高校应用数学学报
2024, 39(4): 485-492

区间线性不等式组的AE区间解

夏梦雪[1], 李好好[2*]

(1. 中国人民解放军陆军炮兵防空兵学院 基础部, 安徽合肥 230000;

2. 浙江财经大学 数据科学学院, 浙江杭州 310018)

摘　要: 区间线性系统中描述问题的参数带有不确定性, 因而在工程及科技实践中更具有实际应用价值和理论研究意义. 文中主要探讨区间不等式系统的区间解问题, 首次基于逻辑量词提出AE区间解的概念, 并刻画了区间线性不等式系统AE区间解的解集特征. 主要结果涵盖了区间线性不等式系统中若干类型区间解的既有判别条件为其特例, 为统一研究约束域为区间线性不等式组的区间优化问题提供了重要的理论基础.

关键词: 区间系统; 区间线性不等式组; AE区间解

中图分类号: O151.2

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)04-0485-08

§1　引　言

传统的数学规划模型中的参数一般是确定的. 而在实际决策问题中, 常常会得到一些不确定的信息, 因此模型中相应的参数是模糊的, 随机的或有变动范围的. 称之为不确定性参数. 含有不确定性参数的优化问题为不确定优化问题. 对于不确定性规划模型, 很多学者采用随机或模糊技术加以研究. 但是此类技术中需要的概率分布和隶属函数往往不容易得知. 通常情况下, 只知道模型参数在某个区间内变化, 于是形成了区间优化模型. 近年来, 鉴于其实用性和易操作性, 区间线性规划模型和区间二次规划模型已经取得了长足的发展[1-5].

无论是区间线性规划模型还是区间二次规划模型, 它们的约束域都是区间线性系统. 因此, 要想充分研究区间线性规划问题和区间二次规划问题, 首先要对区间线性系统做深入探讨. 关于区间线性系统的研究, 目前基本上都是围绕各种解的定义和可解性展开的. 基于不同的研究背景, 学者们研究了区间线性系统的各种不同解, 其中研究较早的有弱解和强解. 在此基础上, 俄罗斯数学家Shary进一步提出了容许解、控制解、AE解的概念. 值得注意的是, 上述讨论的都是实向量形式的解. 近二十年, 区间线性系统实数解的研究已经发展得比较成熟[6-12].

然而在现实中, 特别是工程系统中, 设计者需要对区间系统的解进行内部估计. 所以在区间系统中, 还有另外一种解的类型: 区间解. 区间解不是实向量, 而是区间向量. 迄今为止, 关于区

收稿日期: 2023-11-14　　修回日期: 2024-07-11
*通讯作者, Email: hhli@zufe.edu.cn
基金项目: 浙江省自然科学基金(LY21A010021); 校一流学科B类(浙江财经大学数学)资助

间解的研究成果相对较少, 主要讨论了区间线性系统的弱区间解、强区间解、容许区间解和控制区间解[13-19].

在本文中, 首次提出区间线性不等式系统AE区间解的概念, 并刻画了AE区间解的解集特征. 文献[19]中讨论的关于弱区间解, 强区间解, 容许区间解和控制区间解的相关结论都是本文主要结果的特例. 本文的结果为统一研究约束域为区间线性不等式组的区间优化问题最优解的特征提供了重要的理论基础.

§2 预备知识

本节主要介绍一些常用符号并给出若干引理.

矩阵$A=(a_{ij})$的绝对值定义为$|A|=(|a_{ij}|)$. 称$\boldsymbol{a}=[\underline{a},\overline{a}]=\{a\in\mathbb{R}|\underline{a}\le a\le\overline{a}\}$为一个区间数. 实数$a$可被视为一个退化的区间数$a=[a,a]$. 称

$$\mathbf{A}=[\underline{A},\overline{A}]=\{A\in\mathbb{R}^{m\times n}|\underline{A}\le A\le\overline{A}\}$$

为一个区间矩阵, 其中$\underline{A},\overline{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 矩阵

$$A_c=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A}),\qquad A_\Delta=\frac{1}{2}(\overline{A}-\underline{A})$$

分别称为区间矩阵$\boldsymbol{A}$的中点矩阵和半径矩阵. 易知区间矩阵$\boldsymbol{A}=[A_c-A_\Delta,A_c+A_\Delta]$. 区间向量$\boldsymbol{b}=[\underline{b},\overline{b}]=\{b\in\mathbb{R}^m:\underline{b}\le b\le\overline{b}\}$可理解为一个单列的区间矩阵, 且$\boldsymbol{b}=[b_c-b_\Delta,b_c+b_\Delta]$.

所有$m\times n$型区间矩阵的集合记为$\mathbb{IR}^{m\times n}$, 所有m维区间向量的集合记为$\mathbb{IR}^m$.

区间数的基本算数运算定义如下.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[\underline{a}+\underline{b},\ \overline{a}+\overline{b}],$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=[\underline{a}-\overline{b},\ \overline{a}-\underline{b}],$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\},\ \max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}],$$
$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}[1/\overline{b},1/\underline{b}],\text{其中}0\notin\boldsymbol{b}.$$
$$\boldsymbol{a}\subseteq\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\underline{a}\ge\underline{b}\text{和}\overline{a}\le\overline{b}.$$

目前区间数的集合$\mathbb{IR}$上尚没有实用的全序关系, 研究者根据各自研究体系提出了不同的偏序关系. 本文采用的是文献[7]中定义的一种得到普遍应用的偏序关系.

定义2.1[7] 设$\boldsymbol{a}=[\underline{a},\overline{a}]$与$\boldsymbol{b}=[\underline{b},\overline{b}]$是两个区间数, $\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{b}$当且仅当$\underline{a}\le\underline{b}$且$\overline{a}\le\overline{b}$.

进一步, 对于区间向量$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$与$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)$, $\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{y}$当且仅当区间数$\boldsymbol{x}_i\le\boldsymbol{y}_i(i=1,\cdots,n)$. 易知$\boldsymbol{x}\ge0$当且仅当$\underline{x}\ge0$.

区间线性不等式系统

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b}\tag{1}$$

表示区间线性不等式组的集合

$$A\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b}_1,\tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}\in\mathbb{IR}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{IR}^m,A\in\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}_1\subseteq\boldsymbol{b}.\tag{3}$$

为了得到本文的结果, 需要下述引理.

引理2.1[19] 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n},\boldsymbol{x}\in\mathbb{IR}^n$, 则$A\boldsymbol{x}=[Ax_c-|A|x_\Delta,Ax_c+|A|x_\Delta]$.

§3 区间线性不等式系统的AE区间解及其特征

本节首先给出区间线性不等式系统AE区间解的定义. 通过引入逻辑量词“任意”和“存在”, 区间矩阵分解成$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\forall}+\boldsymbol{A}^{\exists}$, 其中$\boldsymbol{A}^{\forall}$是由“任意”量词系数组成的区间矩阵, $\boldsymbol{A}^{\exists}$ 表示“存在”量词系数部分的区间矩阵. 与之类似, 区间向量可分解成$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\forall}+\boldsymbol{b}^{\exists}$.

定义3.1 若对任意的$A^{\forall}\in\boldsymbol{A}^{\forall},\boldsymbol{b}_1^{\forall}\subseteq\boldsymbol{b}^{\forall}$, 都存在$A^{\exists}\in\boldsymbol{A}^{\exists},\boldsymbol{b}_1^{\exists}\subseteq\boldsymbol{b}^{\exists}$, 使得$\boldsymbol{x}\in\mathbb{IR}^n$满足

$$(A^{\forall}+A^{\exists})\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}_1^{\forall}+\boldsymbol{b}_1^{\exists},\tag{4}$$

则称区间向量$\boldsymbol{x}$是区间系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}$的AE区间解.

由上述定义易知, 文献[19]中定义的区间不等式系统的弱区间解、强区间解、容许区间解和控制区间解均为AE区间解的特例.

下面给出AE区间解在不确定型营养配餐问题中的应用.

例3.1 “生之道, 莫先于食”. 饮食不仅为日常所需, 更是民众保健强身, 预防疾病的重要手段之一. 近年来, 大健康养身意识逐渐在人们的生活中占据重要地位, 对于不同食物(例如: 面包、蛋糕、饼干等), 不仅要考虑其是否能够充分满足自身所需的各种营养元素(例如: 蛋白质、维生素等), 同时又要提防所摄入的食品添加剂(例如: 山梨酸钾、卵磷脂等)不能过多, 以免损害自身健康.

设有n种不同的食物, 所含添加剂共有l种, 人体所需m种营养元素. 其中, x_i是要消耗的第i种食物的数量, $b_i^{\forall}$是人体所需的第i种营养元素的含量, $b_i^{\exists}$是人体所能摄入的第i种添加剂的含量, $a_{ij}^{\exists}$是第i种食物单位数量内所具有的第j种营养元素的含量, $a_{ij}^{\forall}$是第i种食物单位数量内所具有的第j种添加剂的含量. 由于制作工艺的不同, 每种食物中所含的营养元素$a_{ij}^{\exists}$和添加剂$a_{ij}^{\forall}$都不是恒定的, 但根据调查数据二者分别可以确定在$[\underline{a_{ij}^{\exists}},\overline{a_{ij}^{\exists}}]$以及$[\underline{a_{ij}^{\forall}},\overline{a_{ij}^{\forall}}]$内波动. 同时由于人体受年龄、性别等各方面因素的影响, 其所需要的营养元素含量$b_i^{\forall}$, 所能摄入的第i种食物的单位数量x_i和食品添加剂含量$b_i^{\exists}$也都是区间量, 分别记为$[\underline{b_i^{\forall}},\overline{b_i^{\forall}}]$, $[\underline{x_i},\overline{x_i}]$和$[\underline{b_i^{\exists}},\overline{b_i^{\exists}}]$. 事实上, 期望不论人体所需的营养元素位于哪个区间段, 即任意$[\underline{b_{i_1}^{\forall}},\overline{b_{i_1}^{\forall}}]\subseteq[\underline{b_i^{\forall}},\overline{b_i^{\forall}}]$, 都可以在$[\underline{a_{ij}^{\exists}},\overline{a_{ij}^{\exists}}]$的每一种可能性里找到一个可行的数值, 使得$a_{i1}^{\exists}[\underline{x_1},\overline{x_1}]+a_{i2}^{\exists}[\underline{x_2},\overline{x_2}]+\cdots+a_{in}^{\exists}[\underline{x_n},\overline{x_n}]\geq[\underline{b_{i_1}^{\forall}},\overline{b_{i_1}^{\forall}}]$. 同时为了健康着想, 在食品添加剂的$[\underline{a_{ij}^{\forall}},\overline{a_{ij}^{\forall}}]$的每一个可能的取值中, 都能找到一个身体所能承受的区间段$[\underline{b_{i_1}^{\exists}},\overline{b_{i_1}^{\exists}}]\subseteq[\underline{b_i^{\exists}},\overline{b_i^{\exists}}]$使得$a_{i1}^{\forall}[\underline{x_1},\overline{x_1}]+a_{i2}^{\forall}[\underline{x_2},\overline{x_2}]+\cdots+a_{in}^{\forall}[\underline{x_n},\overline{x_n}]\leq[\underline{b_{i_1}^{\exists}},\overline{b_{i_1}^{\exists}}]$. 这个任务相当于解决以下问题

$$\begin{cases} a_{i1}^{\exists}[\underline{x_1},\overline{x_1}]+a_{i2}^{\exists}[\underline{x_2},\overline{x_2}]+\cdots+a_{in}^{\exists}[\underline{x_n},\overline{x_n}]\geq[\underline{b_{i_1}^{\forall}},\overline{b_{i_1}^{\forall}}],\ i=1,\cdots,m,\\ a_{i1}^{\forall}[\underline{x_1},\overline{x_1}]+a_{i2}^{\forall}[\underline{x_2},\overline{x_2}]+\cdots+a_{in}^{\forall}[\underline{x_n},\overline{x_n}]\leq[\underline{b_{i_1}^{\exists}},\overline{b_{i_1}^{\exists}}],\ i=1,\cdots,l. \end{cases}$$

上述实际问题的解决就是需要求区间系统

$$\begin{bmatrix} -[\underline{a_{11}^{\exists}},\overline{a_{11}^{\exists}}] & \cdots & -[\underline{a_{1n}^{\exists}},\overline{a_{1n}^{\exists}}]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -[\underline{a_{m1}^{\exists}},\overline{a_{m1}^{\exists}}] & \cdots & -[\underline{a_{mn}^{\exists}},\overline{a_{mn}^{\exists}}]\\ [\underline{a_{11}^{\forall}},\overline{a_{11}^{\forall}}] & \cdots & [\underline{a_{1n}^{\forall}},\overline{a_{1n}^{\forall}}]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ [\underline{a_{l1}^{\forall}},\overline{a_{l1}^{\forall}}] & \cdots & [\underline{a_{ln}^{\forall}},\overline{a_{ln}^{\forall}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\underline{x_1},\overline{x_1}]\\ \vdots\\ [\underline{x_n},\overline{x_n}] \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -[\underline{b_1^{\forall}},\overline{b_1^{\forall}}]\\ \vdots\\ -[\underline{b_m^{\forall}},\overline{b_m^{\forall}}]\\ [\underline{b_1^{\exists}},\overline{b_1^{\exists}}]\\ \vdots\\ [\underline{b_l^{\exists}},\overline{b_l^{\exists}}] \end{bmatrix}$$

的一个AE区间解的问题.

接下来, 具体刻画系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$中AE区间解的解集特征.

定理3.1 区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个AE区间解当且仅当$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \exists A^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}$,

$$(A^{\forall} + A^{\exists})x_c - b_c \le -|A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} + (b^{\exists}_{\Delta} - b^{\forall}_{\Delta}). \tag{5}$$

证 "必要性" 若$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是区间线性不等式系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个AE区间解, 即$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \forall \boldsymbol{b}^{\forall}_1 \subseteq \boldsymbol{b}^{\forall}, \exists A^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}, \exists \boldsymbol{b}^{\exists}_1 \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists}$, 使得(4)式成立.

由定义3.1和引理2.1有

$$\begin{cases} (A^{\forall} + A^{\exists})x_c - |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le \underline{b}^{\forall}_1 + \underline{b}^{\exists}_1, \\ (A^{\forall} + A^{\exists})x_c + |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le \overline{b}^{\forall}_1 + \overline{b}^{\exists}_1. \end{cases}$$

令$\boldsymbol{b}^{\forall}_1 = [b^{\forall}_c - b^{\forall}_{\Delta}, b^{\forall}_c - b^{\forall}_{\Delta}] \subseteq \boldsymbol{b}^{\forall}$, 则由上式可知

$$(A^{\forall} + A^{\exists})x_c + |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le b^{\forall}_c - b^{\forall}_{\Delta} + \overline{b}^{\exists}_1 \le b^{\forall}_c - b^{\forall}_{\Delta} + b^{\exists}_c + b^{\exists}_{\Delta} = b_c + (b^{\exists}_{\Delta} - b^{\forall}_{\Delta}),$$

即(5)式成立.

"充分性" 若(5)式成立, 则对于$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \exists A^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}$, 有

$$(A^{\forall} + A^{\exists})x_c + |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le b^{\forall}_c + b^{\exists}_c + (b^{\exists}_{\Delta} - b^{\forall}_{\Delta}) = \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}, \tag{6}$$

$$(A^{\forall} + A^{\exists})x_c - |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le (A^{\forall} + A^{\exists})x_c + |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists}. \tag{7}$$

令$\boldsymbol{b}^{\exists}_1 = [\overline{b}^{\exists}, \overline{b}^{\exists}] \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists}$, 故对于$\forall \boldsymbol{b}^{\forall}_1 \subseteq \boldsymbol{b}^{\forall}$,

$$\begin{cases} (A^{\forall} + A^{\exists})x_c - |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} \le \underline{b}^{\forall}_1 + \underline{b}^{\exists}_1, \\ (A^{\forall} + A^{\exists})x_c + |A^{\forall} + A^{\exists}|x_{\Delta} \le \underline{b}^{\forall} + \overline{b}^{\exists} \le \overline{b}^{\forall}_1 + \overline{b}^{\exists}_1. \end{cases}$$

根据引理2.1和定义3.1知$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的AE区间解.

在很多区间理论的应用中, 如控制系统故障诊断中的各种相关问题, 相应数学模型对变量都有非负约束. 因此接下来, 进一步给出区间线性不等式系统非负AE区间解的特征描述.

定理3.2 非负区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个AE区间解当且仅当

$$(\overline{A}^{\forall} + \underline{A}^{\exists})x_c + (|\overline{A}^{\forall}| + |\underline{A}^{\exists}|)x_{\Delta} \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}. \tag{8}$$

证 "必要性" 若$\boldsymbol{x} \ge 0$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个AE区间解, 则由定义可知$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \forall \boldsymbol{b}^{\forall}_1 \subseteq \boldsymbol{b}^{\forall}, \exists A^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}, \exists \boldsymbol{b}^{\exists}_1 \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists}$, 使得

$$A^{\forall}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\forall}_1 + A^{\exists}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}^{\exists}_1. \tag{9}$$

令$A^{\forall} = \overline{A}^{\forall}, \boldsymbol{b}^{\forall}_1 = \boldsymbol{b}^{\forall}$, 结合定义2.1, 由(9)式可知

$$\overline{\overline{A}^{\forall}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\forall} + A^{\exists}\boldsymbol{x}} \le \overline{\boldsymbol{b}^{\exists}_1},$$

即$\overline{\overline{A}^{\forall}\boldsymbol{x}} - \underline{b}^{\forall} + \overline{A^{\exists}\boldsymbol{x}} \le \overline{b_1}^{\exists} \le \overline{b}^{\exists}$.

由引理2.1, $\overline{\overline{A}^{\forall}\boldsymbol{x}} = \overline{A}^{\forall}x_c + |\overline{A}^{\forall}|x_{\Delta}$, 故

$$\overline{A}^{\forall}x_c + |\overline{A}^{\forall}|x_{\Delta} - \underline{b}^{\forall} + \overline{A^{\exists}\boldsymbol{x}} \le \overline{b}^{\exists}. \tag{10}$$

另一方面, 因为$\boldsymbol{x} \ge 0$, 由区间向量的定义易知

$$\begin{cases} \overline{A^{\exists}_{i,\cdot}\boldsymbol{x}} = \sum_{j\in T_1} \overline{a}^{\exists}_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j\in T_2} \overline{a}^{\exists}_{ij}\underline{x}_j, \\ \underline{A^{\exists}_{i,\cdot}\boldsymbol{x}} = \sum_{j\in T_3} \underline{a}^{\exists}_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j\in T_4} \underline{a}^{\exists}_{ij}\underline{x}_j, \end{cases}$$

其中$i = 1, \cdots, m$, $T_1 = \{j|\overline{a}^{\exists}_{ij} \ge 0\}, T_2 = \{j|\overline{a}^{\exists}_{ij} < 0\}, T_3 = \{j|\underline{a}^{\exists}_{ij} \ge 0\}, T_4 = \{j|\underline{a}^{\exists}_{ij} < 0\}$. 由

于$\underline{a}_{ij}^{\exists} \le a_{ij}^{\exists}$以及$\boldsymbol{x} \ge 0$, 因此$T_3 \subseteq T_1$且$T_2 \subseteq T_4$. 为了方便讨论, 不妨设

$$T_1 = \{1, 2, \cdots, t+1\}, T_2 = \{t+2, t+3, \cdots, n\}$$
$$T_3 = \{1, 2, \cdots, t\}, T_4 = \{t+1, t+2, \cdots, n\},$$

则

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{A}_{i,\cdot}^{\exists}\boldsymbol{x}} &= \underline{A}_{i,\cdot}^{\exists} x_c + |\underline{A}_{i,\cdot}^{\exists}| x_\Delta = \sum_{j \in T_3} \underline{a}_{ij}^{\exists} \overline{x}_j + \sum_{j \in T_4} \underline{a}_{ij}^{\exists} \underline{x}_j = \\
& \underline{a}_{i1}^{\exists} \overline{x}_1 + \underline{a}_{i2}^{\exists} \overline{x}_2 + \cdots + \underline{a}_{it}^{\exists} \overline{x}_t + \underline{a}_{i,t+1}^{\exists} \underline{x}_{t+1} + \underline{a}_{i,t+2}^{\exists} \underline{x}_{t+2} + \cdots + \underline{a}_{in}^{\exists} \underline{x}_n \le \\
& a_{i1}^{\exists} \overline{x}_1 + a_{i2}^{\exists} \overline{x}_2 + \cdots + a_{it}^{\exists} \overline{x}_t + a_{i,t+1}^{\exists} \underline{x}_{t+1} + a_{i,t+2}^{\exists} \underline{x}_{t+2} + \cdots + a_{in}^{\exists} \underline{x}_n \le \\
& a_{i1}^{\exists} \overline{x}_1 + a_{i2}^{\exists} \overline{x}_2 + \cdots + a_{it}^{\exists} \overline{x}_t + a_{i,t+1}^{\exists} \overline{x}_{t+1} + a_{i,t+2}^{\exists} \underline{x}_{t+2} + \cdots + a_{in}^{\exists} \underline{x}_n = \\
& \sum_{j \in T_1} a_{ij}^{\exists} \overline{x}_j + \sum_{j \in T_2} a_{ij}^{\exists} \underline{x}_j = \\
& \overline{A_{i,\cdot}^{\exists}\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}$$

故$\overline{A^{\exists}\boldsymbol{x}} \ge \overline{\underline{A}^{\exists}\boldsymbol{x}}$. 代入(10)式, 结合引理2.1得

$$\overline{A}^{\forall} x_c + |\overline{A}^{\forall}| x_\Delta - \underline{b}^{\forall} + \underline{A}^{\exists} x_c + |\underline{A}^{\exists}| x_\Delta \le \overline{b}^{\exists}, \tag{11}$$

即(8)式成立.

“充分性” 假设(8)式成立, 即(11)式成立.

因为$\boldsymbol{x} \ge 0$, 类似于“必要性”的分析, 可得$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}$, $\overline{A^{\forall}\boldsymbol{x}} \le \overline{\overline{A}^{\forall}\boldsymbol{x}}$. 由引理知

$$A^{\forall} x_c + |A^{\forall}| x_\Delta \le \overline{A}^{\forall} x_c + |\overline{A}^{\forall}| x_\Delta.$$

结合(8)式, 对于$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}$有

$$A^{\forall} x_c + |A^{\forall}| x_\Delta + \underline{A}^{\exists} x_c + |\underline{A}^{\exists}| x_\Delta \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall},$$

即$(A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}) x_c + (|A^{\forall}| + |\underline{A}^{\exists}|) x_\Delta \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}$. 因为$|A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}| \le |A^{\forall}| + |\underline{A}^{\exists}|$, 所以

$$(A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}) x_c + |A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}| x_\Delta \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}.$$

因此

$$\begin{cases} (A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}) x_c + |A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}| x_\Delta \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}, \\ (A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}) x_c - |A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}| x_\Delta \le \overline{b}^{\exists} + \underline{b}^{\forall}. \end{cases}$$

故对于$\forall A^{\forall} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \forall \boldsymbol{b}_1^{\forall} \subseteq \boldsymbol{b}^{\forall}$, $\exists A^{\exists} = \underline{A}^{\exists} \in \boldsymbol{A}^{\exists}$, $\exists \boldsymbol{b}_1^{\exists} = [\overline{b}^{\exists}, \overline{b}^{\exists}] \subseteq \boldsymbol{b}^{\exists}$, 有

$$(A^{\forall} + \underline{A}^{\exists}) \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1^{\forall} + \boldsymbol{b}_1^{\exists}.$$

因此由定义知, $\boldsymbol{x} \ge 0$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的AE区间解.

由于以上定理(8)式中的向量及矩阵均为确定型的实向量和实矩阵, 因此相较于定理3.1, 定理3.2具有更强的实用性.

§4 若干推论及算例

文献[19]中定义的弱区间解、强区间解、容许区间解、控制区间解均为本文定义的AE区间解之特例. 因此基于定理3.1和定理3.2, 可以得到以下推论.

推论4.1 区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个弱区间解当且仅当$\exists A \in \boldsymbol{A}$,

$$A x_c - b_c \le -|A| x_\Delta + b_\Delta.$$

证 区间线性系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$中, 令$\boldsymbol{A}^{\forall} = 0, \boldsymbol{b}^{\forall} = 0$, 由定理3.1即可得证.

以下推论的证明均与推论4.1证明过程类似, 故省略.

推论4.2 区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个强区间解当且仅当$\forall A \in \boldsymbol{A}$,

$$Ax_c - b_c \le -|A|x_\Delta - b_\Delta.$$

推论4.3 区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个容许区间解当且仅当$\forall A \in \boldsymbol{A}$,

$$Ax_c - b_c \le -|A|x_\Delta + b_\Delta.$$

推论4.4 区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个控制区间解当且仅当$\exists A \in \boldsymbol{A}$,

$$Ax_c - b_c \le -|A|x_\Delta - b_\Delta.$$

推论4.1-推论4.4与文献[19]中特征刻画完全吻合. 以下推论4.5-推论4.8则给出了检验非负弱区间解、非负强区间解、非负容许区间解、非负控制区间解的充要条件.

推论4.5 非负区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个弱区间解当且仅当$\underline{A}x_c + |\underline{A}|x_\Delta \le \overline{b}$.

推论4.6 非负区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个强区间解当且仅当$\overline{A}x_c + |\overline{A}|x_\Delta \le \underline{b}$.

推论4.7 非负区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个容许区间解当且仅当$\overline{A}x_c + |\overline{A}|x_\Delta \le \overline{b}$.

推论4.8 非负区间向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$的一个控制区间解当且仅当$\underline{A}x_c + |\underline{A}|x_\Delta \le \underline{b}$.

下面给出利用定理3.1和定理3.2判定AE区间解的两个算例.

例4.1 考虑区间线性不等式系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}^{\forall} = \begin{pmatrix} 1 & [-1,0] \\ 1 & [-1,1] \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{\exists} = \begin{pmatrix} [0,1] & 1 \\ 1 & [0,1] \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{\forall} = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}^{\exists} = \begin{pmatrix} [-1,0] \\ 1 \end{pmatrix}.$$

判断$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ 1 \end{pmatrix}$是否为不等式系统的AE区间解.

由条件可知

$$b_c = b_c^{\exists} + b_c^{\forall} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_\Delta^{\exists} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, b_\Delta^{\forall} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, x_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令} A^{\forall} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{A}^{\forall}, \text{则} \forall A^{\exists} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \in \boldsymbol{A}^{\exists} (a, b \ge 0) \text{有}$$

$$\begin{aligned} (A^{\forall} + A^{\exists})x_c - b_c &= \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}, \\ -|A^{\forall} + A^{\exists}|x_\Delta + (b_\Delta^{\exists} - b_\Delta^{\forall}) &= -\begin{pmatrix} |1+a| & 1 \\ 2 & |b| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & -\begin{pmatrix} |1+a| \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为$\begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} > -\begin{pmatrix} |1+a| \\ 2 \end{pmatrix}$, 所以$(A^{\forall} + A^{\exists})x_c - b_c > -|A^{\forall} + A^{\exists}|x_\Delta + (b_\Delta^{\exists} - b_\Delta^{\forall})$. 因此由定

理4.1可知$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}[-1,1]\\1\end{pmatrix}$不是该系统的AE区间解.

例4.2 考虑区间线性不等式系统$\boldsymbol{Ax}\le\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}^{\forall}=\begin{pmatrix}1&[-1,0]\\1&[-1,1]\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{\exists}=\begin{pmatrix}[0,1]&[-1,1]\\1&[-1,0]\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}^{\forall}=\begin{pmatrix}[-1,0]\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}^{\exists}=\begin{pmatrix}[1,2]\\3\end{pmatrix}.$$

判断$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}[0,1]\\1\end{pmatrix}$是否为不等式系统的AE区间解.

由条件可知

$$\overline{A}^{\forall}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \underline{A}^{\exists}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},\ x_c=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\ x_{\Delta}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned}&(\overline{A}^{\forall}+\underline{A}^{\exists})x_c+(|\overline{A}^{\forall}|+|\underline{A}^{\exists}|)x_{\Delta}=\\&(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}+(\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\\&\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

又由题可知

$$\underline{b}^{\forall}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\ \overline{b}^{\exists}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$

所以

$$\underline{b}^{\forall}+\overline{b}^{\exists}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

故(8)式成立, 由定理3.2知区间向量$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}[0,1]\\1\end{pmatrix}$是该系统的AE区间解.

参考文献:

[1] Li Wei, Xia Mengxue, Li Haohao. New method for computing the upper bound of optimal value in interval quadratic program[J]. J Comput Appl Math, 2015, 288: 70-80.

[2] Li Wei, Xia Mengxue, Li Haohao. Some results on the upper bound of optimal values in interval convex quadratic programming[J]. J Comput Appl Math, 2016, 302: 38-49.

[3] Li Wei, Jin Jianghong, Xia Mengxue, et al. Some properties of the lower bound of optimal values in interval convex quadratic programming[J]. Optim Lett, 2017, 11(7): 1443-1458.

[4] Luo Jiajia, Li Wei. Strong optimal solutions of interval linear programming[J]. Linear Algebra Appl, 2013, 439(8): 2479-2493.

[5] Luo Jiajia, Li Wei, Wang Qin. Checking strong optimality of interval linear programming with inequality constraints and nonnegative constraints[J]. J Comput Appl Math, 2014, 260(1): 180-190.

[6] Neumaier A. Interval Methods for Systems of Equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
[7] Ishibuchi H, Tanaka H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function[J]. Euro J Oper Res, 1990, 48: 219-225.
[8] Fiedler M, Nedoma J, Ramík J, et al. Linear Optimization Problems with Inexact Data[M]. New York: Springer-Verlag, 2006.
[9] 李炜, 夏梦雪, 李好好. 一般区间线性系统的Farkas型定理[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(11): 1959-1971.
[10] Shary S P. On controlled solution set of interval algebraic systems[J]. Interval Comput, 1992, 4(6): 66-75.
[11] Shary S P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance, and control problems, or one more application of Kaucher arithmetic[J]. Reliab Comput, 1996, 2(1): 3-33.
[12] Shary S P. A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity[J]. Reliab Comput, 2002, 8(5): 321-418.
[13] Ratschek H, Sauer W. Linear interval equations[J]. Computing, 1982, 28(2): 105-115.
[14] Rohn J. Interval solutions of linear interval equations[J]. Aplikace Matematiky, 1990, 35(3): 220-224.
[15] Nirmala T, Datta D, Kushwaha H S, et al. Inverse interval matrix: a new approach[J]. Appl Math Sci, 2011, 5(13): 607-624.
[16] Allahviranloo T, Ghanbari M. A new approach to obtain algebraic solution of interval linear systems[J]. Soft Comput, 2012, 16(1): 121-133.
[17] Ghanbari M, Allahviranloo T, Haghi E. Estimation of algebraic solution by limiting the solution set of an interval linear system[J]. Soft Comput, 2012, 16(12): 2135-2142.
[18] 胡金燕, 李炜, 金江红. 区间线性规划的代数最优解[J]. 高校应用数学学报, 2018, 33(3): 350-356.
[19] 李好好, 夏梦雪, 金江红. 区间线性系统的区间解[J]. 系统科学与数学, 2021, 41(12): 3395-3404.

AE interval solutions to interval linear inequalities

XIA Meng-xue[1], LI Hao-hao[2]

(1. Department of Basic, PLA Army Academy of Artillery and Air Defense, Hefei 230000, China;
2. School of Data Sciences, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The mathematical models of various uncertain systems in engineering and scientific practice can be described by interval systems and interval optimization models, which are of more practical value and theoretical significance. The article mainly discusses the interval solution problem of interval inequalities. Based on logical quantifiers, a new concept of AE interval solution is defined for the first time, and corresponding characterizations are fully proposed. In particular, the characterizations of weak interval solution, strong interval solution, tolerance interval solution and control interval solution of the interval inequalities $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ are established. The main results may provide an theoretical basis for the study of interval optimization problems in a general form.

Keywords: interval systems; interval linear inequalities; AE interval solutions

MR Subject Classification: 15A06; 65G40