高校应用数学学报
2025, 40(1): 15-28

延迟索赔数目随机的时依更新风险模型破产概率的渐近估计

刘　扬[1,2,3]，　傅可昂[1,2,*]

(1. 浙大城市学院 数字金融研究院，浙江杭州 310015;
2. 浙大城市学院 计算机与计算科学学院, 浙江杭州 310015;
3. 浙江大学 数学科学学院, 浙江杭州 310058)

摘　要: 考虑带有延迟索赔的非标准更新风险模型, 其中每个(主)索赔都伴有随机个延迟索赔, 在索赔额与索赔发生时间存在某种相依关系且索赔额服从次指数分布的条件下, 得到了该风险模型有限时间破产概率的渐近估计.

关键词: 延迟索赔; 更新风险模型; 破产概率; 次指数分布族; 时依结构
中图分类号: O211.4
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2025)01-0015-14

§1　引　言

由于保险公司经营多种业务, 一旦有事故发生往往会触发多种类型的索赔, 其中有些索赔可以立即进行赔付(称为主索赔), 还有一些索赔则需要延迟一段时间后才申请赔付(比如因台风暴雨等极端天气导致房屋浸泡而产生的系列损失). 基于上述情况, 本文考虑延迟索赔数目随机的一类风险模型.

记第$i(i \geq 1)$次事故引起的额度为X_i的主索赔发生于τ_i时刻, 同时伴有M_i个延迟索赔且索赔额分别为$Y_{ij}, 1 \leq j \leq M_i$, 其中$\{M_i, i \geq 1\}$为一列独立同分布(i.i.d.)的非负整值随机变量序列且与一般随机变量M同分布. 令主索赔的发生时间间隔$\{\theta_i, i \geq 1\}$为i.i.d.的非负随机变量序列, 其共同分布为G且均值有限, 其中$\theta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \tau_0 = 0$, 则由$\{\tau_i, i \geq 1\}$序列构成的计数过程$\{N_t, t \geq 0\}$为一更新过程, 相应的更新函数记为$\lambda_t = \mathrm{E}N_t$. 令$Q_{ij}$为$Y_{ij}$相对于其主索赔$X_i$发生时刻的随机延后时间, 假设$\{X_i, i \geq 1\}$, $\{Y_{ij}, i \geq 1, j \geq 1\}$和$\{Q_{ij}, i \geq 1, j \geq 1\}$ 均为i.i.d.的非负随机变量序列, 其共同分布分别为F_1, F_2和H. 于是, 截止到$t(\geq 0)$时刻, 保险公司的盈余过程可

收稿日期: 2023-09-18　　修回日期: 2024-06-30
*通讯作者: fuka@hzcu.edu.cn
基金项目: 浙江省自然科学基金(LY23A010001)

表示为

$$U(t)=x\mathrm{e}^{rt}+c\int_0^t \mathrm{e}^{r(t-s)}\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N_t}X_i\mathrm{e}^{r(t-\tau_i)}-\sum_{i=1}^{N_t}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{r(t-\tau_i-Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le t\}}, \tag{1}$$

其中x为保险公司初始盈余, r为常数利息力, c表示保费收入率. 记

$$D(t)=\sum_{i=1}^{N_t}\Big(X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le t\}}\Big), t\ge 0 \tag{2}$$

为保险公司截至时刻t的理赔总额. 由此, 模型(1)在时刻$T>0$之前的有限时间破产概率可定义为

$$\psi(x,T)=\mathrm{P}\Big(\inf_{0\le s\le T}U(s)<0\mid U(0)=x\Big).$$

带有延迟索赔的风险模型由于较符合保险实务, 是众多学者广泛关注的热点问题, 具体可见参考文献[1-7]. 需要注意的是, 上述文献仅考虑了主副索赔成对发生的情况, 而在实际意外中是极有可能触发一系列延迟索赔的. 于是文献[8]提出了延迟索赔数目随机的风险模型, 并在重尾情形下得到了有限时间破产概率的渐近估计. 随后, 文献[9]在文献[8]模型的基础上考虑了索赔额为相依随机变量序列, 并放宽了索赔时间间隔序列间的独立性假设. 同时, 考虑到保险实务中的不确定因素, 文献[10]提出了一类带扰动的延时索赔数目随机的风险模型. 然而, 文献[8-10]中关于主(延迟)索赔额与相应的索赔发生时间之间的独立性假设可能是不现实的. 以车险为例, 上一年的多次索赔往往会导致次年保费折扣率降低, 因此投保人选择小额索赔不上报, 从而人为延长了索赔发生的等待时间, 也就导致了索赔额度与索赔发生时间的某种相依性. 有鉴于此, 本文在主(延迟)索赔与其发生时间之间具有某种相依结构的条件下, 考虑带随机个延迟索赔的风险模型(1)的有限时间渐近破产概率. 本文剩余部分结构如下: §2介绍模型相关假设条件及主要结论, §3则给出结论的主要证明过程.

§2 预备知识及主要结论

先给出下文常用的符号表述. 对于正值函数$l(x)$和$s(x)$, 若$\lim_{x\to\infty}\sup l(x)/s(x)\le 1$, 则记作$l(x)\lesssim s(x)$; 若$\lim_{x\to\infty}\inf l(x)/s(x)\ge 1$, 则记作$l(x)\gtrsim s(x)$; 若$\lim_{x\to\infty}l(x)/s(x)=1$, 则记作$l(x)\sim s(x)$; 若$\lim_{x\to\infty}l(x)/s(x)=0$, 则记作$l(x)=o\big(s(x)\big)$; 若$\lim_{x\to\infty}l(x)/s(x)=C<\infty$, 则记作$l(x)=O\big(s(x)\big)$, 其中$C$为一正值常数. 若$l(x)=O\big(s(x)\big)$和$s(x)=O\big(l(x)\big)$同时成立, 则记作$l(x)\asymp s(x)$(弱渐近等价). 此外, 若无特别说明, 下文所涉及极限均是关于$x\to\infty$所求.

为结合保险实务, 更好地刻画实际运营中的极端事件, 还需引入几类重尾分布子族. 若对任意的$n\ge 2$, 有$\overline{V^{n*}}(x)\sim n\overline{V}(x)$, 则称$V$属于次指数分布族, 记作$V\in\mathcal{S}$, 其中$\overline{V^{n*}}(x)=1-V^{n*}$, V^{n*}表示V的n重卷积. 若对任意的$y>0$, 有$\overline{V}(x+y)\sim\overline{V}(x)$, 则称$V$属于长尾分布族, 记作$V\in\mathcal{L}$. 金融保险背景下, 关于重尾分布的性质及更多子族介绍, 可参考文献[11-12].

对于索赔额与其发生时间之间的相依关系, 本文拟采用文献[13]中提出的相依结构. 首先, 在主索赔与其对应的发生时间间隔之间建立如下的相依关系.

假设A $\{(X_i,\theta_i),\ i\ge 1\}$构成i.i.d.随机对序列且与一般随机对$(X,\theta)$同分布, 其中$(X,\theta)$的分量满足

$$\mathrm{P}(X>x\mid\theta=t)\sim\mathrm{P}(X>x)h(t) \tag{3}$$

对所有的$t \in [0,\infty)$一致成立, 其中$h(\cdot):[0,\infty) \to (0,\infty)$可测且满足 $\inf_{0\le t} h(t) > 0$.

对延迟索赔Y_{ij}和其延迟时间则建立如下的相依关系.

假设B $\{(Y_{ij},\theta_i+Q_{ij}), i \ge 1, j \ge 1\}$构成i.i.d.随机对序列且与一般随机对$(Y,\theta+Q)$同分布, 其中$(Y,\theta+Q)$满足

$$\mathrm{P}(Y > x \mid \theta+Q=t) \sim \mathrm{P}(Y > x)\varphi(t) \tag{4}$$

对所有的$t \in [0,\infty)$一致成立, 其中$\varphi(\cdot):[0,\infty) \to (0,\infty)$可测且满足 $\inf_{0\leqslant t} \varphi(t) > 0$.

注2.1 在(3)-(4)式中, 若t不是θ或$\theta+Q$的可能取值, 则上述条件概率可视为无条件概率, 即对应这类t有$h(t)=1$或$\varphi(t)=1$. 此外, 需要指出的是假设A-假设B中的时依假设条件是温和的, 如文献[13]中所述, 这类相依结构包含了一部分常用作刻画相依结构的函数, 诸如: Ali-Mikhail-Haq copula函数, Farlie-Gumbel-Morgenstern copula函数以及Frank二元copula函数.

假设C 序列$\{X_i, i \ge 1\}$与序列$\{Y_{ij}, i \ge 1, 1 \le j \le M_i\}$相互独立, $\{\theta_i, i \ge 1\}$与序列$\{Q_{ij}, i \ge 1, 1 \le j \le M_i\}$也是相互独立的, 而$\{M_i, i \ge 1\}$与上述任何序列互为独立序列.

注2.2 模型(1)中的两类理赔虽同时触发, 但两者分布函数各异且对应着保险公司不同类型的理赔形式. 假设A和假设B所定义的相依结构是指在给定时间下理赔额的条件尾概率, 并不会影响主索赔额与延迟索赔额之间的独立性假设.

下面给出本文的主要结论.

定理2.1 考虑延迟索赔数目随机的更新风险模型(1), 其中$F_1 \in \mathcal{S}$, $F_2 \in \mathcal{S}$. 假设存在某个$\delta > 0$使得$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\delta M} < \infty$. 在假设A-假设C成立的条件下, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1 \le T) > 0$的$T$,

(i) 如果$\overline{F}_2(x) \asymp \overline{F}_1(x)$, 则有

$$\psi(x,T) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s + \mathrm{E}M \cdot \int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*} \overline{F}_2(x\mathrm{e}^{r(s+u^*)})\mathrm{d}\hat{\lambda}_s H(\mathrm{d}u^*), \tag{5}$$

其中

$$\tilde{\lambda}_t = \int_{0-}^{t} (1+\lambda_{t-s^*})h(s^*)G(\mathrm{d}s^*), \quad \hat{\lambda}_t = \int_{0-}^{t} (1+\lambda_{t-s^*})\varphi(s^*+u^*)G(\mathrm{d}s^*).$$

(ii) 如果$\overline{F}_2(x) = o(\overline{F}_1(x))$, 则有

$$\psi(x,T) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s. \tag{6}$$

当模型(1)中的随机数目M_i退化成常数m时, 定理2.1则简化成如下形式.

推论2.1 对于风险模型(1), 令$M_i = m$. 如果$F_1 \in \mathcal{S}$, $F_2 \in \mathcal{S}$, 那么在假设A-假设C成立的条件下, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1 \le T) > 0$的$T$,

(i) 如果$\overline{F}_2(x) \asymp \overline{F}_1(x)$, 则有

$$\psi(x,T) \sim \int_{0-}^{T} \overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s + m \cdot \int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*} \overline{F}_2(x\mathrm{e}^{r(s+u^*)})\mathrm{d}\hat{\lambda}_s H(\mathrm{d}u^*),$$

其中

$$\tilde{\lambda}_t = \int_{0-}^{t} (1+\lambda_{t-s^*})h(s^*)G(\mathrm{d}s^*), \quad \hat{\lambda}_t = \int_{0-}^{t} (1+\lambda_{t-s^*})\varphi(s^*+u^*)G(\mathrm{d}s^*).$$

(ii) 如果$\overline{F}_2(x)=o(\overline{F}_1(x))$, 则有

$$\psi(x,T)\sim\int_{0-}^{T}\overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s.$$

注2.3 当$m=1$时, 即可得到文献[14]的定理2.1. 本文中的定理2.1和推论2.1中允许主索赔伴随有随机个和多个延迟索赔, 将文献[14]中的结论推广至更贴近保险业实务的情形中, 一定程度上丰富了带有延迟索赔风险模型的研究.

§3 主要结论的证明

在给出定理2.1的证明之前, 首先给出几个引理, 其中引理3.1来自文献[13].

引理3.1 支撑在$[0,\infty)$上的分布函数F, 如果$F\in\mathcal{L}$当且仅当存在函数

$$l(\cdot):(0,\infty)\to(0,\infty)$$

满足

(i) 对于所有$x>0$, 有$l(x)<x/2$;

(ii) $l(x)\to\infty$;

(iii) $l(\cdot)$在∞处缓慢变化, 使得对每个$K>0$, 有$\overline{F}(x-Kl(x))\sim\overline{F}(x)$.

引理3.2 令$M_i=m_i, i\geq1$, 其中$m_i\geq0$为实数. 在定理2.1的条件下, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\leq T)>0$的$T$, 有

$$\text{(i)}\quad \mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}}>x,N_T=n\Big)\sim$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\mathrm{P}\Big(Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}}>x,N_T=n\Big)$$

和

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}}>x,N_T=n\Big)\sim$$
$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}}>x,N_T=n\Big),$$

其中$\sum_{j=1}^{0}=0$.

证 根据文献[14]中引理4.2类似的证明方法, 稍作修改, (i)和(ii)即可得证.

引理3.3 考虑模型(1), 在定理2.1的条件下, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\leq T)>0$的$T$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}}>x,N_T=n\Big)\sim$$
$$\mathrm{E}M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\leq T\}}>x,N_T=n\Big).\tag{7}$$

证 为方便表述, 对任意非负整数集B, 记

$$\overrightarrow{b}_B=(b_i;i\in B),\quad \breve{b}_B=\bigvee_{i\in B}b_i.$$

选取充分大的整数N, 根据

$$\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}=\bigvee\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}\le N$$

是否成立, 对(7)式左侧进行分拆, 分拆后的两部分分别记作$A_1(x,t)$和$A_2(x,t)$. 对于$A_1(x,t)$, 记

$$M_{\{1,2,\cdots,n\}}=\{M_1,\cdots,M_n\},m_{\{1,2,\cdots,n\}}=\{m_1,\cdots,m_n\},n\ge 1,$$

其中$0\le m_i\le N$, 利用引理3.2中的(i), 可得

$$\begin{aligned}&A_1(x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n,\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}\le N\Big)=\\&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,\cdots,N\}^n}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\times\\&\mathrm{P}\Big(M_{\{1,2,\cdots,n\}}=m_{\{1,2,\cdots,n\}}\Big)\sim\\&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,\cdots,N\}^n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\mathrm{P}\Big(Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\times\\&\mathrm{P}\Big(M_{\{1,2,\cdots,n\}}=m_{\{1,2,\cdots,n\}}\Big)\sim\\&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\times\\&\sum_{m_i=0}^{N}m_i\mathrm{P}\Big(M=m_i\Big)\mathrm{P}\Big(\breve{M}_{\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i\}}\le N\Big),\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,\cdots,N\}^n}:=\sum_{m_1=0}^{N}\sum_{m_2=0}^{N}\cdots\sum_{m_n=0}^{N}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}A_1(x,T)\lesssim&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\sum_{m_i=0}^{\infty}m_i\mathrm{P}(M=m_i)=\\&\mathrm{E}M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big).\end{aligned}\tag{9}$$

由于$\mathrm{E}M<\infty$, 对任意充分小$\varepsilon>0$, 存在着充分大的N, 使得

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\Big(\breve{M}_{\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i\}}>N\Big)\le\mathrm{P}\Big(\breve{M}_{\{1,2,\cdots,n\}}>N\Big)\le\\&N\mathrm{P}(M>N)\le\sum_{m=N+1}^{\infty}m\mathrm{P}(M=m)<\varepsilon,\end{aligned}\tag{10}$$

其中$1\le i\le n\le N$. 因此, 结合(8)式与(10)式可知, 存在充分大的N, 使得

$$A_1(x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\sum_{m_i=0}^{N}m_i\mathrm{P}(M=m_i)\times$$
$$\Big(1-\mathrm{P}\big(\check{M}_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{i\}}>N\big)\Big)\gtrsim$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big)(\mathrm{E}M-\varepsilon)(1-\varepsilon):=$$
$$(1-\varepsilon K_1)\mathrm{E}M\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big),\tag{11}$$

因此, 由(9)式和(11)式可知

$$(1-\varepsilon K_1)\mathrm{E}M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big)\lesssim A_1(x,T)\lesssim$$
$$\mathrm{E}M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=n\Big).\tag{12}$$

关于$A_2(x,T)$, 由引理3.1中的(ii)可得

$$A_2(x,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n,\check{M}_{\{1,\cdots,n\}}>N\Big)\le$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n,M_k>N\Big)\le$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m_k=N+1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{k\}}\in\{0,1,\cdots\}^{n-1}}\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i+1}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=n)\times$$
$$\mathrm{P}(M_{\{1,\cdots,n\}}=m_{\{1,\cdots,n\}}).$$

记

$$\Omega_{n,t}=\{(s_1,\cdots,s_n)\in[0,t]^n:t_n\le t\},$$

其中$t_i=\sum_{k=1}^{i}s_k,1\le i\le n$. 根据文献[14]中的引理4.4可得, 对任意的$\epsilon>0$, 存在常数C, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\le T)>0$的$T$, 有

$$A_2(x,T)\lesssim\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m_k=N+1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{k\}}\in\{0,1,\cdots\}^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int\cdots\int_{\Omega_{n,T}}\int_{0-}^{T-t_i}C\times$$
$$(1+\epsilon)^{m_1+m_2+\cdots+m_n+n}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{i1})}>x\Big)\overline{G}(T-t_n)\varphi(s_i+u_{i1})\times$$
$$H(\mathrm{d}u_{i1})\prod_{k=1}^{n}G(\mathrm{d}s_k)\mathrm{P}(M_{\{1,\cdots,n\}}=m_{\{1,\cdots,n\}})\lesssim$$
$$C\mathrm{E}((1+\epsilon)^M\mathbf{1}_{\{M>N\}})\mathrm{E}\Big[\big(N_T+1\big)\Big((1+\epsilon)\mathrm{E}(1+\epsilon)^M\Big)^{N_T}\Big]\times$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\int\cdots\int_{\Omega_{n,T}}\int_{0-}^{T-t_i}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{i1})}>x\Big)\overline{G}(T-t_n)\varphi(s_i+u_{i1})H(\mathrm{d}u_i)\prod_{k=1}^{n}G(\mathrm{d}s_k),$$

其中在第一步中利用了引理3.2中的(i). 由于存在某个$\delta > 0$, 使得$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\delta M} < \infty$, 那么对任意的$\varepsilon > 0$, 存在充分大的$N$与充分小的$\epsilon$, 使得

$$\mathrm{E}\big((1+\epsilon)^M \mathbf{1}_{\{M>N\}}\big) < \varepsilon.$$

由$\{N_t, t \geq 0\}$为更新过程可知, 存在δ', 使得$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\delta' N_t} < \infty$. 于是利用Cauchy-Schwarz不等式, 选取充分小的ϵ, 使得

$$\mathrm{E}\Big[\big(N_T+1\big)\Big((1+\epsilon)\mathrm{E}(1+\epsilon)^M\Big)^{N_T}\Big] < \infty.$$

因此, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在充分大的N和充分小的ϵ, 使得

$$\begin{aligned} A_2(x,T) \lesssim{}& \varepsilon C \mathrm{E}\Big[\big(N_T+1\big)\Big((1+\epsilon)\mathrm{E}(1+\epsilon)^M\Big)^{N_T}\Big]\times \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\leq T\}} > x, N_T = n\Big) \leq \\ & \varepsilon K_2 \mathrm{E}M \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\leq T\}} > x, N_T = n\Big), \end{aligned}$$

其中

$$K_2 = C\cdot \mathrm{E}\Big[\big(N_T+1\big)\Big((1+\epsilon)\mathrm{E}(1+\epsilon)^M\Big)^{N_T}\Big].$$

由此再结合(12)式, 可得(7)式成立, 引理3.3得证.

引理3.4 考虑模型(1), 在定理2.1的条件下, 如果

$$\overline{F}_2(x) \asymp \overline{F}_1(x),$$

那么对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1 \leq T) > 0$的$T$, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i \mathrm{e}^{-r\tau_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}} > x, N_T = k\Big) \sim \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k} X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i} > x, N_T = k\Big) + \\ &\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\leq T\}} > x, N_T = k\Big)\bigg). \end{aligned} \tag{13}$$

证 由

$$\overline{F}_2(x) \asymp \overline{F}_1(x)$$

可知, 存在慢变函数

$$l(\cdot) : (0,\infty) \to (0,\infty)$$

满足引理3.1(iii)中的条件. 因此, 通过

$$\sum\nolimits_{i=1}^{k} X_i \mathrm{e}^{-r\tau_i}$$

取值分别属于

$$(0, l(x)], \quad (x - l(x), \infty), \quad (l(x), x - l(x)]$$

这三个区间上, 将(13)左侧拆分成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k\Big):=$$
$$U_1(x,T)+U_2(x,T)+U_3(x,T).$$

对于$U_1(x,T)$, 由引理3.1中的(iii)可推出

$$\begin{aligned}&U_1(x,T)\le\\&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x-l(x),N_T=k\Big)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,k\}}\in\{0,1,\cdots\}^k}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k\Big)\times\\&\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}})\sim\\&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k\Big),\end{aligned}\tag{14}$$

其中在第二步中利用了$\{M_i,i\le 1\}$与任何序列之间的独立性.

对于$U_2(x,T)$, 由文献[13]中的引理4.2可得

$$\begin{aligned}&U_2(x,T)\le\\&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x-l(x),N_T=k\Big)\sim\\&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=k\Big).\end{aligned}\tag{15}$$

对于$U_3(x,T)$, 记

$$\begin{aligned}\mathit{\Omega}_{m,t,t_k}=\{&u_{1,(1,2,\cdots,m_1)}\in[0,t-t_1]^{m_1},\\&u_{2,(1,2\cdots,m_2)}\in[0,t-t_2]^{m_2},\cdots,u_{k,(1,2,\cdots,m_k)}\in[0,t-t_k]^{m_k}\},k\ge 1.\end{aligned}$$

采用引理3.3中类似的证明方法, 选取充分大的整数N, 由

$$\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}\le N$$

是否成立, 将$U_3(x,T)$拆成$U_{31}(x,T)$和$U_{32}(x,T)$两个部分.

采用$A_1(x,T)$相类似的证明方法可得

$$
\begin{aligned}
&U_{31}(x,T)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>l(x),\\
&\qquad\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>l(x),N_T=k,\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}\le N\Big)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,1,\cdots,N\}^k}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,\\
&\qquad\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>l(x),\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>l(x),N_T=k\Big)\times\\
&\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}})\sim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,k\}}\in\{0,1,\cdots,N\}^k}\int\cdots\int_{\Omega_{k,T}}\int\cdots\int_{\Omega_{k,T,t_k}}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>x,\\
&\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}>l(x),\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>l(x)\Big)\prod_{i=1}^{k}h(s_i)\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m_i}\varphi(s_i+u_{ij})\times\\
&\overline{G}(T-t_k)\prod_{p=1}^{k}\prod_{q=1}^{m_p}H(\mathrm{d}u_{pq})\prod_{p=1}^{k}G(\mathrm{d}s_p)\cdot\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}}).
\end{aligned}\tag{16}
$$

由引理3.1(i)可知, 对任意函数$\alpha(x)=o(1)$, 存在慢变函数$\gamma(x)$使得

$$\alpha(x)=o(1)\overline{F_1}(\gamma(x))=o(1)\overline{F_2}(\gamma(x))$$

成立. 于是采用文献[14]中引理4.3类似的证明方法, 利用引理3.1中的(i)可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>x,\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}>l(x),\\
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>l(x)\Big)\sim\\
&o(1)\Big(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}>x\Big)+\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>x\Big)\Big).
\end{aligned}\tag{17}
$$

结合(16)式和(17)式可知

$$
\begin{aligned}
&U_{31}(x,T)\sim\\
&o(1)\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=k\Big)+\\
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k,\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}\le N\Big)\Big).
\end{aligned}\tag{18}
$$

对于$U_{32}(x,T)$, 对任意$\omega>0$和所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\le T)>0$的$T$, 有

$$U_{32}(x,T)\le$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{g=1}^{k}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>l(x),$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>l(x),N_T=k,M_g>N\Big)\le$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{g=1}^{k}\sum_{m_g=N+1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{g\}}\in\{0,1,\cdots\}^{k-1}}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,$$
$$\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>l(x),\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>l(x),N_T=k\Big)\times$$
$$\mathrm{P}(M_{\{1,\cdots,n\}}=m_{\{1,\cdots,n\}})\lesssim$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{g=1}^{k}\sum_{m_g=N+1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}\setminus\{g\}}\in\{0,1,\cdots\}^{k-1}}\int\cdots\int_{\Omega_{k,T}}\int\cdots\int_{\Omega_{k,T,t_k}}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}+$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>x,\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-rt_i}>l(x),\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(t_i+u_{ij})}>l(x)\Big)\times$$
$$\prod_{i=1}^{k}h(s_i)\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m_i}\varphi(s_i+u_{ij})\overline{G}(t-t_k)\prod_{p=1}^{k}\prod_{q=1}^{m_p}H(\mathrm{d}u_{pq})\prod_{p=1}^{k}G(\mathrm{d}s_p)\times$$
$$\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}}).$$

利用(16)式中类似的证明方法, 结合(17)式可得

$$U_{32}(x,T)\lesssim o(1)\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=k\Big)+$$
$$\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k,\breve{M}_{\{1,\cdots,n\}}>N\Big)\bigg).\tag{19}$$

由此, 结合(14)-(15)以及(18)-(19)式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k\Big)\lesssim$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=k\Big)+$$
$$\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=k\Big)\bigg).\tag{20}$$

利用文献[14]中(4.11)式类似的证明方法, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1 \le T) > 0$的$T$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,1,\cdots,\}^k}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)\times\\
&\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}})\ge\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,1,\cdots,\}^k}\mathrm{P}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x\Big)\bigcup\\
&\qquad\qquad\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x\Big), N_T=k\Big)\times\\
&\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}})\ge\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m_{\{1,2,\cdots,n\}}\in\{0,1,\cdots,\}^k}\Big(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x, N_T=k\Big)+\\
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)-\\
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\cdot\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)\Big)\times\\
&\mathrm{P}(M_{\{1,2,\cdots,k\}}=m_{\{1,2,\cdots,k\}})\sim\\
&(1-o(1))\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x, N_T=k\Big)+\\
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)\Big).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)\gtrsim\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x, N_T=k\Big)+\\
&\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x, N_T=k\Big)\Big).
\end{aligned}\tag{21}$$

最后, 结合(20)式和(21)式即得(13)式成立. 引理3.4证毕.

接下来, 开始定理2.1的证明.

定理2.1的证明 通过简单变形, 风险模型(1)等价于

$$U(t)=\mathrm{e}^{rt}\Big(x+c\int_0^t \mathrm{e}^{-rs}\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{N_t}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}-\sum_{i=1}^{N_t}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{r(-\tau_i-Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le t\}}\Big).$$

因此对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\le T)>0$的$T$, 有

$$\psi(x,T)=\mathrm{P}\inf_{0\le s\le T}U(s)<0\mid U(0)=x).$$

这意味着

$$\mathrm{P}\Big(D(T)>x+c\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rs}\mathrm{d}s\Big)\le\psi(x,T)\le\mathrm{P}\Big(D(T)>x\Big). \tag{22}$$

根据(2)式和引理3.4, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\le T)>0$的$T$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\big(D(T)>x\big)=\\&\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{m}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{r(-\tau_i-Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le T\}}>x,N_T=m\Big)\sim\\&\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{m}X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=m\Big)+\\&\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{P}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{M_i}Y_{ij}\mathrm{e}^{r(-\tau_i-Q_{ij})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{ij}\le t\}}>x,N_T=m\Big).\end{aligned} \tag{23}$$

令$\beta=\limsup\overline{F}_2(x)/\overline{F}_1(x)$, 根据引理3.3可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\big(D(T)>x\big)\sim\\&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}\big(X_i\mathrm{e}^{-r\tau_i}>x,N_T=m\big)+\\&\mathrm{E}M\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}\Big(Y_{i1}\mathrm{e}^{-r(\tau_i+Q_{i1})}\mathbf{1}_{\{\tau_i+Q_{i1}\le T\}}>x,N_T=m\Big)\sim\\&\sum_{i=1}^{\infty}\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-s^*}\overline{F}_1\big(x\mathrm{e}^{r(v+s^*)}\big)\mathrm{P}\big(\tau_{i-1}\in\mathrm{d}v\big)h\big(s^*\big)G\big(\mathrm{d}s^*\big)+\\&\mathrm{E}M\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*}\int_{0-}^{T-s^*}\overline{F}_2\big(x\mathrm{e}^{r(v+s^*+u^*)}\big)\mathrm{P}\big(\tau_{i-1}\in\mathrm{d}v\big)\times\\&\varphi\big(s^*+u^*\big)G\big(\mathrm{d}s^*\big)H\big(\mathrm{d}u^*\big)\cdot\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}=\\&\int_{0-}^{t}\Big(\overline{F}_1\big(x\mathrm{e}^{rs^*}\big)+\int_{0-}^{t-s^*}\overline{F}_1\big(x\mathrm{e}^{r(v+s^*)}\big)\mathrm{d}\lambda_v\Big)h\big(s^*\big)G\big(\mathrm{d}s^*\big)+\\&\mathrm{E}M\cdot\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*}\Big(\overline{F}_2\big(x\mathrm{e}^{r(s^*+u^*)}\big)+\int_{0-}^{T-s^*}\overline{F}_2\big(x\mathrm{e}^{r(v+s^*+u^*)}\big)\mathrm{d}\lambda_v\Big)\times\\&\varphi\big(s^*+u^*\big)G\big(\mathrm{d}s^*\big)H\big(\mathrm{d}u^*\big)\cdot\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}=\\&\int_{0-}^{T}\overline{F}_1\big(x\mathrm{e}^{rs}\big)\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s+\mathrm{E}M\cdot\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*}\overline{F}_2\big(x\mathrm{e}^{r(s+u^*)}\big)\mathrm{d}\hat{\lambda}_sH(\mathrm{d}u^*)\cdot\mathbf{1}_{\{\beta>0\}},\end{aligned} \tag{24}$$

其中在最后一步利用了类似文献[15]中将跳跃与积分相加的技巧. 因此有

$$\mathrm{P}\big(D(T)>x\big)\sim \Big(\int_{0-}^{T}\overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s+\mathrm{E}M\cdot\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*}\overline{F}_2(x\mathrm{e}^{r(s+u^*)})\mathrm{d}\hat{\lambda}_s H(\mathrm{d}u^*)\cdot\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}\Big). \tag{25}$$

记

$$c\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rs}\mathrm{d}s:=y,$$

由(25)式可得, 对所有满足$\mathrm{P}(\tau_1\le T)>0$的$T$有

$$\mathrm{P}\big(D(T)>x+y\big)\sim \mathrm{P}\big(D(T)>x(1+o(1))\big)\sim \Big(\int_{0-}^{T}\overline{F}_1\big(x\mathrm{e}^{rs}\big)\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s+\mathrm{E}M\cdot\int_{0-}^{T}\int_{0-}^{T-u^*}\overline{F}_2\big(x\mathrm{e}^{r(s+u^*)}\big)\mathrm{d}\hat{\lambda}_s H(\mathrm{d}u^*)\cdot\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}\Big),$$

其中最后一步利用了F_1 $(F_2)\in\mathcal{S}\subset\mathcal{L}$及$\mathcal{S}$族性质. 由$\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}=1$即得(5)式成立. 至于(6)式, $\overline{F}_2(x)=o(\overline{F}_1(x))$可知$\mathbf{1}_{\{\beta>0\}}=0$. 进而可得

$$\psi(x,T)\sim\int_{0-}^{T}\overline{F}_1(x\mathrm{e}^{rs})\mathrm{d}\tilde{\lambda}_s.$$

即定理2.1证毕.

参考文献:

[1] Waters H R, Papatriandafylou A. Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement[J]. Insur Math Econ, 1985, 4: 113-122.

[2] Yuen K C, Guo Junyi, Ng W. On ultimate ruin in a delayed-claims risk model[J]. J Appl Probab, 2005, 42(1): 163-174.

[3] Xiao Yuntao, Guo Junyi. The compound binomial risk model with time-correlated claims[J]. Insur Math Econ, 2007, 41(1): 124-133.

[4] Gao Qingwu, Zhuang Jun, Huang Zhongquan. Asymptotics for a delay-claim risk model with diffusion, dependence structures and constant force of interest[J]. J Comput Appl Math, 2019, 353: 219-231.

[5] Li Jinzhu. On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications[J]. Stat Probabil Lett, 2013, 83(9): 2081-2087.

[6] Yang Haizhong, Li Jinzhu. On asymptotic finite-time ruin probability of a renewal risk model with subexponential main claims and delayed claims[J]. Stat Probabil Lett, 2019, 149: 153-159.

[7] 李会杰, 倪佳林, 傅可昂. 一类带投资和副索赔的二维时依风险模型破产概率的渐近估计[J]. 高校应用数学学报, 2017, 32(3): 283-294.

[8] Li Jinzhu. Asymptotic ruin probabilities for a renewal risk model with a random number of delayed claims[J]. J Ind Manag Optim, 2023, 19(6): 3840-3853.

[9] Liu Xijun, Gao Qingwu, Chen Yiyang. Uniform asymptotics for a risk model with constant force of interest and a random number of delayed claims[J]. Stochastics, 2024, 96(7): 1817-1839.

[10] Liu Xijun, Gao Qingwu, Dong Zimai. Asymptotics for a diffusion-perturbed risk model with dependence structures, constant interest force, and a random number of delayed claims[J]. Stoch Models, 2024, 40(1): 97-122.
[11] Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. Berlin: Springer, 1997.
[12] Foss S, Korshunov D, Zachary S. An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions[M]. New York: Springer, 2011.
[13] Li Jinzhu, Tang Qihe, Wu Rong. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model[J]. Adv Appl Probab, 2010, 42(4): 1126-1146.
[14] Liu Yang, Chen Zhenlong, Fu Keang. Asymptotics for a time-dependent renewal risk model with subexponential main claims and delayed claims[J]. Stat Probabil Lett, 2021, 177: 109174.
[15] Klebaner F C. Introduction to Stochastic Calculus with Applications[M]. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2005.

Asymptotic estimates for a time-dependent renewal risk model with main claims and a random number of delayed claims

LIU Yang[1,2,3], FU Ke-ang[1,2]

(1. Institute of Digital Finance, Hangzhou City University, Hangzhou 310015, China;
2. School of Computer and Computing Science, Hangzhou City University, Hangzhou 310015, China;
3. School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: This paper considers a nonstandard renewal risk model with delayed claims, in which each (main) claim induces a random number of delayed claims. Assume that the claim sizes and the inter-arrival times obey some dependent structure, the distributions of the main claim sizes and delayed claim sizes are heavy-tailed. When the initial surplus tends to infinity, the asymptotic estimation of the finite-time ruin probability of the risk model is obtained.

Keywords: delayed claim; renewal risk model; ruin probability; subexponential class; time-dependence

MR Subject Classification: 62P05; 62E10