^{\alpha-1}\nabla B\|_{L^2}^2+\\
&\tfrac{\nu}{8}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{H^{s-1}}^2+\tfrac{\nu}{8}\|\partial^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2\leq\\
&\tfrac{\nu}{2}\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+C\|u\|_{H^2}^2\|\partial^{\alpha-1}\nabla u\|_{L^2}^2+\\
&C(\|u\|_{H^2}^2+\|B\|_{H^2}^2)(\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+\|\partial^\alpha B\|_{L^2}^2).
\end{aligned}\tag{53}$$

同样的方法运用到系统(I)中的(02)式可以最终得到

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}(\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+\|\partial^\alpha B\|_{L^2}^2)+\nu\|\nabla\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla\partial^\alpha B\|_{L^2}^2\leq\\
&C(\|u\|_{H^2}^2+\|B\|_{H^2}^2)(\|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2+\|\partial^\alpha B\|_{L^2}^2)+C\|\nabla u\|_{H^{s-1}}^2.
\end{aligned}\tag{54}$$

由Gronwall's不等式可得

$$(u,B)\in L^{\infty}_{\rm Loc}([0,+\infty);H^{s}(\Omega))\cap L^2_{\rm Loc}([0,+\infty);H^{s+1}(\Omega)). \tag{55}$$

综合上面的命题1-命题10, 可以得到定理1中解的先验估计式, 从而定理1中的存在性和正则性得证.

下证唯一性.

假设(u_1,B_1)和(u_2,B_2)分别是系统(I)的两个不同的解. 令

$$(u,B)=(u_1,B_1)-(u_2,B_2),\ h=p_1-p_2,$$

则(u,B)和p满足

$$\left\{\begin{aligned}
u_t+u_1\cdot\nabla u+u\cdot\nabla u_2-\nu\Delta u-B_1\cdot\nabla B-B\cdot\nabla B_2+a|u_1|^4u_1-a|u_2|^4u_2+\nabla h=0,\\
B_t+u_1\cdot\nabla B+u\cdot\nabla B_2-\kappa\Delta B=B_1\cdot\nabla u+B\cdot\nabla u_2,\\
\nabla\cdot u=\nabla\cdot B=0.
\end{aligned}\right.\tag{II}$$

系统(II)中第一个方程乘以u加上系统(II)中第二个方程乘以B可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\nu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2\le\\
&\int_\Omega(B_1\cdot\nabla B+B\cdot\nabla B_2-u\cdot\nabla u_2)\cdot u\mathrm{d}x-\int_\Omega(a|u_1|^4u_1-a|u_2|^4u_2)\cdot u\mathrm{d}x+\\
&\int_\Omega(B_1\cdot\nabla u+B\cdot\nabla u_2-u\cdot\nabla B)\cdot B\mathrm{d}x\le\\
&\|B_1\|_{L^\infty}^2(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\frac{\kappa}{2}\|\nabla B\|_{L^2}^2+\frac{\nu}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\\
&(\|\nabla u_2\|_{L^\infty}+\|\nabla B_2\|_{L^\infty})(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+(1+\|\nabla B\|_{L^\infty})(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

由于

$$(|u_1|^4u_1-|u_2|^4u_2)\cdot(u_1-u_2)\ge C|u_1-u_2|^2(|u_1|+|u_2|)^4,$$

从而非线性阻尼项可显示其非负性

$$a\int_\Omega(|u_1|^4u_1-|u_2|^4u_2)\ge aC\int_\Omega|u|^2(|u_1|+|u_2|)^4\ge 0,$$

从而可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\nu\|\nabla u\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla B\|_{L^2}^2)\le\\
&(1+\|B_1\|_{L^\infty}^2+\|\nabla u_2\|_{L^\infty}+\|\nabla B_2\|_{L^\infty})(\|u\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

由前面命题中获得的解的先验估计式和解的正则性可得到解的唯一性结果.

§4 结论

1) 研究了带有Brinkman Forcheheimer扩展Darcy定律阻尼项的磁流体动力学方程组的光滑解的整体存在性和唯一性.

2) 借助于古典的能量方法和Sobolev紧性嵌入方法获得了解的整体存在性, 利用Gagliardo-Nirenberg插值不等式和其它的一些重要的不等式得到了解的正则性结果, 这些结果表面: 当初始条件给予较高的光滑性时, 尤其是在带有较小的粘性系数或者耗散系数时, 其方程组对应的解也具有较高的光滑性, 这些结果揭示了磁流体运动的物理现象, 为磁流体动力学的发展提供了进一步深入的理论.

3) 关于带有非线性阻尼项的磁流体动力学方程组, 只在其中一个速度方向或者磁场方向上带有粘性项或者耗散项的相应方程组的解的适定性问题, 或者是相应的可压的磁流体动力学方程组的解的适定性问题有待于下一步继续深入研究.

参考文献:

[1] Sermange M, Temam R. Some mathematical questions related to the MHD equations[J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1983, 36: 635-664.

[2] Xin Si, Xia Ye. Global well-posedness for the incompressible MHD equations with density-dependent viscosity and resistivity coefficients[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2016, 67(5): 126.

[3] Liu Huimin, Bian Dongfen, Pu Xueke. Global well-posedness of the 3D Boussinesq-MHD system without heat diffusion[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2019, 70: 81, 1-19.

[4] Rahman S, 朱茂春. 通过多孔介质的二维磁流体力学方程组的全局正则性[J]. 应用数学学报, 2015, 38(1): 8-15.

[5] Titi E S, Trabelsi S. Global well-posedness of a 3D MHD model in porous media[J]. Journal of Geometric Mechanics, 2019, 11(4): 621-637.

[6] Ma Caohuan, Zhang Zhaoyun. Global regularity of 2D generalized MHD equations with magnetic damping[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2020, 53(7): 103066.

[7] He Cheng, Xin Zhouping. On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations[J]. Journal of Differential Equations, 2005, 213: 235-254.

[8] He Cheng, Xin Zhouping. Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations[J]. Journal of Functional Analysis, 2005, 227: 113-152.

[9] Ren Xiaoxia, Wu Jiahong, Xiang Zhaoyin, et al. Global existence and decay of smooth solution for the 2-D MHD equations without magnetic diffusion[J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 267: 503-541.

[10] Jiu Quansen, Liu Jitao. Global regularity for the 3-D axisymmetric MHD equations with horizontal dissipation and vertical magnetic diffusion[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2015, 35: 301-322.

[11] Miao Changxing, Zheng Xiaoxin. On the global well-posedness for the Boussinesq system with horizontal dissipation[J]. Communications in Mathematical Physics, 2013, 321: 33-67.

[12] Ren Xiaoxia, Wu Jiahong, Xiang Zhaoyin, et al. Global existence and decay of smooth solution for the 2-D MHD equations without magnetic diffusion[J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 267: 503-541.

[13] Wang Feng, Wang Keyan. Global existence of 3D MHD equations with mixed partial dissipation and magnetic diffusion[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1): 526-535.

[14] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations[J]. The Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1959, 13(3): 115-162.

[15] Wu Jiahong, Wu Yifei, Xu Xiaojing. Global small solution to the 2D MHD system with a velocity damping term[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2015, 47: 2630-2656.

[16] Jiang Fei, Jiang Song, Zhao Youyi. Global solutions of three-dimensional inviscid MHD fluids with velocity damping in horizontally periodic domains[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2022, 54: 4891-4929.

[17] Li Hongmin, Xiao Yuelong. Global well-posedness and decay to 3D MHD equations with nonlinear damping[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2024, 540: 128638.

The global existence result for a class of magnetohydrodynamic equations with nonlinear damping term

LI Lin-rui, HONG Ming-li

(Institute of Disaster Prevention, Basic Courses Department, Sanhe 065201, China)

Abstract: In order to survey the existence and uniqueness of solution as well as the relevant qualitative properties for a class of magnetohydrodynamic equations with nonlinear damping term, classical energy method and Sobolev compactness embedding method were used to obtain the global existence for the magnetohydrodynamic equations, the regularized results was studied with the aid of Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality and the others important inequalities. The results of study improve and extend the ones in the previous works to a large extent, reveal the physical phenomenon of fluid motion, and provide the necessary theoretical basis for the development of magnetohydrodynamic.

Keywords: magnetohydrodynamic equations; porous medium; viscous flow; Sobolev imbedding

MR Subject Classification: 35Q35; 35B65; 76D05