高校应用数学学报
2025, 40(1): 57-67

具有不规范非线性项的混合分数阶薛定谔方程组的爆破解

蒲　俊[1,2]，石启宏[1*]

(1. 兰州理工大学 数学系，甘肃兰州 730050;
2. 甘肃省地震局，甘肃兰州 730000)

摘　要: 此文研究了一个具有不规范非线性项的混合分数阶薛定谔方程组的初值问题. 不同于经典非线性耦合情形, 该系统不再保持质量和能量守恒属性. 通过引入有效的测试函数, 基于矛盾讨论, 此文导出了该系统爆破的充分条件, 并获得了具有某些特殊初始数据的该类系统弱解存在时间的估计.

关键词: 存在性; 测试函数; 有限时间爆破; 存在时间估计
中图分类号: O175.29
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2025)01-0057-11

§1　引　言

非线性薛定谔方程组(Nonlinear Schrödinger equations,以下简称NLSEs)是一种常见的数学物理模型, 常用于描述许多复杂物理场中粒子波的相互作用与演化[1-6]. 本文考虑具有非规范幂型非线性项和混合分数阶算子的耦合薛定谔方程组

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u+(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}u=\lambda_1|u|^p+\lambda_2|u||v|^{p-1}, & (x,t)\in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}, \\ \mathrm{i}\partial_t v+(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}v=\lambda_2|u|^{p-1}|v|+\lambda_3|v|^p, & (x,t)\in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}, \\ (u,v)(x,0)=(u_0,v_0), \end{cases} \tag{1}$$

这里$\alpha,\beta\in(0,2]$. λ_1,λ_2和$\lambda_3\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}:=\mathscr{F}^{-1}|\xi|^\alpha\mathscr{F}$, 此处$\mathscr{F}$表示傅里叶变换, 定义为

$$(\mathscr{F}f)(\xi)=\hat{f}(\xi):=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int_{\mathbf{R}^N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

这个系统源自于控制双折射光纤中两个偏振分量的规范型非线性薛定谔方程组[7]

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u+(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}u=(a|u|^{p-1}+b|v|^{p-1})u, & (x,t)\in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}, \\ \mathrm{i}\partial_t v+(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}v=(b|u|^{p-1}+c|v|^{p-1})v, & (x,t)\in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}, \\ (u,v)(x,0)=(u_0,v_0), \end{cases} \tag{2}$$

其中$a,b,c\in\mathbf{R},u,v:\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}^N,N\geq 1$. 关于(2), 如果令

$$u(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}u_1(x),\quad v(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}v_1(x),$$

收稿日期: 2023-07-16　　修回日期: 2024-08-09
*通讯作者, E-mail: shiqh03@163.com
基金项目: 国家自然科学基金(12061040); 甘肃省自然科学基金(23JRRA754)

它将转换为一个耦合的椭圆系统, 因此受到了很多关注. 例如, 当$\alpha = \beta = 2$时, 文献[8]研究了(2)在N维情形下($N \le 3$)的正基态解存在和不存在的充分必要条件. 文献[9]研究了一维NLSEs驻波的存在性和稳定性. 文献[10-11]研究了NLSEs的孤立波的稳定性. 文献[12]证明了(2)在$N = 1, p = 2$时孤立波的存在性和稳定性与a, b, c的关系. 文献[13]首次研究了当$p = 3$时, 方程组(2)在星图上的变分性和稳定性. 此外, 文献[14]指出一维情形下方程组(2)会像δ函数一样爆破. 文献[15]进一步研究了在$N \le 2, p = 3, \alpha = 2$时, 解的爆破二择性. 文献[16]推广该结论至三维情形, 证明了能量$E(u_0, v_0) < 0$时, 方程组解(u, v)的爆破特性.

在玻色-爱因斯坦凝聚中, 通常需要考虑解在空间无穷远处与非零常数的接近程度. 在这种情况下, 如果通过$u = u' + C$(C为常数)引入新的动力变量u', 并在方程中展开, 就会出现非线性项$|u'|^p$(参见[17-18]), 而这个项的出现在很大程度上会影响方程组解的性态研究. 正如文献[19]对单个薛定谔方程指出的那样, 在一维空间中当$\alpha = 1$时, 如果非线性项为$|u|^{p-1}u$, 方程将在$p \in (1, 3)$时存在全局解, 而若非线性项变为$|u|^p$, 解将在$p \in (1, 2]$的条件下爆破.

相较于(2), 方程组(1)不再拥有质能守恒属性, 因此前述关于(2)的研究方法和结论对(1)并不适用. 本文中聚焦于系统(1)的爆破属性, 通过引入测试函数, 结合矛盾论证来导出(1)的爆破条件. 这里的关键在于选择一个合适的测试函数来克服混合分数阶算子和耦合的非线性项带来的困难. 除此之外, 还得到了爆破解存在时间的上界估计.

本文中$H^s = H^s(\mathbf{R}^N)$, 将$f \le Cg$写为$f \lesssim g$, 其中C是一个正常数, 且文章中每一个C的值可能都会不同. $(\cdot, \cdot)$表示L^2中的内积, 定义为$(f, g) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. 下面介绍本文中所需要的定义和主要结论.

定义1.1 如果u, v满足下面的积分方程, 则称(u, v)是问题(1)的一个mild解:

$$u(t) = U(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t U(t-t')((\lambda_1|u|^p + \lambda_2|u||v|^{p-1})(t'))\mathrm{d}t', \tag{3}$$

$$v(t) = V(t)v_0 - \mathrm{i}\int_0^t V(t-t')((\lambda_2|u|^{p-1}|v| + \lambda_3|v|^p)(t'))\mathrm{d}t', \tag{4}$$

其中

$$U(t)f(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi + t|\xi|^\alpha)}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$V(t)f(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbf{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\xi + t|\xi|^\beta)}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

定理1.1 令$N \ge 1, 0 < \alpha, \beta \le 2$. 假设$(u_0, v_0) \in H^s(\mathbf{R}^N) \times H^s(\mathbf{R}^N), s > \frac{N}{2}$, 则存在一个正的时间$T$使得(1)有一个唯一解$(u, v) \in C([0, T]; H^s \times H^s)$,

$$\|u\|_{L_T^\infty H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}, \quad \|v\|_{L_T^\infty H^s} \lesssim \|v_0\|_{H^s}.$$

定义1.2 如果$u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, T; L^2(\mathbf{R}^N)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(0, T; L^p(\mathbf{R}^N))$且

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^T (u, \mathrm{i}\partial_t\varphi + (-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi)\mathrm{d}t = \int_0^T (\lambda_1|u|^p + \lambda_2|u||v|^{p-1}, \varphi)\mathrm{d}t + \mathrm{i}(u_0, \varphi_0), &(5)\\ &\int_0^T (v, \mathrm{i}\partial_t\varphi + (-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi)\mathrm{d}t = \int_0^T (\lambda_2|u|^{p-1}|v| + \lambda_3|v|^p, \varphi)\mathrm{d}t + \mathrm{i}(v_0, \varphi_0) &(6)\end{aligned}\right.$$

对任意的测试函数$\varphi \in C([0, T]; H^m(\mathbf{R}^N)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbf{R}^N))$均成立, 其中$m \ge \max\{\alpha, \beta\}$, $\varphi(0, x) = \varphi_0$且$\varphi(T, x) = 0$, 称$(u, v)$是方程组(1)的弱解.

定理1.2 令$\alpha, \beta \in (0, 2], \gamma = \min\{\alpha, \beta\}$和$1 < p \le 1 + \gamma/N$, 设$u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^2(\mathbf{R}^N)$, 当

满足下列任一条件时, 方程组(1)不存在全局弱解.

(1) $\Re\lambda_2<0,\min\{\Re\lambda_1,\Re\lambda_3\}>-\Re\lambda_2;-\Im(\int_{\mathbf{R}^N}u_0\mathrm{d}x)-\Im(\int_{\mathbf{R}^N}v_0\mathrm{d}x)>0;$

(2) $\Re\lambda_2>0,\max\{\Re\lambda_1,\Re\lambda_3\}<-\Re\lambda_2;\Im(\int_{\mathbf{R}^N}u_0\mathrm{d}x)+\Im(\int_{\mathbf{R}^N}v_0\mathrm{d}x)>0;$

(3) $\Re(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})>1,\Re(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2})>1;\Im(\frac{1}{\lambda_2}\int_{\mathbf{R}^N}u_0\mathrm{d}x)+\Im(\frac{1}{\lambda_2}\int_{\mathbf{R}^N}v_0\mathrm{d}x)>0.$

定理1.3　令$\alpha\in(0,2],1<p\le 1+\gamma/N,s\ge 0,(u_0,v_0)\in H^s(\mathbf{R}^N)$, 并且$T^*>0$, 令$(u,v)$是方程组(1)在$(0,T^*]$的弱解. 假设$u_0(x)=\mu f(x),v_0(x)=\mu g(x),\mu>0$, 且$f,g$满足

$$-\Im(f+g)\ge\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ |x|^{-k}, & |x|>1,\end{cases}\tag{7}$$

这里$k<N$, 则存在$\epsilon_0>0$, 使得方程组(1)弱解的存在时间T^*满足估计

$$T^*\le\begin{cases}C\mu^{-1/\mathcal{K}}, & \mu\in(0,\epsilon_0),\\ 2, & \mu\in[\epsilon_0,\infty),\end{cases}$$

这里$\mathcal{K}=q-1-k/\gamma$.

§2　预备工作

定义2.1[20]　令$\alpha\in(0,2)$. 令X是一个定义在$\mathbf{R}^N$上的函数集合. 则$\mathbf{R}^N$中的分数阶Laplace算子$(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}$是一个非局部算子, 定义为

$$(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}:v\in X\to(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}v:=C_{N,\alpha}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y,\tag{8}$$

P.V.表示柯西主值, $C_{N,\alpha}$表示依赖N,α的常数.

引理2.1[21]　对于任意的$s\ge 0$有

$$\||\nabla|^s(uv)\|_{L^r}\leqslant\||\nabla|^su\|_{L^{r_1}}\|v\|_{L^{q_2}}+\|u\|_{L^{q_1}}\||\nabla|^sv\|_{L^{r_2}},$$

这里$1/r=1/r_1+1/q_2=1/q_1+1/r_2,r_i\in(1,\infty),q_i\in(1,\infty],i=1,2$.

引理2.2　如果(u,v)是方程组(1)的mild解, 则(u,v)也是方程组(1)的弱解.

证　给定$\varphi\in C^1([0,T],H^m(\mathbf{R}^N))$, 使得$\varphi$的支集是紧的, 且$\varphi(\cdot,T)=0$. 在方程(3)两边乘以$\varphi$, 并在$\mathbf{R}^N$上做积分, 可以得到

$$\int_{\mathbf{R}^N}u(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}U(t)u_0\varphi(x,t)\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^tU(t-t')F(u,v)(t')\varphi(x,t)\mathrm{d}t'\mathrm{d}x,\tag{9}$$

其中

$$F(u,v)=\lambda_1|u|^p+\lambda_2|u||v|^{p-1}.$$

对上式关于t微分得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x,t)\varphi(x,t))\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(t)u_0\varphi(x,t))\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t-t')(F(u,v)(t')\varphi(x,t))\mathrm{d}t'\mathrm{d}x.\tag{10}$$

上式右边的两项分别等于

$$\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(t)u_0\varphi(x,t))\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}(U(t)u_0)\varphi\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^tU(t)u_0\partial_t\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t',\tag{11}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t-t')(F(u,v)(t')\varphi(x,t))\mathrm{d}t'\mathrm{d}x=\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^N}F(u,v)(t)\varphi(x,t)\mathrm{d}t+\\&\mathrm{i}(\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t \mathrm{i}(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}U(t-t')F(u,v)(t-t')\mathrm{d}t'\varphi(x,t)\mathrm{d}x)+\\&\mathrm{i}(\int_{\mathbf{R}^N}\int_0^t \mathrm{i}U(t-t')F(u,v)(t-t')\mathrm{d}t'\varphi(x,t)\mathrm{d}x).\end{aligned}\tag{12}$$

联立(10)-(12)和(3)得

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(x,t)\varphi(x,t))\mathrm{d}x=\mathrm{i}(u(x,t),(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi(x,t))+(u(x,t),\partial_t\varphi(x,t))-\mathrm{i}(F(u,v)(x,t),\varphi(x,t)).\tag{13}$$

对上式在$[0,T]$上进行积分得

$$\int_0^T(u,\mathrm{i}\partial_t\varphi+(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi)\mathrm{d}t=\int_0^T(F(u,v)(x,t),\varphi)\mathrm{d}t+\mathrm{i}(u_0,\varphi_0).\tag{14}$$

对于方程组的另一个解v, 可以用类似的方法来证明其mild解与弱解等价.

引理2.3 令$\langle x\rangle=\sqrt[3]{1+(|x|-1)^3}$, 且$\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$, 令$\psi(x)$是一个连续分段函数, 定义为

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ \langle x\rangle^{-N-\gamma}, & |x|\ge 1,\end{cases}\tag{15}$$

则$\forall x\in\mathbf{R}^N,\psi\in C^2(\mathbf{R}^N)$, 存在一个仅依赖于$N,\alpha$的正常数$A_{N,\alpha}$使得$(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi$满足逐点估计

$$|(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi|\le A_{N,\alpha}\psi(x).\tag{16}$$

证 为了方便, 令$r:=|x|$, 并考虑$\psi(x)$的导数

$$\nabla\psi(x)=\frac{x}{r}\psi'(x)=\begin{cases}0, & r\le 1,\\ -(N+\gamma)(r-1)^2\frac{x}{r}\langle x\rangle^{-N-\gamma-3}, & r\ge 1\end{cases}\tag{17}$$

和

$$\triangle\psi(x)=\frac{N-1}{r}\psi'(x)+\psi''(x)=\begin{cases}0, & r\le 1,\\ -(N+\gamma)(r-1)^2\frac{N-1}{r}\langle x\rangle^{-N-\gamma-3}- & \\ 2(N+\gamma)(r-1)\langle x\rangle^{-N-\gamma-3}+ & \\ (N+\gamma)(N+\gamma+3)(r-1)^4\langle x\rangle^{-N-\gamma-6}, & r\ge 1.\end{cases}\tag{18}$$

容易验证$\psi(x)\in C^2(\mathbf{R}^N)$且$|\triangle\psi(x)|\le\langle x\rangle^{-N-\alpha}$. 因此只需要考虑$0<\alpha<2$. 除此之外, 通过上述计算, 可以得到$\|\psi\|,\|\partial_x^2\psi\|_{L^\infty}<\infty$, 所以可以去掉积分在原点的主值. 根据定义(2.1)并利用变量替换可得

$$\begin{aligned}(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi(x)=&-\frac{C_{N,\alpha}}{2}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y=\\&-\frac{C_{N,\alpha}}{2}\mathrm{P.V.}\lim_{\sigma\to 0+}\int_{\sigma\le|y|\le 1}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y=\\&-\frac{C_{N,\alpha}}{2}\mathrm{P.V.}\int_{|y|\ge 1}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{19}$$

对ψ做二阶泰勒展开可得

$$\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\lesssim\frac{\|\partial_x^2\psi\|_{L^\infty}}{|y|^{N+\alpha}}.\tag{20}$$

通过上述估计和$\alpha\in(0,2)$, 可以去除积分在原点的主值来得到如下结论

$$(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi(x)=-\frac{C_{N,\alpha}}{2}\mathrm{P.V.}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y. \tag{21}$$

为了得到期待的结果, 下面分别讨论$|x|\le 2$和$|x|\ge 2$两种情形. 对于$|x|\le 2$, 将积分区域分为两部分

$$\Gamma_1=\{(x,y):|y|\le 1\},\quad \Gamma_2=\{(x,y):|y|\ge 1\}.$$

在Γ_1和Γ_2上, 分别有估计

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\|\partial_x^2\psi\|_{L^\infty}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{|y|^{N+\alpha-2}}\lesssim 1, \tag{22}$$

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\|\psi\|_{L^\infty}\int_{\Gamma_2}\frac{1}{|y|^{N+\alpha}}\lesssim 1. \tag{23}$$

对于$|x|\ge 2$, 将积分区域分成三部分

$$\Gamma_3=\{(x,y):|y|\ge 2|x|\},\quad \Gamma_4=\{(x,y):\frac{1}{2}|x|\le|y|\le 2|x|\},\quad \Gamma_5=\{(x,y):|y\le\frac{1}{2}|x|\}.$$

事实上, 当$|x|\ge 2$时, 有$\langle x\rangle\sim|x|-1\sim|x|$.

在Γ_3上, 可以发现$|x\pm y|\ge|y|-|x|\ge|x|\ge 2$. 由$\psi$的单调性可得: $\psi(x\pm y)\le\psi(x)=\langle x\rangle^{-N-\gamma}$. 由此可以得出估计

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_3}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim 4\psi(x)\int_{|y|\ge 2|x|}\frac{1}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\\&\langle x\rangle^{-N-\gamma}\int_{|y|\ge 2|x|}\frac{1}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}|y|\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma}|x|^{-\alpha}\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma-\alpha}.\end{aligned} \tag{24}$$

在Γ_4上, 由$|y|\sim|x|$和$\Gamma_4\in\{y\in\mathbf{R}^N:|x\pm y|\ge 2\}$可得

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_4}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\\&|x|^{-N-\alpha}(\int_{|x+y|\le 3|x|}\psi(x+y)\mathrm{d}y+\int_{|x-y|\le 3|x|}\psi(x-y)\mathrm{d}y+2\psi(x)\int_{\frac{1}{2}|x|\le|y|\le 2|x|}1\mathrm{d}y)\lesssim\\&\langle x\rangle^{-N-\alpha}(\int_{|x+y|\le 3|x|}\psi(x+y)\mathrm{d}y+\langle x\rangle^{-N-\gamma}|x|^N)\lesssim\langle x\rangle^{-N-\alpha}(|x|^{-\gamma}+1)\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma},\end{aligned} \tag{25}$$

这里使用了估计

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|\le 3|x|}\psi(x-y)\mathrm{d}y=\int_{|x+y|\le 3|x|}\psi(x+y)\mathrm{d}y=\\&\int_{2\le|x+y|\le 3|x|}\psi(x+y)\mathrm{d}y+\int_{|x+y|\le 2}\psi(x+y)\mathrm{d}y\lesssim\\&\int_2^{3|x|}(1+(r-1)^3)^{-(N+\gamma)/3}r^{N-1}\mathrm{d}r+\int_0^2 r^{N-1}\mathrm{d}r\lesssim\int_2^{3|x|}r^{-\gamma-1}\mathrm{d}r+\int_0^2 r^{N-1}\mathrm{d}r\lesssim 1.\end{aligned} \tag{26}$$

接下来处理Γ_5上的积分. 利用ψ的二阶泰勒展开可得

$$\int_{\Gamma_5}\frac{\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\int_{\Gamma_5}\max_{\delta\in[0,1]}\partial_x^2\psi(x\pm\delta y)\frac{1}{|y|^{N+\alpha-2}}\mathrm{d}y. \tag{27}$$

下面考虑关于$\partial_x^2\psi(x\pm\delta y)$的估计. 令$r=|x+\delta y|,\delta\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}|\partial_x^2\psi(x\pm\delta y)|&\lesssim\begin{cases}0, & r\le 1,\\ \frac{(r-1)^2}{r}\langle r\rangle^{-N-\gamma-3}-(r-1)\langle r\rangle^{-N-\gamma-3}+(r-1)^4\langle r\rangle^{-N-\gamma-6}, & r\ge 1\end{cases}\\&\lesssim\begin{cases}0, & r\le 1,\\ \langle r\rangle^{-N-\gamma-2}, & r\ge 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{28}$$

由$|x\pm\delta y|\ge|x|-\delta|y|\ge|x|-|x|/2\ge 1$和上述估计可得
$$|\partial_x^2\psi(x\pm\delta y)|\lesssim\langle x\pm\delta y\rangle^{-N-\gamma-2}.$$
如果$|x\pm\delta y|\ge 2$, 则$\langle x\pm\delta y\rangle\sim|x\pm\delta y|\ge|x|/2\gtrsim\langle x\rangle$, 由此可得
$$\langle x\pm\delta y\rangle^{-N-\gamma-2}\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma-2}.$$
如果$|x\pm\delta y|\le 2$, 则$|x|/2\le|x\pm\delta|y|\le 2$, 这说明$2\le|x|\le 4$. 因此可以得到$\langle x\pm\delta y\rangle\sim|x|\sim 1$和$\langle x\pm\delta y\rangle^{-N-\gamma-2}\sim\langle x\rangle^{-N-\gamma-2}$, 则下式对所有的$\delta\in[0,1]$都成立
$$|\partial_x^2\psi(x\pm\delta y)|\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma-2}.$$
进一步由(27)可得
$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_5}\frac{|\psi(x+y)+\psi(x-y)-2\psi(x)|}{|y|^{N+\alpha}}\mathrm{d}y\lesssim\langle x\rangle^{-N-\alpha-2}\int_{\Gamma_5}\frac{1}{|y|^{N+\alpha-2}}\mathrm{d}y\lesssim\\&\langle x\rangle^{-N-\gamma-2}\int_0^{|x|/2}\frac{1}{|y|^{\alpha-1}}\mathrm{d}|y|\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma-2}|x|^{-\alpha+2}\lesssim\langle x\rangle^{-N-\gamma-\alpha}.\end{aligned}\tag{29}$$
结合(22)-(25)和(29)可得下式对所有的$x\in\mathbf{R}^N$都成立
$$|(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi|\le\langle x\rangle^{-N-\gamma}.\tag{30}$$
引理2.4[22] 令$0<\alpha\le 2, x\in(\mathbf{R}^N)$, ψ是一个满足$\partial_x^2\psi\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$的光滑函数. $\forall R>0$, 令$\psi_R(x)=\psi(x/R)$. 则对所有的$x\in\mathbf{R}^N$, $\psi_R(x)$有性质
$$(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi_R(x)=R^{-\alpha}((-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi)(x/R).$$

§3 主要定理的证明

定理1.1的证明 定义完备度量空间
$$X(T,\rho)=\{(u,v)\in L_T^\infty(H^s(\mathbf{R}^N)\times H^s(\mathbf{R}^N)):\|u\|_{L_T^\infty H^s}\le\rho,\|v\|_{L_T^\infty H^s}\le\rho\},$$
$$\|(u,v)\|_X=\|u\|_{L_T^\infty H^s(\mathbf{R}^N)}+\|v\|_{L_T^\infty H^s(\mathbf{R}^N)},$$
以及其上的度量
$$d_X((u_1,v_1),(u_2,v_2))=\max\{\|u_1-u_2\|_{L_T^\infty L^2},\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L^2}\}.$$
在这个空间上进一步定义映射$\mathcal{H}:(u,v)\to\mathcal{H}(u,v)$为
$$u(t)=U(t)u_0-\mathrm{i}\int_0^t U(t-t')(\lambda_1|u|^p+\lambda_2|u||v|^{p-1}(t'))\mathrm{d}t',$$
$$v(t)=V(t)u_0-\mathrm{i}\int_0^t V(t-t')(\lambda_2|u|^{p-1}|v|+\lambda_3|v|^p(t'))\mathrm{d}t'.$$
下面构建该空间上的压缩映射. 对于$u\in X(T,\rho)$和$s>N/2$, 有
$$\begin{aligned}&\|u\|_{L_T^\infty H^s}\le\|u_0\|_{H^s}+T\|\lambda_1|u|^p+\lambda_2|u||v|^{p-1}\|_{L_T^\infty H^s}\lesssim\\&\|u_0\|_{H^s}+T(\|u\|^{p-1}_{L_T^\infty H^s}\|u\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|u\|_{L_T^\infty H^s}\|v\|^{p-1}_{L_T^\infty L^\infty}+\|u\|_{L_T^\infty L^\infty}\|v\|^{p-2}_{L_T^\infty L^\infty}\|v\|_{L_T^\infty H^s})\lesssim\\&\|u_0\|_{H^s}+T(\|u\|^{p-1}_{L_T^\infty H^s}\|u\|_{L_T^\infty H^s}+\\&\|u\|_{L_T^\infty H^s}\|v\|^{p-1}_{L_T^\infty H^s}+\|u\|_{L_T^\infty H^s}\|v\|^{p-2}_{L_T^\infty H^s}\|v\|_{L_T^\infty H^s})\lesssim\|u_0\|_{H^s}+T\rho^p,\end{aligned}$$
这里使用了引理2.1, Hölder不等式, 索伯列夫嵌入$H^s(\mathbf{R}^N)\hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R}^N)$以及分数阶链式法则[23]
$$\||\nabla|^sF(u)\|_{L^q}\lesssim\|F'(u)\|_{L^{p_1}}\||\nabla|^su\|_{L^{p_2}},\quad\frac{1}{q}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}.$$
同理可得
$$\|v\|_{L_T^\infty H^s}\lesssim\|v_0\|_{H^s}+T\rho^p.$$
选取合适的ρ和T, 使得$\|u_0\|_{H^s},\|v_0\|_{H^s}\le\frac{\rho}{4}, CT\rho^p\le\frac{\rho}{4}$. 则$\mathcal{H}$映$X(T,\rho)$到其自身. 进一步, 指出

对于充分小的$T>0$, $\mathcal{H}$是Lipschitz映射. 令$u_1,u_2\in X(T,\rho)$, 则

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_{L_T^\infty L^2}\lesssim{}& T(\||u_1|^p+|u_1||v|^{p-1}-|u_2|^p-|u_2||v|^{p-1}\|_{L_T^\infty L^2})\lesssim\\ & T(\||u_1|^p-|u_2|^p\|_{L_T^\infty L^2}+\||v|^{p-1}(|u_1|-|u_2|)\|_{L_T^\infty L^2})\lesssim\\ & T(\|(|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})(|u_1-u_2|)\|_{L_T^\infty L^2}+\|v\|_{L_T^\infty L^\infty}^{p-2}\|u_1-u_2\|_{L_T^\infty L^2})\lesssim\\ & T(\|u_1\|_{L_T^\infty L^\infty}^{p-1}+\|u_2\|_{L_T^\infty L^\infty}^{p-1}d_X((u_1,v_1),(u_2,v_2))+\\ & \|u_1\|_{L_T^\infty L^\infty}^{p-1}d_X((u_1,v_1),(u_2,v_2)))\lesssim T\rho^{p-1}d_X((u_1,v_1),(u_2,v_2)).\end{aligned}$$

类似地, 可以得到$\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^s}\lesssim T\rho^{p-1}d_X((u_1,v_1),(u_2,v_2))$. 取$T$足够小, $\mathcal{H}$则是一个压缩映射. 通过方程(3)-(4)和与上述相似的压缩讨论, 易得解的唯一性以及解关于时间的连续性.

定理1.2的证明　这里仅针对定理1.2的条件(1)所表示的情形进行证明, 其它两种情况的证明是类似的. 令$R,T\in\mathbf{R}_+$, 定义

$$\psi_R(x):=\psi(x/R),\quad \eta(t)=(1-\frac{t}{T})^l,$$

这里$l\gg 1$是一个适当大的常数. 在此基础上, 定义测试函数

$$\varphi(t,x)=\psi_R(x)\eta(t). \tag{31}$$

由方程(5)-(6)得

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\Re(\lambda_1+\lambda_2)|u|^p+\Re(\lambda_2+\lambda_3)|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)\le\\ &\Re\int_0^T(u,\mathrm{i}\partial_t\varphi)\mathrm{d}t+\Re\int_0^T(u,(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi)\mathrm{d}t+\Re\int_0^T(v,\mathrm{i}\partial_t\varphi)\mathrm{d}t+\Re\int_0^T(v,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi)\mathrm{d}t:=\\ &K_1+K_2+K_3+K_4.\end{aligned}\tag{32}$$

接下来对K_1,K_2,K_3,K_4分别进行估计. 利用Hölder不等式, 可得

$$\begin{aligned}|K_1|\lesssim{}&\frac{1}{T}\int_0^T\left|\left(u,\varphi(x,t)(1-t/T)^{-1}\right)\right|\mathrm{d}t\lesssim\\ &\frac{1}{T}\int_0^T(|u|^p,\varphi(x,t))^{1/p}\left(\varphi(x,t),(1-t/T)^{-q}\right)^{1/q}\mathrm{d}t\lesssim\\ &\frac{1}{T}I_R^{1/p}\left(\int_0^T\left(\varphi(x,t),(1-t/T)^{-q}\right)\mathrm{d}t\right)^{1/q},\end{aligned}\tag{33}$$

其中$I_R(T):=\int_0^T(|u|^p,\varphi(t,x))\,\mathrm{d}t$. 注意到$\eta(t)$是一致有界的, 通过变量替换$y:=x/R$, 可得

$$\begin{aligned}|K_1|\lesssim{}&T^{1/q-1}I_R^{1/p}(\int_{\mathbf{R}^N}\psi_R(x)\mathrm{d}x)^{1/q}\lesssim\\ &T^{1/q-1}I_R^{1/p}(R^N\int_{\mathbf{R}^N}\langle y\rangle^{-N-\gamma}\mathrm{d}y)^{1/q}\lesssim T^{1/q-1}I_R^{1/p}R^{N/q}.\end{aligned}\tag{34}$$

利用Hölder不等式, 引理2.3和引理2.4, 可得

$$\begin{aligned}&|K_2|\lesssim\int_0^T|(u,\eta(t))(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}(\psi_R(x))|\mathrm{d}t\lesssim\\ &R^{-\alpha}\int_0^T(|u|,\eta(t))|((-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\psi)(x/R)|\mathrm{d}t\lesssim R^{-\alpha}I_R^{1/p}(\int_0^T\eta(t)\mathrm{d}t\int_{\mathbf{R}^N}\psi_R(x)\mathrm{d}x)^{1/q}\lesssim\\ &R^{N/q-\alpha}I_R^{1/p}T^{1/q}.\end{aligned}\tag{35}$$

类似地, 可以得到

$$|K_3| \lesssim T^{1/q-1}E_R^{1/p}R^{N/q}, \tag{36}$$

$$|K_4| \lesssim R^{N/q-\beta}E_R^{1/p}T^{1/q}. \tag{37}$$

其中

$$E_R(T) := \int_0^T (|v|^p, \varphi(t,x))\,\mathrm{d}t.$$

将(34)-(37)代入(32), 对于$R \gg 1$有

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\Re(\lambda_1+\lambda_2)|u|^p + \Re(\lambda_2+\lambda_3)|v|^p, \varphi)\mathrm{d}t - \Im(u_0,\varphi_0) - \Im(v_0,\varphi_0) \lesssim \\ &I_R^{1/p}(T^{1/q-1}R^{N/q} + R^{N/q-\alpha}T^{1/q}) + E_R^{1/p}(T^{1/q-1}R^{N/q} + R^{N/q-\beta}T^{1/q}) \lesssim \\ &(I_R^{1/p} + E_R^{1/p})(T^{1/q-1}R^{N/q} + R^{N/q-\gamma}T^{1/q}).\end{aligned} \tag{38}$$

下面分两种情况进行讨论.

情况(i) $p < 1+\gamma/N$. 对于足够大的T, 令$R = T^\theta$, $\theta > 0$, 且满足$\gamma\theta \ge 1$时$\theta < \frac{1}{N(p-1)}$或$\gamma\theta < 1$时$\theta > \frac{1}{\gamma q - N}$任一条件. 由$R \to \infty$时, $\psi_R(x) = 1$和初始假设

$$-\Im(\int_{\mathbf{R}^N} u_0 \mathrm{d}x) - \Im(\int_{\mathbf{R}^N} v_0 \mathrm{d}x) > 0, \tag{39}$$

可得

$$\begin{aligned}&\Re(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^T (|u|^p,\varphi)\mathrm{d}t + \Re(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^T(|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t \lesssim \\ &(I_R^{1/p}+E_R^{1/p})T^{\theta N/q}T^{1/q}(T^{-1}+T^{-\theta\gamma}) \lesssim \\ &(I_R^{1/p}+E_R^{1/p})T^{(N\theta+1)/q+\max\{-1,-\theta\gamma\}}.\end{aligned} \tag{40}$$

进一步由Young不等式可得

$$\begin{aligned}&\Re(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^T (|u|^p,\varphi)\mathrm{d}t + \Re(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^T(|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t \le \\ &\qquad C_1 I_R + C_1 E_R + C_2 T^{N\theta+1+q\max\{-1,-\theta\gamma\}}.\end{aligned} \tag{41}$$

调整系数使得$C_1 < \min\{\Re(\lambda_1+\lambda_2), \Re(\lambda_2+\lambda_3)\}$, 则

$$\Re(\lambda_1+\lambda_2-C_1)\int_0^T (|u|^p,\varphi)\mathrm{d}t + \Re(\lambda_2+\lambda_3-C_1)\int_0^T(|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t \lesssim T^{N\theta+1+q\max\{-1,-\theta\gamma\}}. \tag{42}$$

注意到当$p < 1+\gamma/N$时, $N\theta+1+q\max\{-1,-\theta\gamma\} < 0$. 因此一旦取极限$T\to\infty$, 可以得到

$$-\Im(u_0,\varphi_0) - \Im(v_0,\varphi_0) \lesssim 0, \tag{43}$$

这与定理的假设矛盾.

情况(ii) $p = 1+\gamma/N$. 上述的情况中θ的选择将使$N\theta+1+q\max\{-1,-\theta\gamma\} = 0$, 因此$I_R + E_R \lesssim 1$. 进一步, 当$T\to\infty$时, $I_R, E_R \le C$. 利用控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_0^T (|u|^p,\varphi(t,x))\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} I_R \le C, \\ &\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N} |v|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_0^T (|v|^p,\varphi(t,x))\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} E_R \le C.\end{aligned} \tag{44}$$

这意味着$u, v \in L^p(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$. 由(38)得

$$\int_0^T (\Re(\lambda_1+\lambda_2)|u|^p + \Re(\lambda_2+\lambda_3)|v|^p, \varphi)\mathrm{d}t - \Im(u_0,\varphi_0) - \Im(v_0,\varphi_0) \lesssim 1. \tag{45}$$

接下来引入$\widetilde{\eta}(t)$来代替原来的$\eta(t)$有

$$\widetilde{\eta}(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-t)^2, & t\in[\frac{1}{2},1],\\ 0, & t\in[1,\infty).\end{cases} \tag{46}$$

容易验证$\widetilde{\eta}(t)\in C^1[0,\infty)$且满足性质$|\partial_t\widetilde{\eta}_T(t)|\lesssim\widetilde{\eta}_T/T$, 其中$\widetilde{\eta}_T(t)=\widetilde{\eta}(t/T)$. 在此基础上重新定义测试函数

$$\widetilde{\varphi}(t,x):=\psi_R(x)\widetilde{\eta}_T(t).$$

由(5)-(6)可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\Re(\lambda_1+\lambda_2)|u|^p,\widetilde{\varphi})+\int_0^T(\Re(\lambda_2+\lambda_3)|v|^p,\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t-\Im(u_0,\widetilde{\varphi}_0)-\Im(v_0,\widetilde{\varphi}_0)\leq\\ &\Re\int_0^T(u,\mathrm{i}\psi_R(x)\partial_t\widetilde{\eta}_T(t))\mathrm{d}t+\Re\int_0^T(u,(-\triangle)^{\frac{\alpha}{2}}\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t+\\ &\Re\int_0^T(v,\mathrm{i}\psi_R(x)\partial_t\widetilde{\eta}_T(t))\mathrm{d}t+\Re\int_0^T(v,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t\lesssim\\ &T^{-1/p}(\widetilde{I}_{R,T}^{1/p}+\widetilde{E}_{R,T}^{1/p})R^{N/q}(\widetilde{I}_R^{1/p}+\widetilde{E}_R^{1/p})R^{N/q-\gamma}T^{1/q},\end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$\widetilde{I}_{R,T}=\int_{\frac{T}{2}}^T(|u|^p,\widetilde{\varphi}(t,x))\mathrm{d}t,\widetilde{I}_R=\int_0^T(|u|^p,\widetilde{\varphi}(t,x))\mathrm{d}t,$$
$$\widetilde{E}_{R,T}=\int_{\frac{T}{2}}^T(|v|^p,\widetilde{\varphi}(t,x))\mathrm{d}t,\widetilde{E}_R=\int_0^T(|v|^p,\widetilde{\varphi}(t,x))\mathrm{d}t.$$

由于

$$\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty,\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^N}|v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty,$$

则对于足够大的T, 有

$$T^{-1/p}\widetilde{I}_{R,T}^{1/p}R^{N/q}+T^{-1/p}\widetilde{E}_{R,T}^{1/p}R^{N/q}\leq-\frac{1}{2}\Im(u_0,\psi_R(x))-\frac{1}{2}\Im(v_0,\psi_R(x)),$$

这就意味着

$$\begin{aligned}&\Re(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^T(|u|^p,\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t+\Re(\lambda_2+\lambda_2)\int_0^T(|v|^p,\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\Im(u_0,\psi_R(x))-\frac{1}{2}\Im(v_0,\psi_R(x))\lesssim\\ &(\widetilde{I}_R^{1/p}+\widetilde{E}_R^{1/p})R^{N/q-\gamma}T^{1/q}.\end{aligned} \tag{48}$$

再令$R=T^\theta,\theta>\frac{1}{\gamma q-N}$. 由Young不等式可得

$$\Re(\lambda_1+\lambda_2-C_1)\int_0^T(|u|^p,\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t+\Re(\lambda_3+\lambda_2-C_1)\int_0^T(|v|^p,\widetilde{\varphi})\mathrm{d}t\lesssim 0.$$

让$T\to\infty$, 从(48)可导出$-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)\lesssim 0$,

这与假设条件(1)矛盾.

注　事实上, 也能证明在定理1.2的条件下, 参数和初值满足条件

(4) $\Re\lambda_1,\Re\lambda_3,\Re\lambda_2>0,-\Im(\int_{\mathbf{R}^N}u_0\mathrm{d}x)-\Im(\int_{\mathbf{R}^N}v_0\mathrm{d}x)>0;$

(5) $\Re\lambda_1,\Re\lambda_3,\Re\lambda_2<0,\Im(\int_{\mathbf{R}^N}u_0\mathrm{d}x)+\Im(\int_{\mathbf{R}^N}v_0\mathrm{d}x)>0$

时, 方程组(1)也不存在全局弱解, 这些条件本质上是等价的.

定理1.3的证明 令ϵ_0满足$C_0\epsilon_0^{-1/q-1-k/\gamma}=2$, 这里$C_0$待定. 由(38)-(39)和$\eta(0)=1$得

$$\begin{aligned}&\Re(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^T(|u|^p,\varphi)\mathrm{d}t+\Re(\lambda_2+\lambda_3)\int_0^T(|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)\lesssim\\&(I_R^{1/p}+E_R^{1/p})R^{N/q}T^{1/q}(T^{-1}+R^{-\gamma}).\end{aligned}\tag{49}$$

令$R=T^{1/\gamma}$, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\Re(\lambda_1+\lambda_2-C_1)|u|^p+\Re(\lambda_2+\lambda_3-C_1)|v|^p,\varphi)\mathrm{d}t-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)\lesssim\\&T^{N/\gamma+1-q}.\end{aligned}\tag{50}$$

由上式可推出

$$-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)\lesssim T^{N/\gamma+1-q}.\tag{51}$$

首先考虑$\mu>\epsilon_0$的情形. 假设$T^*>2$, 对任意的$T\in(2,T^*)$, 由(7)可得

$$\begin{aligned}&-\Im(u_0,\varphi_0)-\Im(v_0,\varphi_0)=\int_{\mathbf{R}^N}(-\Im(u_0+v_0))\psi_R(x)\mathrm{d}x\geq\\&\mu\int_{|x|\geq1}|x|^{-k}\psi(\frac{x}{T^{1/\gamma}})\mathrm{d}x\geq\mu T^{(N-k)/\gamma}\int_{|y|\geq\frac{1}{T^{1/\gamma}}}|y|^{-k}\psi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{52}$$

令$M(T)=\int_{|y|\geq\frac{1}{T^{1/\gamma}}}|y|^{-k}\psi(y)\mathrm{d}y$. 由于$M$是单调递增的, 则对任意的$T\in(2,T^*), M(T)\geq M(2)\geq 0$, 因此由(51)式

$$\mu CM(2)\leq T^{1-q+k/\gamma}.$$

令$C_0:=CM(2)^{-1/(q-1-k/\gamma)}$. 注意到$q-1-k/\gamma>0$, 因此$T\leq C_0\mu^{-1/(q-1-k/\gamma)}$. 取极限$T\to T^*$, 可以得到$T^*\leq C_0\mu^{-1/(q-1-k/\gamma)}\leq 2$, 这与$T>2$矛盾. 这就说明, 当$\mu\in[\epsilon_0,\infty)$时, $T\leq 2$. 接下来考虑$\mu<\epsilon_0$的情形. 如果$T\leq 2$, 因为$2<C_0\mu^{-1/(q-1-k/\gamma)}$, 所以结论成立. 因此只需考虑$T>2$的情形. 利用上述讨论, 可以得到当$\mu\in(0,\epsilon_0)$时, $T^*\leq C_0\mu^{-1/(q-1-k/\gamma)}$.

参考文献:

[1] Akhmediev N N, Ankiewicz A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams[M]. London: Chapman & Hall, 1997.

[2] Bhattarai S. Stability of solitary-wave solutions of coupled NLS equations with power-type nonlinearities[J]. Adv Nonlinear Anal, 2015, 4(2): 73-90.

[3] Kivshar Y S, Agrawal G P. Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals[M]. San Diago: Academic press, 2003.

[4] Manakov S V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves[J]. Sov Phys -JETP, 1974, 38(2): 248-253.

[5] Menyuk C. Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers[J]. IEEE J Quantum Elect, 1987, 23(2): 174-176.

[6] Wadati M, Iizuka T, Hisakado M. A coupled nonlinear Schrödinger equation and optical solitons[J]. J Phys Soc Jpn, 1992, 61(7): 2241-2245.

[7] Menyuk C. Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers[J]. IEEE J Quantum Elect, 1987, 23(2): 174-176.

[8] Bartsch T, Wang Zhiqiang. Note on ground states of nonlinear Schrödinger systems[J]. J Partial Differ Equ, 2006, 19(3): 200-207.

[9] Cipolatti R, Zumpichiatti W. Orbitally stable standing waves for a system of coupled nonlinear Schrödinger equations[J]. Nonlinear Anal Theor Method Appl, 2000, 42(3): 445-461.

[10] Lopes O. Stability of solitary waves of some coupled systems[J]. Nonlinearity, 2006, 19(1): 95-114.
[11] Lopes O. Stability of solitary waves for a generalized nonlinear coupled Schrödinger systems[J]. São Paulo J Math Sci, 2011, 5(2): 175-184.
[12] Nguyen N V, Wang Zhiqiang. Orbital stability of solitary waves for a nonlinear Schrödinger system[J]. Adv Differential Equ, 2011, 16(9/10): 977-1000.
[13] Cely L, Goloshchapova N. Variational and stability properties of coupled NLS equations on the star graph[J]. Nonlinear Anal, 2022, 224: 113056.
[14] Chen Jianqing, Guo Boling. Blow-up profile to the solutions of two-coupled Schrödinger equations[J]. J Math Phys, 2009, 50(2): 023505.
[15] 高毅立. 非线性薛定谔方程组解的爆破准则[J]. 数学进展, 2021, 50(5): 723-728.
[16] 朱琳, 李春花. 一类带幂型非线性薛定谔方程组的爆破准则[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2023, 40(1): 16-24.
[17] Gustafson S, Nakanishi K, Tsai T-P. Global dispersive solutions for the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions[J]. Ann Henri Poincare, 2007, 8(7): 1303-1331.
[18] Gustafson S, Nakanishi K, Tsai T-P. Scattering for the Gross-Pitaevskii equation[J]. Math Res Lett, 2006, 13(2): 273-285.
[19] Fujiwara K, Ozawa T. Remarks on global solutions to the Cauchy problem for semirelativistic equations with power type nonlinearity[J]. Int J Math Anal, 2015, 9(53): 2599-2610.
[20] Kwaśnicki M. Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator[J]. Fract Calc Appl Anal, 2017, 20(1): 7-51.
[21] Cho Y, Hajaiej H, Hwang G, et al. On the Cauchy problem of fractional Schrödinger equation with Hartree type nonlinearity[J]. Funkcial Ekvac, 2013, 56(2): 193-224.
[22] Dao T A, Reissig M. Blow-up results for semi-linear structurally damped σ-evolution equations[A]. // In: Anomalies in Partial Differential Equations[C]. Berlin: Springer International Publishing, 2021, 213-245.
[23] Christ F M, Weinstein M I. Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation[J]. J Funct Anal, 1991, 100(1): 87-109.

Blow-up results of mixed fractional Schrödinger equations with nongauge power nonlinearity

PU Jun[1,2], SHI Qi-hong[1]

(1. Department of Mathematics, Lanzhou University of Techenology, Lanzhou 730050, China;
2. Gansu Earthquake Agency, Lanzhou 730050, China)

Abstract: This paper is concerned with the Cauchy problem of a mixed fractional Schrödinger equations with nongauge nonlinearities. Different from the classical case, this system no longer preserves the mass and the energy in time. The sufficient conditions for the blowup of the system and the lifespan of weak solutions with special initial data are respectively derived by an effective test function and contradiction argument.

Keywords: existence; test function; finite time blow-up; lifespan of solutions

MR Subject Classification: 35B44