高校应用数学学报
2024, 39(4): 473-484

广义Morrey-Banach空间上双线性分数次积分算子及其交换子的估计

李雪梅, 逯光辉*

(西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃兰州 730070)

摘 要: 该文讨论了双线性分数次积分算子B_α及其交换子B_{α,b_1,b_2}在广义Morrey-Banach空间$M_u(X)$上的有界性. 在假设Lebesgue可测函数u满足某些特定的条件下, 证明了B_α是从乘积空间$M_{u_1}(X_1)\times M_{u_2}(X_2)$到空间$M_u(Y)$有界的. 进一步, 证明了由$b_1,b_2\in \mathrm{BMO}(X)$和$B_\alpha$生成的交换子$B_{\alpha,b_1,b_2}$是从乘积空间$M_{u_1}(X_1)\times M_{u_2}(X_2)$到空间$M_u(Y)$有界的, 其中$u_1u_2=u$.

关键词: 广义Morrey-Banach空间; 双线性分数次积分算子; 交换子; $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$空间; 有界性

中图分类号: O174.2

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)04-0473-12

§1 引 言

众所周知, 作为调和分析中一类重要的积分算子, 分数次积分算子在调和分析、偏微分方程和位势理论中起着重要的作用[1]. 即: $\forall x\in\mathbf{R}^n, f\in L_b^\infty(\mathbf{R}^n)$有

$$I_\alpha(f)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y,$$

其中$L_b^\infty(\mathbf{R}^n)$表示所有具有有界紧支集的$L^\infty(\mathbf{R}^n)$函数构成的空间. 此后, 该类算子在不同函数空间上的有界性得到了广泛地关注. 例如: 文献[2-3]分别研究了分数次积分算子I_α在Orlicz型Hardy空间$(HE_\Phi^q)_t(\mathbf{R}^n)$上的有界性以及$I_\alpha$是从变指标Morrey空间$M_u^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$到变指标弱Morrey空间$M_{u,\omega k}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$有界的; 周疆等人在文献[4]中研究了球Banach函数空间X上分数次积分算子的紧性. 更多关于此类算子的研究, 见文献[5-6]. Kenig等人在文献[7]中首次引入了双线性分数次积分算子B_α, 并证明了该算子是从乘积空间$L^{p_1}(\mathbf{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbf{R}^n)$到空间$L^q(\mathbf{R}^n)$是有界的(其中$\frac{1}{q}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$). 近年来, 这类算子得到了广泛关注. 例如: 2021年, 逯光辉和陶双平在文献[8]中研究了两类双线性分数次积分算子B_α和$\mathcal{I}_\alpha$在广义分数次Morrey空

收稿日期: 2023-01-08　　修回日期: 2024-04-12

*通讯作者, E-mail: lghwmm1989@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(12201500); 甘肃省青年科技基金计划(22JR5RA173); 西北师范大学2022年度研究生科研资助项目(2022KYZZ-S121)

间$\mathcal{L}^{p,\eta,\varphi}$上是有界的. 2022年, 逯光辉和陶双平在文献[9]中证明了双线性θ型广义分数次积分算子$B\tilde{T}_{\alpha,\theta}$和它的交换子$[b_1,b_2,B\tilde{T}_{\alpha,\theta}]$是从乘积Morrey空间$M_{q_1}^{p_1}(\mu)\times M_{q_2}^{p_2}(\mu)$到Morrey空间$M_q^p(\mu)$有界的. 2024年, 逯光辉等人在文献[10]中讨论了双线性广义分数次积分算子$\tilde{T}_\alpha$是从乘积广义Morrey空间$\mathcal{L}^{\varphi_1,p_1}\times\mathcal{L}^{\varphi_2,p_2}(X)$到广义Morrey空间$\mathcal{L}^{\varphi,q}(X)$有界的. 更多双线性分数次积分算子在不同函数空间上的有界性可见文献[11-12].

受上述启发, 本文主要研究双线性分数次积分算子B_α及其交换子B_{α,b_1,b_2}在广义Morrey-Banach空间$M_u(X)$上的有界性.

在给出本文的主要结果之前, 首先回顾一些概念和注记.

定义1.1[13] Banach空间$X\subset\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$称为$\mathbf{R}^n$上的Banach函数空间(简写为$\mathcal{B}$), 若$X$满足以下条件.

(1) $\|f\|_X=0\Longleftrightarrow f=0$ a.e. , (2) $|g|\le|f|$ a.e. $\Longrightarrow\|g\|_X\le\|f\|_X$,

(3) $0\le f_n\uparrow f$ a.e. $\Longrightarrow\|f_n\|_X\uparrow\|f\|_X$, (4) $\chi_E\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^n),|E|<\infty\Longrightarrow\chi_E\in X$,

(5) $\chi_E\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^n),|E|<\infty\Longrightarrow\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<C_E\|f\|_X,\quad\forall f\in X,C_E>0$.

定义1.2[14] 设X是Banach函数空间, 则X的对偶空间为X', 其中X'表示所有Lebesgue可测函数f的集合, 且有

$$\|f\|_{X'}=\sup_{g\in X,\|g\|_X\le1}\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|<\infty.\tag{1}$$

注1.3 当X是$\mathcal{B}$时, X'也是$\mathcal{B}$.

定义1.4[1] $\forall x\in\mathbf{R}^n$及$1<q\le p<\infty$, Morrey空间$M_q^p(\mathbf{R}^n)$定义为

$$M_q^p(\mathbf{R}^n)=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbf{R}^n):\|f\|_{M_q^p(\mathbf{R}^n)}<\infty\right\},\tag{2}$$

其中$\|f\|_{M_q^p(\mathbf{R}^n)}=\sup\limits_B|B|^{\frac1p-\frac1q}\left(\int_B|f(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac1q}$, 且上确界取遍所有的球$B$.

注1.5[15] 当$p=q$时, $M_q^p(\mathbf{R}^n)=L^p(\mathbf{R}^n)$; 当$p=\infty$时, $M_q^p(\mathbf{R}^n)=L^\infty(\mathbf{R}^n)$; 当$p<q$时, $M_q^p(\mathbf{R}^n)=\Theta$, Θ表示在$\mathbf{R}^n$上所有等于0的函数集合.

定义1.6[16] 对于任意的Banach函数空间X, $\mathbb{M}$定义为

(1) 若Hardy-Littlewood极大算子M在空间X上有界, 则表示为$X\in\mathbb{M}$,

(2) 若Hardy-Littlewood极大算子M在空间X'上有界, 则表示为$X'\in\mathbb{M}'$.

接下来, 给出广义Morrey-Banach空间的定义.

定义1.7 设X是Banach函数空间, 若$u(x,r):\mathbf{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$是Lebesgue可测函数, 则广义Morrey-Banach空间$M_u(X)$定义为

$$M_u(X)=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbf{R}^n):\|f\|_{M_u(X)}<\infty\right\},\tag{3}$$

其中$\|f\|_{M_u(X)}=\sup\limits_{x\in X,r>0}\dfrac{1}{u(x,r)}\dfrac{1}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X}\|\chi_{B(x,r)}f\|_X$, 且$f\in\mathcal{M}(X)$.

本文需要如下的条件$\mathbb{W}_X^\alpha$.

定义1.8 设X是Banach函数空间, 及$u(x,r):\mathbf{R}^n\times(0,\infty)\to(0,\infty)$是Lebesgue可测函数. 若存在正常数$C$, 使得对于所有的$x\in\mathbf{R}^n,r>0$. 可测函数$u$满足以下三个条件

$$C\le u(x,r),\quad\forall x\in\mathbf{R}^n,r\ge1,\tag{4}$$

$$\|\chi_{B(x,r)}\|_X\le Cu(x,r),\quad\forall x\in\mathbf{R}^n,r<1,\tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \frac{u(x,2^{j+1}r)\|\chi_{B(x,2^{j+1}r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X} \le Cu(x,r). \tag{6}$$

则称$u \in \mathbb{W}_X^{\alpha}(\alpha \ge 0)$.

定义1.9[8] 设函数$b \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$. 若

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}(X)} = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_{\mathrm{B}} |b(y)-b_B|\mathrm{d}y < C, \tag{7}$$

其中b_B表示函数b在球B上的平均, 即$b_B = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B b(y)\mathrm{d}y$, 则称$b \in \mathrm{BMO}(X)$, 其范数记为$\|b\|_{\mathrm{BMO}(X)}$或$\|b\|_*$.

定义1.10[8] 设$0<\alpha<2n, f_1, f_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, 双线性分数次积分算子定义为

$$B_\alpha(f_1,f_2)(x) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{f_1(y_1)f_2(y_2)}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2. \tag{8}$$

给定$b_1, b_2 \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$, 由$b_1, b_2$和$B_\alpha$所生成的交换子$B_{\alpha,b_1,b_2}$定义为

$$B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1,f_2)(x) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{\big(b_1(x)-b_1(y_1)\big)\big(b_2(x)-b_2(y_2)\big)f_1(y_1)f_2(y_2)}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2. \tag{9}$$

本文中设$B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x-y| < r\}$, 表示以$x \in \mathbf{R}^n$为中心且$r>0$为半径的开球. 此外用$\mathbb{B} = \{B(x,r) : x \in \mathbf{R}^n, r > 0\}$表示开球集族. 设$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$和$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$分别表示$\mathbf{R}^n$上Lebesgue可测函数空间和局部可积函数空间, $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$是具有紧支集的光滑函数空间, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$是Schwartz函数空间, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$的对偶空间是$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$(缓增广义函数类).

§2 预备知识

引理2.1[17] 设X是Banach函数空间, 对于$\forall f \in X, g \in X'$, 则有

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \|f\|_X\|g\|_{X'}. \tag{10}$$

引理2.2[18] 设X是Banach函数空间, 如果$X \in \mathbb{M}\bigcup\mathbb{M}'$, 则存在常数$C \ge 1$, 使得

$$|B| \le \|\chi_B\|_X\|\chi_B\|_{X'} \le C|B|, \quad B \in \mathbb{B}. \tag{11}$$

引理2.3 若$u_i \in \mathbb{W}^{\alpha}_{X_i}, i=1,2$, 则存在正常数$C$, 使得$\forall x \in \mathbf{R}^n, r>0$有

$$u(x,2r) \le Cu(x,r). \tag{12}$$

证 由定义1.8, 在式(6)中取$j=0$, 即

$$\frac{\|\chi_{B(x,2r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X}u(x,2r) \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha}\frac{\|\chi_{B(x,2^{j+1}r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,r)}\|_X}u(x,2^{j+1}r) \le Cu(x,r), \tag{13}$$

又

$$\|\chi_{B(x,r)}\|_X \le C\|\chi_{B(x,2r)}\|_X, \tag{14}$$

由引理2.2得

$$u(x,2r) \le C\frac{\|\chi_{B(x,r)}\|_X}{\|\chi_{B(x,2r)}\|_X}u(x,r) \le C\frac{\|\chi_{B(x,r)}\|_X\|\chi_{B(x,2r)}\|_{X'}}{|B(x,2r)|}u(x,r) \le$$
$$C\frac{\|\chi_{B(x,2r)}\|_X\|\chi_{B(x,2r)}\|_{X'}}{|B(x,2r)|}u(x,r) \le Cu(x,r).$$

§3 主要定理及证明

定理3.1 设X_1, X_2和Y是Banach函数空间, 其中$X_i \in \mathbb{M}\bigcup\mathbb{M}'$, $u \in \mathbb{W}^{\alpha}_X$, $u_i \in \mathbb{W}^{\alpha}_{X_i}(0 \le \alpha < 2n,\ i=1,2)$, 且$u_1u_2 = u$. 假设式(8)所定义的双线性分数次积分算子$B_\alpha$是从乘积空

间$X_1\times X_2$到空间Y有界的, 且满足

$$|B|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_B\|_{Y'}\|\chi_B\|_{X_1}\|\chi_B\|_{X_2}\le C|B|, \tag{15}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\le C. \tag{16}$$

则存在正常数C, 使得对所有的$f_1\in X_1\bigcap M_{u_1}(X_1)$和$f_2\in X_2\bigcap M_{u_2}(X_2)$有

$$\|B_\alpha(f_1,f_2)\|_{M_u(Y)}\le C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_1)}.$$

证 设$B(z,r)\in\mathbb{B}$. 对函数f_i进行如下分解

$$f_i=f_i^1+f_i^\infty=f_i\chi_{2B}+f_i\chi_{X\backslash 2B}, i=1,2,$$

则由Minkowski不等式得

$$\begin{aligned}\|B_\alpha(f_1,f_2)\|_{M_u(Y)}\le{}&\|B_\alpha(f_1^1,f_2^1)\|_{M_u(Y)}+\|B_\alpha(f_1^1,f_2^\infty)\|_{M_u(Y)}+\\&\|B_\alpha(f_1^\infty,f_2^1)\|_{M_u(Y)}+\|B_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)\|_{M_u(Y)}:=\\&\mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2+\mathrm{D}_3+\mathrm{D}_4.\end{aligned}$$

对于D_1, 由$\|B_\alpha(f_1,f_2)\|_Y\le C\|f_1\|_{X_1}\|f_2\|_{X_2}$, $u_1u_2=u$, 式(3), 式(16)和引理2.3, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|B_\alpha(f_1^1,f_2^1)\chi_{B(z,r)}\|_Y\le\\&C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}\le\\&\quad C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}u_1(z,2r)\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}u_2(z,2r)\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}\times\\&\quad\frac{1}{u_1(z,2r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}}\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\frac{1}{u_2(z,2r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}\le\\&C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\frac{u_1(z,r)u_2(z,r)}{u(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\le\\&C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)},\end{aligned}$$

对上式两边同时取上确界, 得到

$$\mathrm{D}_1\le C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

为了估计D_2, 首先考虑$|B_\alpha(f_1^1,f_2^\infty)(x)|$且$x\in B(z,r)$. 由Hölder不等式, 式(3), 式(6), 引理2.2以及$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,(\alpha_1,\alpha_2\in(0,n))$, 得到

$$\begin{aligned}|B_\alpha(f_1^1,f_2^\infty)(x)|\le{}&\int_{2B\times(X\backslash 2B)}\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le\\&C\int_{2B}|f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(z,2^{j+1}r)\backslash B(z,2^jr)}\frac{|f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_2\le\\&C\int_{2B}|f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\int_{B(z,2^{j+1}r)}|f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\le\\&C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\int_{B(z,2^{j+1}r)}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\le\\&C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i'}\le\end{aligned}$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}|B(z,2^{j+1}r)|^2\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}^{-1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}^{-1}\times$$
$$u_1(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}u_2(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}\times$$
$$\frac{1}{u_1(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}}\|f_1\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\times$$
$$\frac{1}{u_2(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\|f_2\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}\le$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j+1)\alpha_1}u_1(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\right\}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j+1)\alpha_2}u_2(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\le$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}u_1(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}u_2(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\le$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}.$$

其中用到以下不等式(见文献[19])

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_jb_j\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\le\sum_{j=1}^{\infty}a_j\sum_{j=1}^{\infty}b_j,a_j,b_j>0,r>1. \tag{17}$$

进一步, 由式(15)-式(16)有

$$\mathrm{D}_2\le C\sup_{x\in X,r>0}r^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\frac{u(z,r)}{u(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\le C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

类似于D_2的估计, 得到

$$\mathrm{D}_3\le C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

为了估计D_4, 首先考虑$|B_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)(x)|$且$x\in B(x,r)$. 由Hölder不等式, 式(3), 式(6)和引理2.2及$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 得到

$$|B_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)(x)|\le C\int_{(X\backslash 2B)^2}\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{|x-y_1|^{n-\alpha_1}\cdot|x-y_2|^{n-\alpha_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le$$
$$C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\int_{B(z,2^{j+1}r)}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\le$$
$$C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i'}\le$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\frac{|B(z,2^{j+1}r)|}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}}u_i(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\times$$
$$\frac{1}{u_i(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}}\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\leq$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\times$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}2^{(j+1)\alpha_i}u_i(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}}\leq$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{2}2^{(j+1)\alpha_i}u_i(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\right)\right\}\times$$
$$\left(\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right)\leq$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{2}2^{(j+1)\alpha_i}u_i(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\right)\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\leq$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}u_1(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\times$$
$$u_2(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\leq$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}.$$

进一步, 由定义1.7, 式(15)-式(16)得

$$\mathrm{D}_4\leq C\sup_{x\in X,r>0}r^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\frac{u(z,r)}{u(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{Y}}\times$$
$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{Y}}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}\right\}\leq C\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

结合上述D_1, D_2, D_3和D_4的估计, 定理3.1证毕.

定理3.2 设X_1,X_2和Y是Banach函数空间, 其中$X_i\in\mathbb{M}\bigcup\mathbb{M}'$, $u\in\mathbb{W}_X^{\alpha},u_i\in\mathbb{W}_{X_i}^{\alpha}$, $(0\leq\alpha<2n,\ i=1,2)$且$u_1u_2=u$. 假设式(9)所定义的双线性分数次积分算子的交换子B_{α,b_1,b_2}是从乘积空间$X_1\times X_2$到空间Y有界的, 且满足不等式(15)和(16). $\forall B(z,r)\in\mathbb{B}$, u_i满足以下条件

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)2^{(j+1)\alpha}\frac{u_i(z,2^{j+1}r)\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_X}{\|\chi_{B(z,r)}\|_X}\leq Cu_i(z,r),\tag{18}$$

则存在正常数C, 使得对所有的$f_1\in X_1\bigcap M_{u_1}(X_1)$和$f_2\in X_2\bigcap M_{u_2}(X_2)$有

$$\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1,f_2)\|_{M_u(Y)}\leq C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

为了证明定理3.2, 需要建立如下的引理(见文献[16]).

引理3.3 如果Banach函数空间$X\in\mathbb{M}$, 则有

$$\|\chi_{B(z,r)}(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,r)})\|_{X'}\leq C\|b_i\|_*\|\chi_{B(z,r)}\|_{X'},\tag{19}$$

$$\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,r)})\|_{X'} \le C(j+1)\|b_i\|_*\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X'}. \tag{20}$$

证 设$B(z,r)\in\mathbb{B}$. 将函数f_i写为

$$f_i = f_i^1 + f_i^\infty,$$

其中$f_i^1 = f_i\chi_{2B}, f_i^\infty = f_i\chi_{X\setminus 2B}, i=1,2$. 则由Minkowski不等式有

$$\begin{aligned}\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1,f_2)\|_{M_u(Y)} \le & \left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^1)\right\|_{M_u(Y)} + \left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^\infty)\right\|_{M_u(Y)} + \\ & \left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^\infty,f_2^1)\right\|_{M_u(Y)} + \left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^\infty,f_2^\infty)\right\|_{M_u(Y)} := \\ & \mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2+\mathrm{E}_3+\mathrm{E}_4.\end{aligned}$$

先来估计E_1, 由$\left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1,f_2)\right\|_Y \le C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{X_1}\|f_2\|_{X_2}$, $u_1u_2=u$, 式(3), 式(16)和引理2.3, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^1)\chi_{B(z,r)}\right\|_Y \le C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\left\|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^1)\right\|_Y \le \\ &C\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2} \le \\ &C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\frac{1}{u(z,r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}u_1(z,2r)\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}u_2(z,2r)\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}\times \\ &\frac{1}{u_1(z,2r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}}\|f_1\chi_{B(z,2r)}\|_{X_1}\frac{1}{u_2(z,2r)}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2}}\|f_2\chi_{B(z,2r)}\|_{X_2} \le \\ &C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)},\end{aligned}$$

对上式两边同时取上确界, 得到

$$\mathrm{E}_1 \le C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

为了估计E_2, 首先考虑$\left|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^\infty)(x)\right|$且$x\in B(z,r)$, 得到

$$\begin{aligned}&\left|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^\infty)(x)\right| \le \\ &C\int_{2B}|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\int_{X\setminus 2B}\frac{|b_2(x)-b_2(y_2)||f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_2 \le \\ &\quad C\int_{2B}|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\times \\ &\quad\sum_{j=1}^{\infty}\int_{B(z,2^{j+1}r)\setminus B(z,2^jr)}\frac{|b_2(x)-b_2(y_2)||f_2(y_2)|}{|x-y_2|^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_2 \le \\ &\quad C\int_{2B}|b_1(x)-b_1(y_1)||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\times \\ &\quad\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\int_{B(z,2^{j+1}r)}|b_2(x)-b_2(y_2)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2 \le \\ &C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\int_{B(z,2^{j+1}r)}|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i \le\end{aligned}$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\int_{B(z,2^{j+1}r)}\big|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\big||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i+$$
$$\int_{B(z,2^{j+1}r)}\big|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,2r)}\big||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\bigg):=$$
$$\mathrm{E}_2^1+\mathrm{E}_2^2.$$

先来估计E_2^1, 由Hölder不等式, 式(3), 式(18)和引理2.2, 得到

$$\mathrm{E}_2^1\le C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\big|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\big|\int_{B(z,2^{j+1}r)}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\bigg)\le$$
$$C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\big|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\big|\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\frac{|B(z,2^{j+1}r)|}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}}\bigg)\le$$
$$Cr^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)^2 2^{(j+1)\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\big|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\big|\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_i}}\bigg)\le$$
$$Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times$$
$$\bigg(\big|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}\big|\big|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}\big|\bigg)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\|_{X_2}}.$$

再来估计E_2^2, 由Hölder不等式, 式(3), 式(18), 式(20)和引理2.2, 得到

$$\mathrm{E}_2^2\le C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\big\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,2r)}\big)\big\|_{X_i'}\bigg)\le$$
$$C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\big\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}(j+1)\|b_i\|_*\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i'}\bigg)\le$$
$$C\sum_{j=1}^{\infty}(2^jr)^{-2n+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg((j+1)\|b_i\|_*\big\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}\frac{|B(z,2^{j+1}r)|}{\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}}\bigg)$$
$$\le Cr^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)^2 2^{(j+1)\alpha}\prod_{i=1}^{2}\bigg(\|b_i\|_*u_i(z,2^{j+1}r)\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}\times$$
$$\frac{1}{u_i(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}}\big\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}\frac{1}{\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_i}}\bigg)\le$$
$$Cr^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)2^{(j+1)\alpha_1}u_1(z,2^{j+1}r)\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_1}\|b_1\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\times$$
$$\bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)2^{(j+1)\alpha_2}u_2(z,2^{j+1}r)\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_2}\|b_2\|_*\|f_2\|_{M_{u_2}(X)}\bigg\}\times$$
$$\bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_1}\big\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big\|_{X_2}}\bigg\}\le$$

$$Cr^{\alpha}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}.$$

由E_2^1和E_2^1的估计得到

$$\begin{aligned}\left|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^1,f_2^{\infty})\right| \le & Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times\\ & \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\times\\ & \left(\left|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}\right|\left|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}\right|+\|b_1\|_*\|b_2\|_*\right).\end{aligned}$$

进一步, 由式(3), 式(15)-式(16), Hölder不等式和$\|\chi_{B(z.r)}\|_Y=\|\chi_{B(z.r)}\|_{Y_1}\|\chi_{B(z.r)}\|_{Y_2}$, 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_2\le C\sup_{x\in X,r>0}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\frac{u(z,r)}{u(z,r)}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\times\\ &\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}{\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}\right\}\le\\ &C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.\end{aligned}$$

类似于E_2的估计有

$$\mathrm{E}_3\le C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.$$

最后来估计E_4, 由于

$$\begin{aligned}&\left|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^{\infty},f_2^{\infty})(x)\right|\le\\ &\int_{(X\backslash 2B)^2}\frac{|b_1(x)-b_1(y_1)||b_2(x)-b_1(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|}{(|x-y_1|+|x-y_2|)^{2n-\alpha}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le\\ &\int_{(X\backslash 2B)^2}\frac{|b_1(x)-b_1(y_1)||b_2(x)-b_1(y_2)||f_1(y_1)||f_2(y_2)|}{|x-y_1|^{n-\alpha_1}+|x-y_2|^{n-\alpha_2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\le\\ &C\int_{(X\backslash 2B)^2}\prod_{i=1}^{2}\frac{|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|}{|x-y_i|^{n-\alpha_i}}\mathrm{d}y_i\le\\ &C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}\int_{B(z,2^{j+1}r)\backslash B(z,2^jr)}\frac{|b_i(x)-b_i(y_i)||f_i(y_i)|}{|x-y_i|^{n-\alpha_i}}\mathrm{d}y_i\le\\ &C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\int_{B(z,2^{j+1}r)}\left|b_i(x)-b_i(y_i)\right||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\le\\ &\quad C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\int_{B(z,2^{j+1}r)}\left|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\right||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i+\\ &\quad C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^jr)^{-n+\alpha_i}\int_{B(z,2^{j+1}r)}\left|b_i(y_i)-(b_i)_{B(z,2r)}\right||f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i:=\\ &\mathrm{E}_4^1+\mathrm{E}_4^2.\end{aligned}$$

先来估计E_4^1, 由Hölder不等式, 式(3), 式(6), 引理2.2以及$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_4^1 \le C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\right|\int_{B(z,2^{j+1}r)}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i \le \\
&C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\right|\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i'} \le \\
&C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left|b_i(x)-(b_i)_{B(z,2r)}\right|\frac{|B(z,2^{j+1}r)|}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}}u_i(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}\times \\
&\frac{1}{u_i(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}}\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i} \le \\
&Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\left|b_1(\cdot)-(b_1)_{B(z,2r)}\right|\left|b_2(\cdot)-(b_2)_{B(z,2r)}\right|\times \\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j+1)\alpha_1}u_1(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}2^{(j+1)\alpha_1}u_1(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\right\}\times \\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\} \le \\
&Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\left|b_1(\cdot)-(b_1)_{B(z,2r)}\right|\left|b_2(\cdot)-(b_2)_{B(z,2r)}\right|\times \\
&u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}.
\end{aligned}
$$

接下来估计E_4^2, 由Hölder不等式, 式(3), 式(18), 式(20), 引理2.2和$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_4^2 \le C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\big(b_i(\cdot)-(b_i)_{B(z,2r)}\big)\right\|_{X_i'} \le \\
&C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}(j+1)\|b_i\|_*\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i'} \le \\
&C\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2}(2^j r)^{-n+\alpha_i}\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}(j+1)\|b_i\|_*\frac{|B(z,2^{j+1}r)|}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}} \le \\
&Cr^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\prod_{i=1}^{2}2^{(j+1)\alpha_i}u_i(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}\times \\
&\frac{1}{u_i(z,2^{j+1}r)}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}}\left\|f_i\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_i}\|b_i\|_*\times \\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\} \le \\
&Cr^{\alpha}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}\times \\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)2^{(j+1)\alpha_1}u_1(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\right\}\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)2^{(j+1)\alpha_2}u_2(z,2^{j+1}r)\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}\right\}\times\\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}\leq\\
&Cr^{\alpha}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_2)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times\\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}.
\end{aligned}
$$

结合$\mathrm{E}_4^1,\mathrm{E}_4^2$的估计有

$$
\begin{aligned}
\left|B_{\alpha,b_1,b_2}(f_1^{\infty},f_2^{\infty})\right|\leq&Cr^{\alpha}\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X)}u(z,r)\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}\times\\
&\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}\times\\
&\left(\left|b_1(x)-(b_1)_{B(z,2r)}\right|\left|b_2(x)-(b_2)_{B(z,2r)}\right|+\|b_1\|_*\|b_2\|_*\right).
\end{aligned}
$$

由定义1.7, 式(15)-式(16), $\|\chi_{B(z.r)}\|_Y=\|\chi_{B(z.r)}\|_{Y_1}\|\chi_{B(z.r)}\|_{Y_2}$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_4\leq C\sup_{x\in X,r>0}r^{\alpha}\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X)}\frac{u(z,r)}{u(z,r)}\frac{\left\|\chi_{B(z,r)}\right\|_{X_1}\|\chi_{B(z,r)}\|_{X_2}}{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}\times\\
&\quad\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|\chi_{B(z,r)}\|_Y}{\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_1}\left\|\chi_{B(z,2^{j+1}r)}\right\|_{X_2}}\right\}\leq\\
&\quad C\|b_1\|_*\|b_2\|_*\|f_1\|_{M_{u_1}(X_1)}\|f_2\|_{M_{u_2}(X_2)}.
\end{aligned}
$$

结合上述E_1, E_2, E_3和E_4的估计, 定理3.2证毕.

参考文献:

[1] Wei mingquan. Linear operators and their commutators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized Morrey spaces associated with ball Banach function spaces[J]. Positivity, 2022, 26(5): 84.

[2] Ho K P. Weak type estimates of the fractional integral operators on Morrey spaces with variable exponents[J]. Acta Appl Math, 2019, 159: 1-10.

[3] Ho K P. Fractional integral operators on Orlicz slice Hardy spaces[J]. Fract Calc Appl Anal, 2022, 25(3): 1294-1305.

[4] Yang Heng, Zhou Jiang. Compactness of commutators of fractional integral operators on ball Banach function spaces[J]. AIMS Math, 2024, 9(2): 3126-3149.

[5] Ding Yong, Lu Shanzhen, Zhang Pu. Weak estimates for commutators of fractional integral operators[J]. Sci China Math, 2001, 44(7): 877-888.

[6] Hu Yue, He Yuexiang, Wang Yueshan. The commutators of fractional integrals on generalized Herz spaces[J]. J Funct Space, 2014, 2014(1): 1-6.

[7] Kenig C E, Stein E M. Multilinear estimates and fractional integration[J]. Math Res Lett, 1999, 6(3): 1-15.

[8] Lu Guanghui, Tao Shuangping. Two classes of bilinear fractional integral operators and their commutators on generalized fractional Morrey spaces[J]. J Pseudo-Differ Oper Appl, 2021, 12(4): 52.

[9] Lu Guanghui, Tao Shuangping. Bilinear θ-type generalized fractional integral operator and its commutator on some non-homogeneous spaces[J]. Bull Sci Math, 2022, 174(1): 103094.

[10] Lu Guanghui, Tao Shuangping, Wang Miaomiao. Estimates for bilinear generalized fractional integral operator and its commutator on generalized Morrey spaces over RD-spaces[J]. Ann Funct Anal, 2024, 15(1): 1.

[11] Ghosh A, Singh R K. Weighted estimates for bilinear fractional integral operator on the Heisenberg group[J]. Bull Sci Math, 2023, 187(1): 103310.

[12] Komori-Furuya Y. Weighted estimates for bilinear fractional integral operators: a necessary and sufficient condition for power weights[J]. Collect Math, 2020, 71(1): 25-37.

[13] Bennett C, Sharpley R. Interpolation of Operators[M]. Cambridge: Academic Press 1988.

[14] Ho K P. Nonlinear commutators on Morrey-Banach spaces[J]. J. Pseudo-Differ Oper Appl, 2021, 48(3): 1-12.

[15] Morrey C B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1938, 43(1): 126-166.

[16] Ho K P. Definability of singular integral operators on Morrey-Banach spaces[J]. J Math Soc Japan, 2020, 72(1): 155-170.

[17] Sobolev S. On a theorem in functional analysis[Z]. Mat Sbo, 10.1090/trans2/034/02, 1938.

[18] Ho K P. Weak type estimates of singular integral operators on Morrey-Banach spaces[J]. Integr Equ Oper Theory, 2019, 20(3): 18-25.

[19] Zhang Huihui, Tao Xiangxing, Zhang Yandan, et al. Bilinear integral operator on Morrey-Banach spaces and its application[J]. Math Fun Anal, 2020, 2(1): 1-33.

Estimate for bilinear fractional integral operator and its commutator on generalized Morrey-Banach spaces

LI Xue-mei, LU Guang-hui

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the authors mainly discuss the boundedness of bilinear fractional integral operator B_α and its commutator B_{α,b_1,b_2} on generalized Morrey-Banach spaces $M_u(X)$. Under assumption that the Lebesgue measurable function u satisfies some certain conditions, the anthors prove bilinear fractional integral operator B_α is bounded from product spaces $M_{u_1}(X_1)\times M_{u_2}(X_2)$ into spaces $M_u(Y)$. Further, the paper also proves that the commutator B_{α,b_1,b_2} generated by $b_1, b_2 \in \mathrm{BMO}(X)$ and B_α are bounded from product spaces $M_{u_1}(X_1)\times M_{u_2}(X_2)$ into spaces $M_u(Y)$, where $u_1u_2 = u$.

Keywords: generalized Morrey-Banach spaces; bilinear fractional integration operators; commutator; spaces $\mathrm{BMO}(X)$; boundedness

MR Subject Classification: 42B20; 42B35; 47A07; 47B47