高校应用数学学报
2025, 40(1): 120-126

$\mathcal{QF}$-分配偏序集

李美琪, 陈家柏, 张文锋*

(江西科技师范大学 数学科学学院, 江西南昌 330038)

摘　要: 文中引入了$\mathcal{QF}$-分配偏序集的概念并对其一些性质进行了讨论, 证明了: (1) 一偏序集P是$\mathcal{QF}$-分配的当且仅当由P中所有有限集生成的cut构成的集族也是$\mathcal{QF}$-分配的; (2) 一具有$\mathcal{F}$-性质的偏序集P是$\mathcal{F}$-分配的当且仅当P是分配和$\mathcal{QF}$-分配的; (3) 一偏序集P是广义完全分配的当且仅当P是Frink拟连续和$\mathcal{QF}$-分配的.

关键词: $\mathcal{QF}$-分配偏序集; 广义完全分配偏序集; Frink拟连续偏序集

中图分类号: O153; O189

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2025)01-0120-07

§1　引　言

无论是从数学的角度还是从计算机科学的角度, Domain理论都引起了广泛的关注[1-2]. Domain理论研究的一个重要方面是尽可能地将连续格(Domain)理论推广到更为一般的格序结构上去. 从正规完备化不变性的角度, Erné[3]利用cut算子将连续Domain推广至一般偏序集, 引入了一种全新的连续性, 即偏序集的预连续性. 沿用Erné的思路, 文[4-6]分别引入了Frink拟连续偏序集, 强代数偏序集, 广义完全分配偏序集以及广义强代数偏序集等概念, 讨论了它们的一些性质, 特别地, 证明了Frink拟连续性、强代数性、广义完全分配性以及广义强代数性均是完备化不变性质. 为了讨论这些偏序集之间的关系, 文[7]利用cut算子将$\mathcal{F}$-分配格[8]推广至一般偏序集情形, 引入了$\mathcal{F}$-分配偏序集的概念, 证明了一偏序集是强代数的当且仅当它是预代数和$\mathcal{F}$-分配的当且仅当它是严格无限分配和广义强代数的, [7]还证明了一偏序集P是$\mathcal{F}$-分配的当且仅当由P中所有有限集生成的cut构成的集族也是$\mathcal{F}$-分配的. 在本文中, 作为$\mathcal{F}$-分配偏序集的推广, 首先引入了$\mathcal{QF}$-分配偏序集的概念, 其关键点是将“点”与“点”之间的way below关系推广至“集”与“集”之情形, 给出了它的若干刻画, 首先, 证明了一偏序集P是$\mathcal{QF}$-分配的当且仅当由P中所有有限集生成的cut构成的集族也是$\mathcal{QF}$-分配的; 其次, 讨论了$\mathcal{F}$-分配偏序集、$\mathcal{QF}$-分配偏序集和广义完全分配偏序集之间的关系, 证明了一具有$\mathcal{F}$-性质的偏序集P是$\mathcal{F}$-分配的当且仅当P是分配和$\mathcal{QF}$-分配的, 以及一偏序集P是广义完全分配的当且仅当P是Frink拟连续和$\mathcal{QF}$-分配的; 最后, 研究了$\mathcal{QF}$-分配偏序集上的一些映射性质, 特别是给出了$\mathcal{QF}$-分配偏序集上的一对对偶范畴.

收稿日期: 2023-05-31　　修回日期: 2024-08-14
*通讯作者, E-mail: zhangwenfeng2100@163.com
基金项目: 国家自然科学基金(12261040); 江西省自然科学基金(20232BAB201007)

§2 预备知识

设P为偏序集, $\forall x\in P$, $A\subseteq P$, 令$\uparrow x=\{y\in P:x\leq y\}$, $\uparrow A=\bigcup\limits_{a\in A}\uparrow a$; 可以对偶定义$\downarrow x$和$\downarrow A$. 称$A$为上(下)集, 若$A=\uparrow A(A=\downarrow A)$. 记$P^{(<\omega)}=\{F\subseteq P:F\text{有限}\}$. 令$A^{\uparrow}$和$A^{\downarrow}$分别为$A$的全体上界和全体下界之集. 记$A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$并称$\delta$为$P$上的cut算子及$\mathcal{H}=\{F^{\delta}:F\in P^{(<\omega)}\}$. 设$G$, $H\subseteq P$, 定义$G\leq H\Leftrightarrow H\subseteq\uparrow G$.

定义2.1[7] 设P为偏序集.

(1) 在P上定义二元关系$\dashv$: $\forall x,\,y\in P$, $x\dashv y\Leftrightarrow\forall F\in P^{(<\omega)}$, 若$y\in F^{\delta}$, 则$x\in\downarrow F$.

(2) P称为$\mathcal{F}$-分配的, 若$\forall x\in P$, $x\in\{y\in P:y\dashv x\}^{\delta}$.

定义2.2[9] 偏序集P称为分配的, 若$\forall x\in P$, $F\in P^{(<\omega)}$, 有$\downarrow x\cap F^{\delta}=(\downarrow x\cap\downarrow F)^{\delta}$.

定义2.3[5] 设P为偏序集.

(1) 在2^P上定义二元关系$\lhd$: $\forall A$, $B\subseteq P$, 称A完全way below B, 记作$A\lhd B$, 若

$$\forall S\subseteq P,\ \uparrow B\cap S^{\delta}\neq\varnothing\Rightarrow\uparrow A\cap S\neq\varnothing.$$

$G\lhd\{x\}$简记为$G\lhd x$及$\Uparrow G=\{x\in P:G\lhd x\}$. 令$s(x)=\{F\in P^{(<\omega)}:F\lhd x\}$.

(2) 称P为广义完全分配的, 若$\forall x\in P$, $\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F:F\in s(x)\}$.

定义2.4[10] 设P为偏序集, $I\subseteq P$称为P的一Frink理想, 若$\forall F\in I^{(<\omega)}$, 有$F^{\delta}\subseteq I$. 记$\mathrm{Fid}(P)$为$P$中所有Frink理想之集.

定义2.5[4] 设P为偏序集.

(1) 在2^P上定义二元关系$\ll_e$: $\forall A$, $B\subseteq P$, $A\ll_e B\Leftrightarrow\forall I\in\mathrm{Fid}(P)$, 若$\uparrow B\cap I^{\delta}\neq\varnothing$, 则$\uparrow A\cap I\neq\varnothing$. $F\ll_e\{x\}$简记为$F\ll_e x$. 记$\omega(x)=\{F\in P^{(<\omega)}:F\ll_e x\}$.

(2) P称为Frink拟连续的, 若$\forall x\in P$, $\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F:F\in\omega(x)\}$.

定义2.6[2] 设P,Q为偏序集, $f:P\to Q$是一映射, 若$\forall x,y\in P$, $x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$, 则称$f$为单调的(或保序的).

定义2.7[2] 设S,T为偏序集, 若$g:S\to T$, $d:T\to S$都为单调映射, 且$\forall s\in S,t\in T,g(s)\geqslant t\Leftrightarrow s\geqslant d(t)$, 则称$(g,d)$为$S,T$间的一对伴随. 此时称$g$为$d$的上伴随, d为g的下伴随.

引理2.1[3] 设P为偏序集.

(1) 映射$(-)^{\uparrow}:(2^P)^{op}\to 2^P$, $A\mapsto A^{\uparrow}$和$(-)^{\downarrow}:2^P\to(2^P)^{op}$, $A\mapsto A^{\downarrow}$都是保序的.

(2) $((-)^{\uparrow},(-)^{\downarrow})$是$(2^P)^{op}$和$2^P$之间的一对伴随, 即$\forall A$, $B\subseteq P$, $B^{\uparrow}\supseteq A\Leftrightarrow B\subseteq A^{\downarrow}$. 因此$\delta:2^P\to 2^P$, $A\mapsto A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$和$\delta^*:2^P\to 2^P$, $A\mapsto(A^{\downarrow})^{\uparrow}$都为闭算子.

(3) $\forall\{C_j:j\in J\}\subseteq 2^P$, $(\bigcup\limits_{j\in J}C_j)^{\uparrow}=\bigcap\limits_{j\in J}{C_j}^{\uparrow}$, $(\bigcup\limits_{j\in J}C_j)^{\downarrow}=\bigcap\limits_{j\in J}{C_j}^{\downarrow}$.

(4) 令$L=\delta(P)$. $\forall\{{A_i}^{\delta}:i\in I\}\subseteq L$,

$$\bigwedge\nolimits_L\{{A_i}^{\delta}:i\in I\}=\bigcap\{{A_i}^{\delta}:i\in I\},\ \bigvee\nolimits_L\{{A_i}^{\delta}:i\in I\}=(\bigcup\{{A_i}^{\delta}:i\in I\})^{\delta}=(\bigcup_{i\in I}A_i)^{\delta}.$$

命题2.1[9] 设P为偏序集, 则$\forall\{{F_i}^{\delta}:i\in I\}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}$, 有$\bigvee_{\mathcal{H}}\{{F_i}^{\delta}:i\in I\}=(\bigcup\limits_{i\in I}F_i)^{\delta}$. 因此$\mathcal{H}$是一个并半格.

命题2.2[2] 设$g:S\to T$, $d:T\to S$为偏序集之间的单调映射, 则下列条件等价.

(1) (g,d)是一对伴随;

(2) $dg\leq 1_S$, $1_T\leq gd$.

命题2.3[11] 设S,T为偏序集, $d:T\to S$为$g:S\to T$的下伴随, 则$\forall A\subseteq T$, 有

$$d(A)^\delta\subseteq d(A)^\delta.$$

§3 $\mathcal{QF}$-分配偏序集

定义3.1 设P为偏序集, 在2^P上定义二元关系$\dashv$: $\forall A,\ B\subseteq P$, 称A有限way below B, 记作$A\dashv B$, 若$\forall F\in P^{(<\omega)}$, $\uparrow B\cap F^\delta\neq\varnothing\Rightarrow\uparrow A\cap F\neq\varnothing$. $F\dashv\{x\}$简记为$F\dashv x$. 记$\rho(x)=\{F\in P^{(<\omega)}:F\dashv x\}$, $\Uparrow F=\{y\in P:F\dashv y\}$.

由上述定义易证如下命题.

命题3.1 设P为偏序集, 则以下成立.

(1) $\forall x\in P$, $A\subseteq P$, 若$A\dashv x$, 则$A\leq x$.

(2) $\forall A,\ B\subseteq P$, $A\dashv B\Leftrightarrow\forall b\in B$, $A\dashv b$.

(3) $\forall A,\ B,\ C,\ D\subseteq P$, 若$A\leq B\dashv C\leq D$, 则$A\dashv D$.

定义3.2 偏序集P称为$\mathcal{QF}$-分配的, 若$\forall x\in P$, $\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F:F\in\rho(x)\}$.

定理3.1 设P为偏序集, 则以下等价.

(1) P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集;

(2) $(\mathcal{H},\subseteq)$为$\mathcal{QF}$-分配偏序集.

证 (1) $\Rightarrow$ (2): $\forall A^\delta\in\mathcal{H}$, 证明

$$\uparrow_{\mathcal{H}}A^\delta=\bigcap\{\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}:\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}\text{ 且}\mathcal{F}\dashv A^\delta\}.$$

显然$\uparrow_{\mathcal{H}}A^\delta\subseteq\bigcap\{\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}:\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}\text{ 且}\mathcal{F}\dashv A^\delta\}$. 下证

$$\bigcap\{\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}:\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}\text{ 且}\mathcal{F}\dashv A^\delta\}\subseteq\uparrow_{\mathcal{H}}A^\delta.$$

反之, 若$\exists B^\delta\in\mathcal{H}$, 有$B^\delta\notin\uparrow_{\mathcal{H}}A^\delta$, 即$A^\delta\not\subseteq B^\delta$. 因此$\exists x\in A^\delta$但$x\notin B^\delta$, 从而$\exists y\in P$, $B\subseteq\downarrow y$且$x\not\leq y$. 由(1)知, $\exists F\in P^{(<\omega)}$且$F\dashv x$使$y\notin\uparrow F$. 令$\mathcal{F}=\{\downarrow u:u\in F\}$, 则$\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}$. 下证$\mathcal{F}\dashv A^\delta$且$B^\delta\notin\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}$. 若$B^\delta\in\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}$, 则$\exists u\in F$, 使$\downarrow u\subseteq B^\delta$, 因此$u\in\downarrow u\subseteq B^\delta\subseteq\downarrow y$, 矛盾于$y\notin\uparrow F$. 再证$\mathcal{F}\dashv A^\delta$. $\forall\{A_i^\delta:i\in I\}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}$, 若$A^\delta\subseteq\bigvee_{\mathcal{H}}\{A_i^\delta:i\in I\}$, 由命题2.1有$A^\delta\subseteq(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)^\delta$且$\bigcup\limits_{i\in I}A_i\in P^{(<\omega)}$. 由$x\in A^\delta$及$F\dashv x$, 有$\uparrow F\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)\neq\varnothing$, 因此$\exists j\in I$及$v\in F$, 使$v\in\downarrow A_j\subseteq A_j^\delta$. 因为$A_j^\delta$为下集, 所以$\downarrow v\subseteq A_j^\delta$, 从而$\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}\cap\{A_i^\delta:i\in I\}\neq\varnothing$, 即$\mathcal{F}\dashv A^\delta$. 故$\uparrow_{\mathcal{H}}A^\delta=\bigcap\{\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}:\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}\text{ 且}\mathcal{F}\dashv A^\delta\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\forall x\in P$, 显然$\uparrow x\subseteq\bigcap\{\uparrow F:F\in P^{(<\omega)}\text{且}F\dashv x\}$. 下证

$$\bigcap\{\uparrow F:F\in P^{(<\omega)}\text{且}F\dashv x\}\subseteq\uparrow x.$$

若$x\not\leq y$, 即$\downarrow x\not\subseteq\downarrow y$. 由(2)知, $\exists\mathcal{F}=\{A_1^\delta,A_2^\delta,\cdots,A_k^\delta\}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}$使$\mathcal{F}\dashv\downarrow x$但$\downarrow y\notin\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}$, 即$\forall i\in\{1,2,\cdots,k\}$, $A_i^\delta\not\subseteq\downarrow y$, 故$\exists y_i\in A_i^\delta$使$y_i\not\leq y$. 令$F=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}\in P^{(<\omega)}$, 显然$y\notin\uparrow F$. 下证$F\dashv x$. 若$\forall S\in P^{(<\omega)}$, $x\in S^\delta$, 即

$$\downarrow x\subseteq S^\delta=(\bigcup_{m\in S}\{m\})^\delta=\bigvee\nolimits_{\mathcal{H}}(\{m\}^\delta:m\in S).$$

因为$\mathcal{F}\dashv\downarrow x$且$\{\{m\}^\delta:m\in S\}\in\mathcal{H}^{(<\omega)}$, 所以$\uparrow_{\mathcal{H}}\mathcal{F}\cap\{\{m\}^\delta:m\in S\}\neq\varnothing$, 故$\exists m\in S$, 使$y_i\in A_i^\delta\subseteq\{m\}^\delta=\downarrow m$, 从而$\uparrow F\cap S\neq\varnothing$, 即$F\dashv x$. 因此$\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F:F\in P^{(<\omega)}\text{且}F\dashv x\}$.

定义3.3 称偏序集P具有$\mathcal{F}$-性质, 若$\forall F_1,\ F_2\in P^{(<\omega)}$, $\exists G\in P^{(<\omega)}$使得$\downarrow F_1\cap\downarrow F_2=\downarrow G$.

显然交半格具有$\mathcal{F}$-性质, 但下面例子说明不是所有偏序集都具有$\mathcal{F}$-性质.

例3.1 设$P=\{a,b\}\cup\mathbf{N}$, 其中$\mathbf{N}$为自然数集. P上的序关系定义如下.

(1) a, b不可比较;

(2) $\forall n\in\mathbf{N}$, $n<a$且$n<b$.

令$F=\{a\}$, $G=\{b\}$, 则$\downarrow a=\{a\}\cup\mathbf{N}$, $\downarrow b=\{b\}\cup\mathbf{N}$, 但不存在有限集$H\subseteq P$使得$\downarrow H=\downarrow F\cap\downarrow G=\mathbf{N}$. 故$P$不满足$\mathcal{F}$-性质.

引理3.1 设P 为分配偏序集且具有$\mathcal{F}$-性质, $F\in P^{(<\omega)}$, 则$\Uparrow F\subseteq\{\Uparrow x:x\in F\}$.

证 设$z\in\Uparrow F$, 但$z\notin\bigcup\{\Uparrow x:x\in F\}$. 若$F=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则$\forall G_i\in P^{(<\omega)}$, 有$z\in G_i^\delta$, 但$x_i\notin\downarrow G_i$. 由$P$为分配偏序集, 有

$$z\in\bigcap_{i=1}^n G_i^\delta=\bigcap_{i=1}^n(\downarrow G_i)^\delta=(\bigcap_{i=1}^n\downarrow G_i)^\delta.$$

因为P具有$\mathcal{F}$-性质, 所以

$$\bigcap_{i=1}^n\downarrow G_i\in P^{(<\omega)}.$$

故

$$\uparrow F\cap(\bigcap_{i=1}^n\downarrow G_i)\neq\varnothing.$$

从而存在$m\in\bigcap\limits_{i=1}^n\downarrow G_i$及$x_j\in F$使得$x_j\le m$, 即$x_j\in\downarrow G_j$, 矛盾于$x_i\notin\downarrow G_i$. 故$\exists x_i\in F$使得$z\in\Uparrow x$.

定理3.2 设P 为偏序集且具有$\mathcal{F}$-性质, 则下述两条件等价.

(1) P是$\mathcal{F}$-分配的;

(2) P是分配和$\mathcal{QF}$-分配的.

证 (1) $\Rightarrow$ (2): 显然P是$\mathcal{QF}$-分配的. 下证

$$(\downarrow x\cap\downarrow F)^\delta=\downarrow x\cap F^\delta.$$

由引理2.1, $(\downarrow x\cap\downarrow F)^\delta\subseteq\downarrow x\cap F^\delta$. 反之, 若$\exists y\in\downarrow x\cap F^\delta$但$y\notin(\downarrow x\cap\downarrow F)^\delta$, 即$\exists z\in P$, 使$\downarrow x\cap\downarrow F\subseteq\downarrow z$且$y\not\le z$. 由(1)知, $\exists m\in P$ 使$m\dashv y$但$m\not\le z$. 因为$y\in F^\delta$, 所以$m\in\downarrow F$, 从而$m\in\downarrow y\cap\downarrow F\subseteq\downarrow x\cap\downarrow F\subseteq\downarrow z$, 矛盾于$m\not\le z$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 令$M=\{y\in P:y\dashv x\}$, 反之, 若$\exists x\in P$, 使$x\notin M^\delta$, 则$\exists z\in P$, 使$M\subseteq\downarrow z$且$x\not\le z$. 由(2)知, $\exists F\in P^{(<\omega)}$, $F\dashv x$且$z\notin\uparrow F$. 因为$x\in\Uparrow F$, 由引理3.1有

$$x\in\Uparrow F\subseteq\bigcup\{\Uparrow t:t\in F\}.$$

故$\exists t\in F$, 使$t\dashv x$, 从而$z\notin\uparrow t$. 又因为$t\in M\subseteq\downarrow z$, 矛盾于$z\notin\uparrow t$.

定理3.3 设P为偏序集, 则下述两条件等价.

(1) P是广义完全分配的;

(2) P是Frink拟连续和$\mathcal{QF}$-分配的.

证 (1) $\Rightarrow$ (2): 由(1)可知, $\forall x\in P$, 有$\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F:F\in s(x)\}$. 注意到$F\lhd x$蕴含着$F\ll_e x$和$F\dashv x$. 故$P$为Frink拟连续和$\mathcal{QF}$-分配的.

(2) $\Rightarrow$ (1): 显然$\forall x\in P$, 有$\uparrow x\subseteq\bigcap\{\uparrow F: F\in s(x)\}$. 若$x\not\leq z$, 由$P$为Frink拟连续的可知$\exists F\in P^{(<\omega)}$, $F\ll_e x$使$z\notin\uparrow F$, 即$\forall y\in F$, 有$y\not\leq z$. 又由P为$\mathcal{QF}$-分配的, $\exists F_y\in P^{(<\omega)}$使$F_y\dashv y$且$z\notin\uparrow F_y$. 令$E=\bigcup\limits_{y\in F}F_y$, 则$E$有限且$E\dashv F$, 但$z\notin\uparrow E$. 下证$E\lhd x$. $\forall S\subseteq P$, $x\in S^{\delta}$. 令$H=\bigcup\{R^{\delta}: R\in S^{(<\omega)}\}$, 则$x\in S^{\delta}=H^{\delta}$且$H\in \mathrm{Fid}(P)$. 由$F\ll_e x$, 有$\uparrow F\cap H\neq\varnothing$, 即$\exists h\in H$, 使$h\in\uparrow F$. 因此$\exists R\in S^{(<\omega)}$, 使$h\in R^{\delta}$, 即$\uparrow F\cap R^{\delta}\neq\varnothing$. 又因为$E\dashv F$, 所以$\uparrow E\cap R\neq\varnothing$, 即$\uparrow E\cap S\neq\varnothing$. 故$E\lhd x$. 因为$z\notin\uparrow E$, $z\notin\bigcap\{\uparrow F: F\in s(x)\}$, 因此$\uparrow x=\bigcap\{\uparrow F: F\in s(x)\}$.

§4 $\mathcal{QF}$-分配偏序集的映射性质

定义4.1 设P, Q为偏序集, 映射$f: P\to Q$称为$\mathcal{F}$-连续的, 若$\forall F\in P^{(<\omega)}$, 有
$$f(F^{\delta})\subseteq f(F)^{\delta}.$$

命题4.1 设P, Q为偏序集, $f: P\to Q$为$g: Q\to P$的上伴随, 考虑下述两个条件

(1) f为$\mathcal{F}$-连续的;

(2) g保有限way below 关系$\dashv$, 即$\forall F$, $G\subseteq Q$, $F\dashv G\Rightarrow g(F)\dashv g(G)$.

则(1) $\Rightarrow$ (2); 若Q为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 则(2) $\Rightarrow$ (1), 从而这两个条件等价.

证 (1) $\Rightarrow$ (2): 设$F\dashv G\subseteq Q$及$\forall A\in P^{(<\omega)}$, 有$\uparrow g(G)\cap A^{\delta}\neq\varnothing$, 则$\exists y\in G$, 使得$g(y)\in A^{\delta}$. 由(1)及命题2.2, 有$y\leq fg(y)\in f(A^{\delta})\subseteq f(A)^{\delta}$. 因为$f(A)\in Q^{(<\omega)}$ 且$F\dashv G$, 所以$\uparrow F\cap f(A)\neq\varnothing$. 故$\exists a\in A$及$b\in F$, 使得$b\leq f(a)\Rightarrow g(b)\leq a$, 即$\uparrow g(F)\cap A\neq\varnothing$. 故$g(F)\dashv g(G)$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 下证$\forall F\in P^{(<\omega)}$, 有$f(F^{\delta})\subseteq f(F)^{\delta}$. 反之, 若$\exists x\in F^{\delta}$, 但$f(x)\notin f(F)^{\delta}$, 则$\exists y\in Q$使$f(F)\subseteq\downarrow y$且$f(x)\not\leq y$. 由$Q$ 为$\mathcal{QF}$-分配偏序集可知, $\exists G\in Q^{(<\omega)}$, $G\dashv f(x)$使$y\notin\uparrow G$. 又因为g保$\dashv$关系, 所以$g(G)\dashv gf(x)\leq x$, 即$g(G)\dashv x$, 从而$\uparrow g(G)\cap F\neq\varnothing$. 故$\exists a\in F$, $b\in G$, 使得$g(b)\leq a\Rightarrow b\leq f(a)$, $f(F)\not\subseteq\downarrow y$, 矛盾于$f(F)\subseteq\downarrow y$. 故$f$为$\mathcal{F}$-连续的.

定义4.2 下面介绍两种范畴.

(1) $\mathbf{QF_G}$: 以$\mathcal{QF}$-分配偏序集为对象, 以具有下伴随且为$\mathcal{F}$-连续的映射为态射.

(2) $\mathbf{QF_D}$: 以$\mathcal{QF}$-分配偏序集为对象, 以具有上伴随且保$\dashv$关系的映射为态射.

由[2, LemmaⅣ-1.2]和命题4.1, 有如下定理.

定理4.1 范畴$\mathbf{QF_G}$与范畴$\mathbf{QF_D}$在伴随函子D和G下是对偶的.

定理4.2 设P, Q为偏序集, $f: P\to Q$为$\mathcal{F}$-连续映射$g: Q\to P$的下伴随. 若P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 则Q也为$\mathcal{QF}$-分配偏序集.

证 $\forall x$, $y\in Q$, 若$x\not\leq y$, 则$g(x)\not\leq g(y)$. 由P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 则$\exists A\in P^{(<\omega)}$, $A\dashv g(x)$使$g(y)\notin\uparrow A$. 由命题4.1知, $f(A)\dashv fg(x)$. 因为$fg(x)\leq x$, 所以$f(A)\dashv x$且$f(A)\in Q^{(<\omega)}$. 最后说明$y\notin\uparrow f(A)$. 反之, 若$y\in\uparrow f(A)$, 则$\exists c\in A$使$f(c)\leq y\Rightarrow c\leq g(y)$, 从而$g(y)\in\uparrow A$, 矛盾于$g(y)\notin\uparrow A$. 因此$\forall x\in Q$, 有$\uparrow x=\bigcap\{\uparrow f(A): A\in P^{(<\omega)}, A\dashv g(x)\}$. 故$Q$也为$\mathcal{QF}$-分配偏序集.

命题4.2 设P, Q为偏序集, $f: P\to Q$为有上伴随和下伴随的满映射, 若P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 则Q也为$\mathcal{QF}$-分配偏序集.

证 设g, d分别为f的上伴随和下伴随, 由f为满映射知, $fg=fd=1_Q$. $\forall x, y\in Q$, 若$x\not\leq y$, 则$d(x)\not\leq d(y)$. 若不然, $d(x)\leq d(y)\Rightarrow x=fd(x)\leq fg(y)=y\Rightarrow x\leq y$, 矛盾. 又因为$P$为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 所以$\exists A\in\rho(d(x))$, 使得$g(y)\notin\uparrow A$. 下证$f(A)\in\rho(x)$. $\forall S\in Q^{(<\omega)}$, $x\in S^{\delta}$, 由命题2.3知, $d(x)\in d(S^{\delta})\subseteq d(S)^{\delta}$, 所以$\uparrow A\cap d(S)\neq\varnothing$, 即$\exists a\in A$, $s\in S$, 使

得$a \le d(s) \Rightarrow f(a) \le fd(s) = s$, 从而有$\uparrow f(a) \cap S \ne \varnothing$, 故$f(A) \in \rho(x)$. 最后说明$y \notin \uparrow f(A)$. 反之, 若$y \in \uparrow f(A)$, 则$\exists c \in A$使$f(c) \le y$, 从而$c \le gf(c) \le g(y) \Rightarrow g(y) \in \uparrow A$, 矛盾于$g(y) \notin \uparrow A$.

定义4.3 设P 为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, B为P的子偏序集, 称B为P 的一个基, 若$\forall x \in P$,

$$\uparrow x = \bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{ 且} A \in \rho(x)\}.$$

命题4.3 设P 为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, $B \subseteq P$, 则下述条件等价.

(1) B为P的一个基;

(2) $\forall x \in P$, 若$E \in \rho(x)$, 则$\exists A \subseteq B$, 使得$A \in \rho(x)$且$\uparrow A \subseteq \uparrow E$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2): 由B为P的一个基知, $\forall x \in P$,

$$\uparrow x = \bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{且} A \in \rho(x)\}.$$

又由P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集可知, $\uparrow x = \bigcap\{\uparrow F : F \in \rho(x)\}$, 因此

$$\bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{且} A \in \rho(x)\} = \bigcap\{\uparrow F : F \in \rho(x)\}.$$

若$E \in \rho(x)$, 反之$\forall A \subseteq B$, $A \in \rho(x)$, $\uparrow A \nsubseteq \uparrow E$, 即对$\forall k \in \uparrow A$, $\forall z \in E$, 有$z \nleq k$, 从而$\exists M \in \rho(z)$, 使$k \notin \uparrow M$. 因为$E \in \rho(x)$, 所以$z \in \rho(x)$, 从而$M \in \rho(x)$. 因此$k \notin \uparrow x$, 与$k \in \uparrow A \Rightarrow k \in \uparrow x$矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\forall x \in P$, 显然$\uparrow x \subseteq \bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{且} A \in \rho(x)\}$. 由(2)可知, $\forall x \in P$, 若$E \in \rho(x)$, 则$\exists A \subseteq B$, 使得$A \in \rho(x)$且$\uparrow A \subseteq \uparrow E$, 所以

$$\bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{且} A \in \rho(x)\} \subseteq \bigcap\{\uparrow E : E \in \rho(x)\}.$$

由P为$\mathcal{QF}$-分配偏序集可知, $\bigcap\{\uparrow E : E \in \rho(x)\} \subseteq \uparrow x$, 因此$\bigcap\{\uparrow A : A \subseteq B \text{且} A \in \rho(x)\} \subseteq \uparrow x$, 从而$B$为$P$的一个基.

命题4.4 设P, Q都为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, B为P的一个基, 若$g : P \to Q$为$\mathcal{F}$-连续满射, 则$g(B)$为Q的一个基.

证 设$d : Q \to P$为g的下伴随, $\forall y \in Q$, 下证$\uparrow y = \bigcap\{\uparrow T : T \in \rho(y) \text{且} T \subseteq g(B)\}$. $\forall k \in Q$, 若$y \nleq k$, 以下说明, $\exists T \in \rho(y)$, $T \subseteq g(B)$, 使得$k \notin \uparrow T$. 因为Q为$\mathcal{QF}$-分配偏序集, 所以$\exists F \in Q^{(<\omega)}$, 使得$F \in \rho(y)$, 但$k \notin \uparrow F$. 由命题4.1知, $d(F) \in \rho(d(y))$. 又因为B为P的一个基, 由命题4.3知, $\exists A \subseteq B$, 使得$A \in \rho(d(y))$且$\uparrow A \subseteq \uparrow d(F)$, 即$\forall m \in \uparrow A$, $\exists n \in F$, 使得$d(n) \le m \Rightarrow n \le g(m)$. 再由$g$为满射, 所以$g(\uparrow A) \subseteq \uparrow F \Rightarrow g(A) \subseteq \uparrow F$. 令$T = g(A)$, 由$A \subseteq B$知, $T = g(A) \subseteq g(B)$. 因为$k \notin \uparrow F$, $T \subseteq \uparrow F$, 所以$k \notin \uparrow T$. 最后说明$T = g(A) \in \rho(y)$. $\forall S \in Q^{(<\omega)}$, $y \in S^\delta$, 由命题2.3知$d(y) \in d(S^\delta) \subseteq d(S)^\delta$. 由$A \in \rho(d(y))$, 有$\uparrow A \cap d(S) \ne \varnothing$, 即$\exists s \in S$, $a \in A$, 使得$a \le d(s) \Rightarrow g(a) \le gd(s) = s$, 所以$\uparrow g(A) \cap S \ne \varnothing$, 从而$T = g(A) \in \rho(y)$, 即证$g(B)$为$Q$的一个基.

参考文献:

[1] Abramsky S, Jung A. Domain Theory[M]. in: S. Abramsky, et al. (Eds.), Handbook of Logic in Computer Science, vol. 3, Oxford: Clarendon Press, 1995, 1-168.

[2] Gierz G, Hoffmann K H, Keimel K, et al. Continuous Lattices and Domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[3] Erné M. A completion-invariant extension of the concept of continuous lattices[A]. In: B. Banaschewski and R.-E. Hoffmann (eds.), Continuous Lattices, Proc. Bremen 1979[C]. Lecture Notes in Math. 871, New York：Springer-Verlag, 1981, 43-60.

[4] Zhang Wenfeng, Xu Xiaoquan. Frink quasicontinuous posets[J]. Semigroup Forum, 2017, 94(1): 6-16.

[5] Zhang Wenfeng, Xu Xiaoquan. On generalized completely distributive posets[J]. Math Slov, 2017, 67: 1085-1094.

[6] 石小妹, 徐晓泉. 强代数偏序集[J]. 模糊系统与数学, 2015, 29: 10-14.

[7] 李鑫硕, 张文锋. $\mathcal{F}$-分配偏序集[J]. 模糊系统与数学, 2023, 37: 105-109.

[8] Erné M. Infinite distributive laws versus local connectedness and compactness properties[J]. Topol Appl, 2009, 156(12): 2054-2069.

[9] Niederle J. Boolean and distributive ordered sets: characterization and representation by sets[J]. Order, 1995, 12: 189-210.

[10] Frink O. Ideals in partially ordered sets[J]. Amer Math Monthly, 1954, 61: 223-234.

[11] Zhang Wenfeng, Xu Xiaoquan. s_2-Quasialgebraic posets[J]. Electron Notes Theor Comput Sci., 2019, 345: 293-301.

$\mathcal{QF}$-distributive posets

LI Mei-qi, CHEN Jia-bai, ZHANG Wen-feng

(School of Mathematical Science, Jiangxi Science and Technology Normal Univ., Nanchang 330038, China)

Abstract: In this paper, the concept of $\mathcal{QF}$-distributive posets is introduced. Some properties of $\mathcal{QF}$-distributive posets are investigated. Several characterizations of $\mathcal{QF}$-distributive posets are obtained. Especially, it is proved that (1) A poset P is $\mathcal{QF}$-distributive iff the set composed by all finitely generated cuts of P is $\mathcal{QF}$-distributive; (2) A poset P with $\mathcal{F}$-property is $\mathcal{F}$-distributive iff it is distributive and $\mathcal{QF}$-distributive; (3) A poset P is generalized completely distributive iff it is Frink quasicontinuous and $\mathcal{QF}$-distributive.

Keywords: $\mathcal{QF}$-distributive poset; generalized completely distributive poset; Frink quasicontinuous poset

MR Subject Classification: 06B35