高校应用数学学报
2024, 39(4): 493-500

关于树补图的A_α-谱半径的一些极值结论

彭家荣, 朱艳丽, 张 蓝

(华南农业大学 数学与信息学院, 广东广州 510642)

摘 要: 设$A(G)$和$D(G)$分别表示图G的邻接矩阵和度对角矩阵, 称$A_\alpha(G)=\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G)$为图$G$的$A_\alpha$-矩阵, 并称$A_\alpha(G)$的最大特征值为图$G$的$A_\alpha$-谱半径, 其中$\alpha\in[0,1)$. 图$G$的$A_\alpha$-矩阵是图$G$的邻接矩阵和无符号Laplacian矩阵的共同推广. 该文研究了树的补图中谱半径的排序问题, 分别确定了最大度为Δ的n阶树的补图中A_α-谱半径的唯一极大和唯一极小图, 还确定了n阶树的补图中唯一的A_α-谱半径极小图. 在此基础上, 得到了n阶树的补图中邻接谱半径的标尺定理(The Scalar Theorem).

关键词: A_α-矩阵; 谱半径; 树; 补图; 标尺定理(The Scalar Theorem)

中图分类号: O157.5

文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2024)04-0493-08

§1 引 言

本文仅讨论有限简单无向图. 设$G=(V(G),E(G))$是一个n阶简单的无向连通图, 其中$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$和$E(G)$分别为图$G$的顶点集和边集. 令$N_G(v_i)$和$d_G(v_i)$分别表示图$G$中的顶点$v_i(1\le i\le n)$的邻接点集和度, 称度至少为3的顶点为一个分支点, 并记$\Delta(G)=\max\{d_G(v_i):1\le i\le n\}$为图$G$的最大度. 用$\overline{G}$表示图$G$的补图. $A(G)$和$D(G)$分别表示图G的邻接矩阵和度对角矩阵, 称$Q(G)=D(G)+A(G)$为图G的无符号Laplacian矩阵. 为了研究图G的邻接矩阵和无符号Laplacian矩阵的共同性质, Nikiforov构造了图G的A_α-矩阵$A_\alpha(G)$(参见[1]), 其中

$$A_\alpha(G)=\alpha D(G)+(1-\alpha)A(G), 0\le\alpha<1.$$

由定义可知$A_0(G)=A(G)$, 且$A_{\frac{1}{2}}(G)=\frac{1}{2}Q(G)$. 以下称$A_\alpha$-矩阵的最大特征值为图$G$的$A_\alpha$-谱半径, 并记作$\rho_\alpha(G)$. 特别地, $\rho(G)=\rho_0(G)$等于$A(G)$的谱半径(最大特征值), 而$2\rho_{\frac{1}{2}}(G)$等于$Q(G)$的谱半径. 若图G是一个连通图, 则根据非负矩阵的Perron-Frobenius定理, 必存在唯一的正单位特征向量与$\rho_\alpha(G)$对应[1-2], 用$\boldsymbol{f}=(f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_n))^{\mathrm{T}}$表示该特征向量, 并称之为图$G$的Perron向量. 在给定图类$\mathcal{G}$的所有图中, 若图$G\in\mathcal{G}$拥有最大(最小)的$A_\alpha$-谱半径, 则称$G$为$\mathcal{G}$中的一个$\rho_\alpha$-极大图($\rho_\alpha$-极小图).

收稿日期: 2022-11-16 修回日期: 2024-04-29

基金项目: 国家自然科学基金(12271182); 广东省自然科学基金(2022A1515011786; 2024A1515011899); 2022年国家级大学生创新训练项目(202210564068)

分别记P_n, $K_{1,n-1}$为n阶路和n阶星图. 记P_{xy}为从始点x到终点y的一条路(包含x和y). 若n阶连通图G具有$n+c-1$条边, 则称G为一个c圈图. 当$c=0,1,2,3$时, G分别被称为树, 单圈图, 双圈图和三圈图. 令$\overline{\mathbb{G}}(n,\Delta;c)$表示所有最大度为$\Delta$的$n$阶$c$圈图的补图集合, 即

$$\overline{\mathbb{G}}(n,\Delta;c)=\{\overline{G}:G\text{为最大度等于}\Delta\text{的}n\text{阶}c\text{圈图}\}.$$

特别地, 当$c=0$时, $\overline{\mathbb{G}}(n,\Delta;0)$表示所有最大度为$\Delta$的$n$阶树的补图集合, 记为$\overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$, 即

$$\overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)=\overline{\mathbb{G}}(n,\Delta;0)=\{\overline{T}:T\text{为最大度等于}\Delta\text{的}n\text{阶树}\}.$$

依图谱对图进行排序是图谱理论中一个十分活跃的研究课题, 据不完全统计[3], 有不少于40篇论文研究了树、单圈图、双圈图和三圈图的谱半径或(无符号)Laplacian谱半径的极值排序结果. 后来, 张晓东、林文水、袁西英和刘木伙等人发现了图谱的标尺定理(The Scalar Theorem)和优超理论(Majorization Theory)是解决图谱极值排序问题的理想工具, 利用这些工具可以得到树、单圈图、双圈图和三圈图中谱半径的任意前k大的排序结果[3]. 受已有研究问题的启发, 郭曙光等人率先提出了研究双圈图补图的谱半径的排序问题[4], 接着张昭等人[5]研究了单圈图补图的谱半径的排序问题, 后来郭曙光等人进一步研究了三圈图补图的谱半径的排序问题[6]. 最近郭曙光等人还进一步研究了单圈图和双圈图的补图中A_α-谱半径的排序结果[7]. 注意到A_α-矩阵包含了邻接矩阵和无符号Laplacian矩阵两种情况, 由此可见郭曙光等人已经开始了对已有结果的统一性问题的研究.

最近, 刘木伙等人在已有结果的基础上进一步考虑更一般化的结果[8], 他们证明了c较小时一般的n阶c圈图的补图中具有最大A_α-谱半径的极图的最大度等于$n-1$, 并且得到了树、单圈图的补图中前两大A_α-谱半径以及三圈图补图的最大A_α-谱半径; 而陈超辉等人在郭曙光等人的研究基础上进一步确定了双圈图补图的前三大A_α-谱半径和三圈图的补图的前六大A_α-谱半径[9].

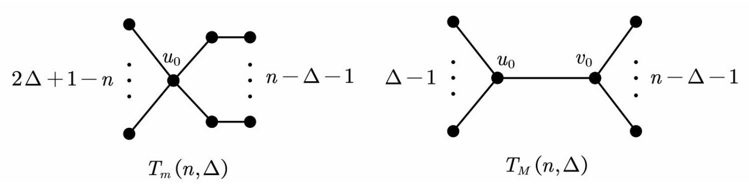

图 1 最大度等于Δ的n阶树$T_m(n,\Delta)$和$T_M(n,\Delta)$

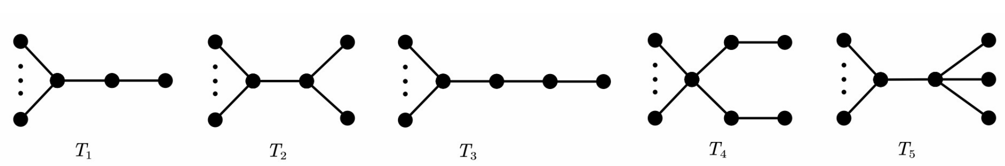

图 2 n阶树T_1,T_2,T_3,T_4,T_5

以下令$T_m(n,\Delta),T_M(n,\Delta)$为如图1所示的两棵最大度等于$\Delta$的$n$阶树, 并且令$T_1$, T_2, T_3, T_4, T_5为如图2所示的五棵n阶树. 本文分别确定了最大度为Δ的n阶树的补图中A_α-谱半径的唯一

极大图和唯一极小图, 还确定了n阶树的补图中唯一的A_α-谱半径极小图. 在此基础上, 还证明了n阶树的补图中邻接谱半径的标尺定理. 本文的主要结果如下所示.

定理1.1 设$\overline{T}$是$\overline{T}(n,\Delta)$中的一个图. 若$\frac{n+1}{2}\le\Delta\le n-2$且$0\le\alpha<1$, 则
$$\rho_\alpha(\overline{T_m(n,\Delta)})\le\rho_\alpha(\overline{T})\le\rho_\alpha(\overline{T_M(n,\Delta)}),$$
其中左边等号成立当且仅当$T=T_m(n,\Delta)$, 而右边等号成立当且仅当$T=T_M(n,\Delta)$.

文[7]已经确定了$\overline{K_{1,n-1}}$是所有n阶树的补图中的唯一具有最大的A_α-谱半径的极图, 下面的定理1.2说明了$\overline{P_n}$是其中唯一的最小极图.

定理1.2 $\forall 0\le\alpha<1$, 设T是$n\ge 3$阶树, 则$n-3<\rho_\alpha(\overline{P_n})\le\rho_\alpha(\overline{T})\le n-2$, 并且$\rho_\alpha(\overline{T})=\rho_\alpha(\overline{P_n})$当且仅当$T=P_n$.

如之前所说, 图谱的标尺定理和优超理论是解决图谱极值排序问题的理想工具, 下面的结论表明了树的补图中邻接谱半径也存在标尺定理.

定理1.3 设T和T'为两棵n阶树且$\Delta(T)>\Delta(T')$. 对于任意给定的与n无关的正整数k, 若$n\ge\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2$且$\Delta(T)\ge n-k$, 则$\rho(\overline{T})>\rho(\overline{T'})$.

当$k=4$时, 若$n=\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+1=11$, 则$\rho(\overline{T_m(11,7)})<8.525<8.533<\rho(\overline{T_M(11,6)})$, 因此定理1.3给出$n$的下界“$\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2$”是最优的.

定理1.3表明了要得到n阶树的补图中邻接谱半径的极大排序, 只需对树中具有较大的最大度的图类的补图进行排序即可. 根据这个思想, 可以得到以下推论1.1的简单排序结果. 实际上, 由类似的想法, 很容易就可以把推论1.1的排序结果进行扩充.

推论1.1 设T为一棵$n\ge 9$阶树, 若$T\notin\{K_{1,n-1},T_1,T_2,T_3,T_4,T_5\}$, 则
$$\rho(\overline{K_{1,n-1}})>\rho(\overline{T_1})>\rho(\overline{T_2})>\rho(\overline{T_3})>\rho(\overline{T_4})>\rho(\overline{T_5})>\rho(\overline{T}).$$

§2 定理1.1的证明

根据后文的性质2.1和性质2.2可知, 定理1.1成立.

引理2.1[7] 设$0\le\alpha<1$, $\overline{G}$是一个连通图且$\{u,v\}\subset V(G)$. 设$vw_i\notin E(G)$, 且$uw_i\in E(G)$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 令$G'=G+vw_1+vw_2+\cdots+vw_s-uw_1-uw_2-\cdots-uw_s$, 其中$1\le s\le k$. 若$\boldsymbol{f}$是图$\overline{G}$的Perron向量且$f(u)\ge f(v)$, 则$\rho_\alpha(\overline{G'})>\rho_\alpha(\overline{G})$.

引理2.2[8] 设$\overline{G}\in\overline{\mathbb{G}}(n,\Delta;c)$. 若$0\le c\le n-4$且$\Delta\le n-2$, 则$\overline{G}$是一个连通图.

引理2.3 设$\overline{T}\in\overline{T}(n,\Delta)$, 其中$\Delta\ge\frac{n+1}{2}$, 则$T$具有唯一的最大度点.

证 用反证法. 假设T中至少存在两个最大度点u,v. 若$uv\notin E(T)$, 因为T为树, 所以$|N_T(u)\cap N_T(v)|\le 1$. 由容斥原理可知, $n=|V(T)|\ge|N_T(u)\cup N_T(v)\cup\{u,v\}|=d_T(u)+d_T(v)+2-|N_T(u)\cap N_T(v)|\ge 2\Delta+1\ge n+2$, 矛盾. 因此$uv\in E(T)$. 此时$N_T(u)\cap N_T(v)=\varnothing$. 再根据容斥原理可得$n=|V(T)|\ge|N_T(u)\cup N_T(v)|=d_T(u)+d_T(v)=2\Delta\ge n+1$, 矛盾.

引理2.4 设$\overline{T}$是$\overline{T}(n,\Delta)$中的一个ρ_α-极大图, 其中$2\le\Delta\le n-2$且$0\le\alpha<1$. 设u,v为T的两个点, 且$\boldsymbol{f}$是$\overline{T}$的Perron向量. 若$d_T(u)>d_T(v)$, 则$f(u)<f(v)$.

证 用反证法. 假设$d_T(u)>d_T(v)$, 但是$f(u)\ge f(v)$成立. 设P_{uv}是T中从u到v的一条路. 因为$d_T(u)>d_T(v)$, 故存在点集$\{w_1,w_2,\ldots,w_s\}\subseteq N_T(u)\setminus N_T(v)$使得$\{w_1,w_2,\ldots,w_s\}\cap V(P_{uv})=\varnothing$, 其中$s=d_T(u)-d_T(v)$. 令$T'=T+vw_1+vw_2+\cdots+vw_s-uw_1-uw_2-\cdots-uw_s$. 由于$T$与$T'$有相同的度序列, 所以$\overline{T'}\in\overline{T}(n,\Delta)$. 根据引理2.1, 有$\rho_\alpha(\overline{T'})>\rho_\alpha(\overline{T})$, 与$\overline{T}$为$\overline{T}(n,\Delta)$中的$\rho_\alpha$-极大图矛盾.

性质2.1 设$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\varDelta)$中的一个图. 若$\frac{n+1}{2} \le \varDelta \le n-2$且$0 \le \alpha < 1$, 则$\rho_\alpha(\overline{T}) \le \rho_\alpha(\overline{T_M(n,\varDelta)})$, 等号成立当且仅当$T = T_M(n,\varDelta)$.

证 只需证明: 若$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\varDelta)$中的一个$\rho_\alpha$-极大图, 则$T = T_M(n,\varDelta)$.

根据引理2.3, 不妨设u_0为T中唯一的最大度点, 即$d_T(u_0) = \varDelta$. 设$d_T(v_0) = \max\{d_T(v) : v \in V(T) \setminus \{u_0\}\} = s_0$, 即$v_0$为$T$中的次大度点, 且次大度为$s_0$. 又$\varDelta \le n-2$, 则$s_0 \ge 2$. 根据引理2.2, $\overline{T}$是连通图, 因此可以记$\boldsymbol{f}$是$\overline{T}$的Perron向量. 不失一般性, 不妨进一步设$f(v_0) = \min\{f(w) : w \in V(T)$且$d_T(w) = s_0\}$, 即$v_0$是次大度点中Perron向量分量最小的点.

要证$T = T_M(n,\varDelta)$, 由$T_M(n,\varDelta)$的结构可知只需证: 若$w \in V(T) \setminus \{u_0, v_0\}$, 则$d_T(w) = 1$.

采用反证法, 假设存在w_0使得$d_T(v_0) \ge d_T(w_0) \ge 2$. 下证

$$f(v_0) \le f(w_0). \tag{1}$$

实际上, 若$d_T(v_0) = d_T(w_0)$, 则由v_0的取法可知$f(v_0) \le f(w_0)$, 此时(1)成立. 若$d_T(v_0) > d_T(w_0)$, 则根据引理2.4可知$f(v_0) < f(w_0)$, 此时(1)也成立. 综上所述(1)成立.

由于T是一棵树, 因此可设$P_{v_0w_0}$为T中从v_0到w_0的一条路. 由于$d_T(w_0) \ge 2$, 因此可设$w_1 \in N_T(w_0) \setminus V(P_{v_0w_0})$. 易知$w_1 \notin N_T(v_0)$. 令$T' = T + v_0w_1 - w_0w_1$. 由于$u_0$是唯一的最大度点且$d_T(v_0) \ge d_T(w_0)$, 所以$d_T(v_0) < \varDelta$. 因此$\overline{T'} \in \overline{\mathcal{T}}(n,\varDelta)$. 再结合引理2.1和(1)可知$\rho_\alpha(\overline{T'}) > \rho_\alpha(\overline{T})$, 这与$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\varDelta)$中的$\rho_\alpha$-极大图矛盾.

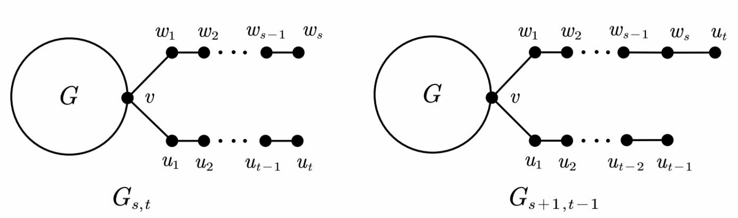

图 3 图$G_{s,t}$和图$G_{s+1,t-1}$

设v是非平凡连通图G的一个顶点. 如图3所示, 令$G_{s,t}(t \ge s \ge 1)$表示在点v增加两条边vw_1和vu_1连接G外的两条顶点互不相交的路$P_s = w_1w_2\cdots w_s$和$P_t = u_1u_2\cdots u_t$所得的图, 且令$G_{s+1,t-1} = G_{s,t} - u_{t-1}u_t + w_su_t$.

直观而言, 从图$G_{s,t}$到图$G_{s+1,t-1}$的变换操作就是将$G_{s,t}$中的点u_t从路P_t转移到路P_s上. 显然这样的图类变换操作至多只能进行t次, 不妨记经过t次这样的图类变换后得到的图为$G_{s+t,0}$, 并定义$G_{s+t,0} = G_{s,t} + w_su_t - vu_1$.

引理2.5 设$0 \le \alpha < 1$, 当$t \ge s \ge 1$时, 若$\overline{G_{s+t,0}}$连通, 则$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+t,0}})$.

证 因为$\overline{G_{s+t,0}}$连通, 可设$\boldsymbol{f}$为$\overline{G_{s+t,0}}$的Perron向量. 由于G为连通图, 则记$N_{G_{s+t,0}}(v) \setminus \{w_1\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{d_G(v)}\} \ne \varnothing$. 若$f(v) \ge f(w_s)$, 则$G_{s,t} = G_{s+t,0} - vx_1 - vx_2 - \cdots - vx_{d_G(v)} + w_sx_1 + w_sx_2 + \cdots + w_sx_{d_G(v)}$, 由引理2.1得$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+t,0}})$. 若$f(v) < f(w_s)$, 则$G_{s,t} = G_{s+t,0} - w_su_t + vu_t$, 再由引理2.1得$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+t,0}})$.

引理2.6[2] 设M是一个n阶非负方阵, 其最大特征值为$\theta(M)$, $\boldsymbol{y} > 0$是一个n维列向量, α和β是两个非负实数. 若$\alpha\boldsymbol{y} \le M\boldsymbol{y} \le \beta\boldsymbol{y}$, 则$\alpha \le \theta(M) \le \beta$. 进一步, 若$\alpha\boldsymbol{y} < M\boldsymbol{y}$, 则$\alpha <$

$\theta(M)$; 若$M\boldsymbol{y} < \beta\boldsymbol{y}$, 则$\theta(M) < \beta$.

由Rayleigh-Ritz定理(参见[2]中的定理4.2.2)可直接得出以下的引理2.7.

引理2.7 $\forall 0 \le \alpha < 1$, 设G是n阶图而φ是定义在$V(G)$上的单位列向量. 记$\lambda_1(G) \ge \lambda_2(G) \ge \cdots \ge \lambda_n(G)$为$A_\alpha(G)$的特征值, 则有$\lambda_1(G) \ge \varphi^{\mathrm{T}} A_\alpha(G)\varphi \ge \lambda_n(G)$, 其中左边的等号成立当且仅当$\varphi$是$\lambda_1(G)$的一个特征向量, 而右边的等号成立当且仅当$\varphi$是$\lambda_n(G)$的一个特征向量.

引理2.8 设$0 \le \alpha < 1$且图G的补图$\overline{G}$是一个连通图. 设$\boldsymbol{f}$是$\overline{G}$的Perron向量, $uv \in E(G)$, $xy \in E(G)$, $ux \notin E(G)$且$vy \notin E(G)$. 令$G' = G+ux+vy-uv-xy$. 若$f(u) \ge f(y)$且$f(v) \ge f(x)$, 则$\rho_\alpha(\overline{G'}) \ge \rho_\alpha(\overline{G})$, 其中等号成立当且仅当$f(u) = f(y)$且$f(v) = f(x)$.

证 由引理2.7可得

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(\overline{G'}) - \rho_\alpha(\overline{G}) \ge \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} A_\alpha(\overline{G'})\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} A_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f} = \\ &\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\left[A_\alpha(\overline{G'}) - A_\alpha(\overline{G})\right]\boldsymbol{f} = \\ &\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\left[\alpha(D(\overline{G'}) - D(\overline{G})) + (1-\alpha)(A(\overline{G'}) - A(\overline{G}))\right]\boldsymbol{f} = \\ &\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\left[(1-\alpha)(A(\overline{G'}) - A(\overline{G}))\right]\boldsymbol{f} = \\ &(1-\alpha)\left[\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} A(\overline{G'})\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} A(\overline{G})\boldsymbol{f}\right] = \\ &(1-\alpha)\big[2\left(f(u)f(v) + f(x)f(y)\right) - 2\left(f(u)f(x) + f(v)f(y)\right)\big] = \\ &2(1-\alpha)(f(u) - f(y))(f(v) - f(x)) \ge 0.\end{aligned}$$

因此$\rho_\alpha(\overline{G'}) \ge \rho_\alpha(\overline{G})$.

若$f(u) = f(y)$且$f(v) = f(x)$, 则$\rho_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f} = A_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f} = A_\alpha(\overline{G'})\boldsymbol{f}$, 即$\rho_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f} = A_\alpha(\overline{G'})\boldsymbol{f}$. 根据引理2.6有$\rho_\alpha(\overline{G'}) = \rho_\alpha(\overline{G})$.

反之, 若$\rho_\alpha(\overline{G'}) = \rho_\alpha(\overline{G})$, 则根据引理2.7可知$\boldsymbol{f}$也是$\overline{G'}$的Perron向量. 进而有

$$\begin{aligned}0 = \rho_\alpha(\overline{G'})f(u) - \rho_\alpha(\overline{G})f(u) = (\rho_\alpha(\overline{G'})\boldsymbol{f})(u) - (\rho_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f})(u) = \\ (A_\alpha(\overline{G'})\boldsymbol{f})(u) - (A_\alpha(\overline{G})\boldsymbol{f})(u) = f(v) - f(x),\end{aligned}$$

因此$f(v) = f(x)$. 同理可得$f(u) = f(y)$.

引理2.9 设$0 \le \alpha < 1$, 当$s = 1$, $t \ge 3$时, 若$\overline{G_{s+1,t-1}}$连通, 则$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+1,t-1}})$.

证 用反证法, 假设$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) \le \rho_\alpha(\overline{G_{s+1,t-1}})$. 设$\boldsymbol{f}$为$\overline{G_{s+1,t-1}}$的Perron向量.

若$f(w_1) \ge f(u_{t-1})$, 则

$$G_{s,t} = G_{s+1,t-1} - w_1u_t + u_{t-1}u_t,$$

根据引理2.1可得$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+1,t-1}})$, 矛盾. 因此$f(w_1) < f(u_{t-1})$.

若$f(v) \le f(u_{t-2})$, 则

$$G_{s,t} = G_{s+1,t-1} - u_{t-1}u_{t-2} - w_1v + u_{t-1}v + w_1u_{t-2},$$

于是由引理2.8可得$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+1,t-1}})$, 矛盾. 因此$f(v) > f(u_{t-2})$.

记$N_{G_{s+1,t-1}}(v) \setminus \{w_1, u_1\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_{d_G(v)}\}$. 注意到

$$G_{s,t} = G_{s+1,t-1} - vx_1 - vx_2 - \cdots - vx_{d_G(v)} + u_{t-2}x_1 + u_{t-2}x_2 + \cdots + u_{t-2}x_{d_G(v)},$$

故由引理2.1可知$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+1,t-1}})$, 矛盾.

引理2.10 设$\overline{G} \in \overline{\mathbb{G}}(n, \varDelta; c)$. 若$0 \le c \le n-2$且$\varDelta \le n-2$, 则当$s \ge 2$且$t \ge 0$时, $\overline{G_{s,t}}$是连通图.

证 当$s \ge 2$且$t \ge 0$时, 易知$\overline{G_{s,t}} \in \overline{\mathbb{G}}(n+s+t, \varDelta(G_{s,t}); c)$, 其中$0 \le c \le n-2 \le$

$(n+s+t)-4$且$\Delta(G_{s,t}) \le \Delta+2 \le (n-2)+2 \le (n+s+t)-2$. 根据引理2.2可知, $\overline{G_{s,t}}$也是一个连通图.

性质2.2 设$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$中的一个图. 若$\frac{n+1}{2} \le \Delta \le n-2$且$0 \le \alpha < 1$, 则$\rho_\alpha(\overline{T}) \ge \rho_\alpha(\overline{T_m(n,\Delta)})$, 等号成立当且仅当$T=T_m(n,\Delta)$.

证 只需证明: 若$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$中的一个$\rho_\alpha$-极小图, 则$T=T_m(n,\Delta)$.

设$d_T(u_0)=\Delta \ge \frac{n+1}{2}$. 首先给出如下断言2.1.

断言2.1 若$v \in V(T)\setminus\{u_0\}$, 则$d_T(v) \le 2$.

用反证法证明断言2.1. 假设存在点$v_0 \in V(T)\setminus\{u_0\}$使得$d_T(v_0) \ge 3$, 即$v_0$是一个分支点. 令$x_0$和$y_0$为图$T$中距离最远的两个分支点且设$P_{x_0y_0}$表示图$T$中连接$x_0$和$y_0$的唯一的路. 不妨设$d_T(x_0) \ge d_T(y_0) \ge 3$, 则至少存在两条与$y_0$相连而不包含$x_0, y_0$且顶点互不相交的路$P_s$和$P_t$, 即$V(P_s \cup P_t) \cap V(P_{x_0y_0}) = \varnothing$. 不妨设$t \ge s \ge 1$, 易知存在$G$使得$T=G_{s,t}$. 令$T'=G_{s+t,0}$, 由引理2.10可知$\overline{T'}$连通, 再由引理2.5可知$\rho_\alpha(\overline{G_{s,t}}) > \rho_\alpha(\overline{G_{s+t,0}})$, 即$\rho_\alpha(\overline{T}) > \rho_\alpha(\overline{T'})$.

如果$d_T(y_0) = \Delta \ge \frac{n+1}{2}$, 则$|V(T)| = n \ge 2\Delta \ge n+1$, 矛盾. 因此$d_T(y_0) < \Delta$. 于是$\overline{T'} \in \overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$, 这和$\overline{T}$是$\overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$的一个$\rho_\alpha$-极小图矛盾. 于是断言2.1成立.

根据断言2.1, T是把Δ条路粘贴到一个公共点u_0得到的似星图. 不妨设这Δ条路分别为$P_{s_1}, P_{s_2}, \ldots, P_{s_\Delta}$且$s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_\Delta \ge 1$. 要证$T=T_m(n,\Delta)$, 由$T_m(n,\Delta)$的结构可知只需证: $s_1 \le 2$.

用反证法, 假设$s_1 \ge 3$. 如果$s_\Delta \ge 2$, 则$|V(T)| = n = 1+\sum_{i=1}^{\Delta} s_i \ge 1+3+2(\Delta-1) \ge n+3$, 矛盾. 因此, $s_\Delta = 1$. 由此可见存在G'使得$T=G'_{s_\Delta,s_1}$. 令$T''=G'_{s_\Delta+1,s_1-1}$, 则$\overline{T''} \in \overline{\mathcal{T}}(n,\Delta)$. 由引理2.10可知$\overline{T''}$连通, 再根据引理2.9得$\rho_\alpha(\overline{G'_{s_\Delta,s_1}}) > \rho_\alpha(\overline{G'_{s_\Delta+1,s_1-1}})$, 即$\rho_\alpha(\overline{T}) > \rho_\alpha(\overline{T''})$, 这与$T$的定义矛盾.

§3 定理1.2的证明

引理3.1[2] 设M是一个n阶非负不可约方阵, 其最大特征值为$\theta(M)$. 记M的第i行的行和为$R_i(M)$, 则有

$$\min\left\{R_i(M): 1 \le i \le n\right\} \le \theta(M) \le \max\left\{R_i(M): 1 \le i \le n\right\},$$

左边或者右边的等号成立当且仅当M的所有行的行和都相等.

引理3.2 若$0 \le \alpha < 1$且$\overline{T}$是n阶树的补图中的一个ρ_α-极小图, 则$T=P_n$.

证 只需要证明: $\Delta(T) \le 2$. 用反证法, 假设$\Delta(T) \ge 3$.

若存在唯一的分支点$v_0 \in V(T)$, 则至少存在两条与v_0相连且顶点互不相交的路P_s和P_t(不妨设$t \ge s \ge 1$), 即存在G使得$T=G_{s,t}$. 由引理2.5可知必存在$T'=G_{s+t,0}$使得$\rho_\alpha(\overline{T}) > \rho_\alpha(\overline{T'})$. 注意到$T'$也是$n$阶树, 因此与$T$的定义矛盾.

若至少存在两个分支点, 则令x_0和y_0为T中距离最远的两个分支点. 于是, 至少存在两条仅与x_0相连(或仅与y_0相连)而不包含x_0, y_0且顶点互不相交的路P_r和P_q(不妨设$q \ge r \ge 1$), 故存在G'使得$T=G'_{r,q}$. 由引理2.5可知, 存在$T''=G'_{q+r,0}$使得$\rho_\alpha(\overline{T}) > \rho_\alpha(\overline{T''})$. 由于$T''$也是$n$阶树, 与$T$的定义矛盾.

引理3.3[7] 对任意$0 \le \alpha < 1$, 设T为一棵$n \ge 2$阶树, 则$\rho_\alpha(\overline{T}) \le n-2$, 其中等号成立当且仅当$T=K_{1,n-1}$.

定理1.2的证明 由引理3.1可得$\rho_\alpha(\overline{P_n}) > n-3$. 再结合引理3.2和引理3.3, 定理1.2得证.

§4 定理1.3和推论1.1的证明

引理4.1[8] 设$0 \le \alpha < 1$, 且设$\overline{G_1}$和$\overline{G_2}$分别是$\overline{\mathbb{G}}(n,s;c)$和$\overline{\mathbb{G}}(n,t;c)$中的$\rho_\alpha$-极大图. 若$0 \le c \le n-4$且$2 \le s < t \le n-1$, 则$\rho_\alpha(\overline{G_2}) > \rho_\alpha(\overline{G_1})$.

定理1.3的证明 若$k=1$, 则$n \ge \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2=3$且$\varDelta(T)=n-1$. 若$n=3$, 则$\varDelta(T')<\varDelta(T)=2$, 于是$\varDelta(T')=1$. 这说明3阶图$T'$中存在一个孤立点, 与$T'$为树矛盾. 因此$n \ge 4$, 于是$T=K_{1,n-1}$且$T' \ne T$, 由定理1.2可知结论成立.

若$k \ge 2$, 先证明如下断言4.1.

断言4.1 若$n \ge \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2$且$n-k \le \varDelta \le n-2$, 则$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}) < \rho(\overline{T_m(n,\varDelta)})$.

如果$k=2$, 则$\varDelta=n-2$, 此时$T_M(n,\varDelta)=T_m(n,\varDelta)$, 再结合引理4.1得$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}) < \rho(\overline{T_M(n,\varDelta)})=\rho(\overline{T_m(n,\varDelta)})$, 即断言4.1成立.

下来讨论$k \ge 3$的情形, 则$n \ge \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2 \ge 8$.

由定理1.2知

$$\{\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}),\rho(\overline{T_m(n,\varDelta)})\} \subset (n-3,n-2).$$

通过计算发现, $\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)})$, $\rho(\overline{T_m(n,\varDelta)})$分别与$\varPhi_1(x)$, $\varPhi_2(x)$的最大零点相同, 并且有

$$\varPhi_1(x)=\varPhi_2(x)+\varphi(x), x \in (n-3,n-2),$$

其中$\varPhi_1(x)=x^4+(4-n)x^3+(5-2n)x^2+(4\varDelta-5n+2n\varDelta-2\varDelta^2+2)x+2\varDelta-2n+n\varDelta-\varDelta^2$, $\varPhi_2(x)=x^4+(4-n)x^3+(3-n-\varDelta)x^2+(\varDelta-2n+n\varDelta-\varDelta^2+2)x-n+n\varDelta-\varDelta^2+1$, $\varphi(x)=(\varDelta-n+2)x^2+(3\varDelta-3n+n\varDelta-\varDelta^2)x+2\varDelta-n-1$.

记$\theta_1(\varDelta)=\varphi(n-3)=(3-n)\varDelta^2+(2n^2-6n+2)\varDelta-n^3+5n^2-13n+17, \theta_2(\varDelta)=\varphi(n-2)=(2-n)\varDelta^2+(2n^2-3n)\varDelta-n^3+3n^2-7n+7$, 其中$\varDelta \in [n-k,n-2]$.

注意到$\theta_1(\varDelta)$是关于$\varDelta$的开口向下的二次函数. 因为$\theta_1(n-k)=2n^2+(-k^2-11)n+3k^2-2k+17 \ge 2(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2)^2+(-k^2-11)(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2)+3k^2-2k+17=\frac{1}{2}(k+3)(k-1)(k-2)>0$, 且$\theta_1(n-2)=2n^2-15n+25=(2n-5)(n-5)>0$, 所以$\theta_1(\varDelta)$在$\varDelta \in [n-k,n-2]$上恒大于零.

易知$\theta_2(\varDelta)$也是关于$\varDelta$的开口向下的二次函数. 因为$\theta_2(n-k)=2n^2+(-k^2-k-7)n+2k^2+7 \ge 2(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2)^2+(-k^2-k-7)(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2)+2k^2+7=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)>0$, 且$\theta_2(n-2)=2n^2-13n+15=(2n-3)(n-5)>0$, 所以$\theta_2(\varDelta)$在$\varDelta \in [n-k,n-2]$上恒大于零.

$\varphi(x)$是关于x的一次函数(若$\varDelta=n-2$), 或开口向下的二次函数(若$\varDelta<n-2$). 结合$\varphi(n-3)>0$, $\varphi(n-2)>0$可知, 无论如何$\varphi(x)>0$在$x \in [n-3,n-2]$上恒成立.

当$\rho(\overline{T_m(n,\varDelta)}) \le x \le n-2$时, 因为$\varPhi_1(x)=\varPhi_2(x)+\varphi(x)>0$, 所以$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}) < \rho(\overline{T_m(n,\varDelta)})$, 即断言4.1成立.

为了简洁, 下面分别用$\varDelta$和$\varDelta'$来代替$\varDelta(T)$和$\varDelta(T')$.

若$\varDelta=n-1$, 则$T=K_{1,n-1}$且$T' \ne T$, 由定理1.2可知结论成立.

若$\varDelta \le n-2$, 则$\varDelta' \le \varDelta-1$. 若$\varDelta'=\varDelta-1$, 则$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta')})=\rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)})$. 若$\varDelta'<\varDelta-1$, 根据引理4.1得$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta')}) < \rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)})$. 因此

$$\rho(\overline{T_M(n,\varDelta')}) \le \rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}). \tag{2}$$

结合定理1.1, 断言4.1和(2)可得$\rho(\overline{T}) \ge \rho(\overline{T_m(n,\varDelta)}) > \rho(\overline{T_M(n,\varDelta-1)}) \ge \rho(\overline{T_M(n,\varDelta')}) \ge \rho(\overline{T'})$, 于是$\rho(\overline{T}) > \rho(\overline{T'})$.

推论1.1的证明 在定理1.3中, 取$k=3$, 则$n \geq 9 > 8 = \frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+2$, 且$\mathit{\Delta}(K_{1,n-1}) > \mathit{\Delta}(T_1) > \mathit{\Delta}(T_2) = \mathit{\Delta}(T_3) = \mathit{\Delta}(T_4) = n-k = n-3 > \mathit{\Delta}(T_5)$.

因为$\mathit{\Delta}(K_{1,n-1}) > \mathit{\Delta}(T_1)$, 由定理1.3可得$\rho(\overline{K_{1,n-1}}) > \rho(\overline{T_1})$. 同理可得$\rho(\overline{T_1}) > \rho(\overline{T_2})$以及$\rho(\overline{T_4}) > \rho(\overline{T_5})$. 再根据$\mathit{\Delta}(T_2) = \mathit{\Delta}(T_3) = \mathit{\Delta}(T_4) = n-3$和定理1.1可得$\rho(\overline{T_2}) > \rho(\overline{T_3}) > \rho(\overline{T_4})$. 因此$\rho(\overline{K_{1,n-1}}) > \rho(\overline{T_1}) > \rho(\overline{T_2}) > \rho(\overline{T_3}) > \rho(\overline{T_4}) > \rho(\overline{T_5})$.

因为$T \notin \{K_{1,n-1}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, 所以$\mathit{\Delta}(T) \leq n-4 = \mathit{\Delta}(T_5)$. 若$\mathit{\Delta}(T) = \mathit{\Delta}(T_5)$, 又$T \neq T_5$, 由定理1.1可得$\rho(\overline{T_5}) > \rho(\overline{T})$. 若$\mathit{\Delta}(T) < \mathit{\Delta}(T_5)$, 由引理4.1可得$\rho(\overline{T_5}) > \rho(\overline{T_M(n, \mathit{\Delta}(T))})$, 再由定理1.1可得$\rho(\overline{T_M(n, \mathit{\Delta}(T))}) \geq \rho(\overline{T})$, 故$\rho(\overline{T_5}) > \rho(\overline{T})$. 从而恒有$\rho(\overline{T_5}) > \rho(\overline{T})$.

致谢 作者衷心感谢刘木伙教授和审稿人对本文提出宝贵的修改意见和建议.

参考文献:

[1] Nikiforov V. Merging the A- and Q-spectral theories[J]. Applicable Analysis & Discrete Mathematics, 2017, 11(1): 81-107.

[2] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[3] 刘木伙, 柳柏濂. 图谱的极值理论[M]. 广州: 广东科技出版社, 2017.

[4] 尹连伟, 郭曙光. n阶双圈图的补图的谱半径[J]. 盐城师范学院学报(自然科学版), 2008, 26: 17-21.

[5] 刘娟, 张昭. 单圈图补图的谱半径[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010, 5: 14-19.

[6] 尹连伟, 郭曙光. n阶三圈图的补图的谱半径[J]. 高校应用数学学报, 2011, 26: 223-229.

[7] 张荣, 郭曙光. 单圈图与双圈图补图的A_α-谱半径[J]. 高校应用数学学报, 2021, 36: 247-252.

[8] Liu Muhuo, Chen Chaohui, Guo Shuguang, et al. The A_α-spectral radius of dense graphs[J]. Linear & Multilinear Algebra, 2023, 71(6): 1044-1053.

[9] Chen Chaohui, Peng Jiarong, Chen Tianyuan. The A_α-spectral radius of complements of bicyclic and tricyclic graphs with n vertices[J]. Special Matrices, 2022, 10(1): 56-66.

Some extremal results on the A_α-spectral radius of the complement graphs of trees

PENG Jia-Rong, ZHU Yan-Li, ZHANG Lan

(College of Math. and Inform., South China Agricultural Univ., Guangzhou 510642, China)

Abstract: Let $A(G)$ and $D(G)$ denote the adjacency matrix and the diagonal matrix of the degrees of a simple graph G, respectively. For $\alpha \in [0,1)$, let $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$ be the A_α-matrix of the graph G, and the largest eigenvalue of A_α-matrix is called the A_α-spectral radius of G. The A_α-matrix of a graph G is a unified definition of the adjacency matrix and the signless Laplacian matrix of G. In this paper, the unique maximal and unique minimal extremal graph in the class of the complement graphs of trees with n vertices and maximum degree $\mathit{\Delta}$ is determined, respectively. Consequently, the unique minimal graph in the class of the complement graphs of trees with n vertices is also determined. The Scalar Theorem of spectral radius in the class of the complement graphs of trees with n vertices is proved.

Keywords: A_α-matrix; spectral radius; trees; complement of graph; The Scalar Theorem

MR Subject Classification: 05C50; 15A18