高校应用数学学报
2024, 39(4): 464-472

非线性算子方程$XAX=BX$的可解性及其解集

吴敬松, 王 华*

(内蒙古工业大学 理学院数学系, 内蒙古呼和浩特 010051)

摘 要: 该文讨论Hilbert空间中算子方程$XAX=BX$解的存在性及其解集的形式. 首先, 在$*$-偏序$B\overset{*}{\leq}A$条件下给出算子方程$XAX=BX$存在非平凡解的充分条件和必要条件, 并得到此方程的非平凡解、正规解和自伴解的解集形式. 其次, 在$*$-偏序$B\overset{*}{\leq}A$且B是正规算子的条件下, 给出算子方程$XAX=BX=XB$存在非平凡解的充分条件和必要条件以及方程的解集形式.

关键词: 算子方程; $*$-偏序; 不变子空间
中图分类号: O151.1; O177.1
文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2024)04-0464-09

§1 引 言

矩阵方程在控制理论、遥感技术等领域有着广泛应用. 例如, 连续的Lyapunov方程$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$常见于系统稳定性的判定[1], Riccati方程用于最优化控制[2]. 算子方程作为矩阵方程的推广, 很多数学物理问题都可以归结为求算子方程解的问题, 研究算子方程对于解决实际问题具有重要意义.

算子方程$XAX=BX$是Riccati方程$XAX+XC-BX-D=0$的一类特殊情形[3]. 1954年, Aronszajn等人[4]给出算子方程$XAX=AX$存在非平凡解($X\neq 0,I$)的充要条件为算子A存在非平凡不变子空间, 并且得出Banach空间中的完全连续算子存在非平凡不变子空间这一结论. 1999年, Holbrook等人[5]给出算子方程$XAX=AX$每一个解都是幂等解的充要条件是算子A在其不变子空间的限制具有稠值域. 2003年, 安桂梅等人[6]利用算子A的不变子空间, 给出了算子方程$XAX=AX$的解的具体表达, 并利用算子A的约化子空间给出算子方程$XAX=AX=XA$解存在的充要条件以及解的具体表示. 2010年, 许俊莲[7]利用算子分块技巧, 对文献[4]中算子方程$XAX=AX$存在非平凡解的充要条件给出了新的证明, 并讨论了此方

收稿日期: 2022-09-29 修回日期: 2024-08-15
*通讯作者, Email: hrenly@163.com
基金项目: 国家自然科学基金(11961052; 12261065); 内蒙古自然科学基金(2022MS01005; 2023LHMS01016); 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费(JY20220084; JY20220151)

程有无穷多解的条件. 2016年, Mousavi[8]讨论了Banach空间中算子方程$XAX=AX$具有非零秩1幂等解的条件. 2018年, 田学刚等人[9]在C^*代数上, 利用矩阵表示技巧和Moore-Penrose逆的性质, 给出了方程$xax=ax$和$xax=ax=xa$有正则解的充要条件, 并给出了正则解的一般形式. 2022年, 王华等人[10]在左$*$-偏序$A*\le B$条件下讨论了算子方程$XAX=BX$有非零解的充分条件和必要条件, 并在$*$-偏序$A\overset{*}{\le}B$条件下给出此方程存在幂等解的充分必要条件.

本文在$B\overset{*}{\le}A$条件下讨论算子方程$XAX=BX$解的相关问题. 首先, 在$*$-偏序$B\overset{*}{\le}A$条件下, 利用算子A,B的非平凡不变子空间, 给出了算子方程$XAX=BX$存在非平凡解的充分条件和必要条件, 之后又给出了此方程的非平凡解、正规解和自伴解的解集形式. 其次, 在$*$-偏序$B\overset{*}{\le}A$且B为正规算子的条件下, 利用算子B的非平凡约化子空间, 给出了算子方程$XAX=BX$存在与算子B可交换的非平凡解的充分条件和必要条件, 并给出算子方程$XAX=BX=XB$的非零解的解集形式.

为了便于叙述, 文中通用以下记号: $\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示Hilbert空间$\mathcal{H}$中的所有有界线性算子的集合; 符号$A^*,\mathcal{N}(A),\mathcal{R}(A)$和$\overline{\mathcal{R}(A)}$分别表示算子$A$的伴随, 零空间, 值域和值域的闭包; I表示空间$\mathcal{H}$上的恒等算子; I_M表示M上的恒等算子; P_M表示M上的正交投影算子; 另外本文中涉及的算子均为非零算子.

下面给出本文用到的定义以及相关引理.

定义1.1 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, M是$\mathcal{H}$的闭线性子空间. 若$x\in M$, 有$Ax\in M$, 即$AM\subseteq M$, 则称M是A的一个不变子空间. 若M不等于$\mathcal{H}$和$\{0\}$, 则称M是A的一个非平凡不变子空间. 若$AM\subseteq M$, 且$AM^\perp\subseteq M^\perp$, 则称$M$是$A$的约化子空间.

定义1.2 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 若满足$AA^*=BA^*,A^*A=A^*B$, 则记作$A\overset{*}{\le}B$, 称$\overset{*}{\le}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的$*$-偏序.

定义1.3 设$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 若$ABA=A$, $BAB=B$, $(AB)^*=AB$, $(BA)^*=BA$, 则B称为A的Moore-Penrose逆. A的Moore-Penrose逆记为A^+, 换言之, $B=A^+$. 此外A^+存在当且仅当$\mathcal{R}(A)$是闭的.

引理1.1[11] 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 下面结论成立.

(1) $AA^*=BA^*\Leftrightarrow A=BP_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}$,

(2) $A^*A=A^*B\Leftrightarrow A=P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}B$,

(3) $A\overset{*}{\le}B\Leftrightarrow A=BP_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}=P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}B=P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}BP_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}\Leftrightarrow A=A_1\oplus 0, B=A_1\oplus B_1$, 其中$A_1\in\mathcal{B}(\overline{\mathcal{R}(A^*)},\overline{\mathcal{R}(A)})$为单射, $B_1\in\mathcal{B}(\mathcal{N}(A),\mathcal{N}(A^*))$.

引理1.2[12](Putnam-Fuglede定理) 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是正常算子. 若存在$X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 使$AX=XB$, 则有$A^*X=XB^*$.

引理1.3[13] 设$A,B,C,D\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 其中$A$, B具有闭值域, 那么算子方程组

$$AX=C,\quad XB=D$$

有解的充要条件是

$$AA^+C=C, DB^+B=D, AD=CB.$$

此时算子方程组的通解可表示为$X=A^+C+(I-A^+A)DB^++(I-A^+A)Y(I-BB^+)$, 其中$Y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是任意算子.

§2 $B\overset{*}{\leq}A$时算子方程$XAX=BX$的解

本节讨论$B\overset{*}{\leq}A$时算子方程$XAX=BX$的解的存在性问题. 注意到当$B\overset{*}{\leq}A$时, $B=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}A$, 于是$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}=BP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$. 这表明当$B\overset{*}{\leq}A$时, $X=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是算子方程$XAX=BX$的解. 另外$X=0$显然也是此方程的解. 称$X=0$和$X=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$为$B\overset{*}{\leq}A$时算子方程$XAX=BX$的平凡解.

定理2.1 令A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且$B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子$A$或$B$存在一个非平凡不变子空间真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$, 那么算子方程$XAX=BX$存在非平凡解.

证 如果算子A存在一个非平凡不变子空间M使得$M\subsetneqq\overline{\mathcal{R}(B)}$, 令$P_M$为$M$上的正交投影算子, 显然$P_M\neq0$, 且$P_M\neq P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$, 那么$P_MAP_M=AP_M$且$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_M=AP_M$. 再由$B\overset{*}{\leq}A$知$B=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}A$. 于是便有

$$P_MAP_M=AP_M=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_M=BP_M,$$

这表明P_M是算子方程$XAX=BX$的一个非平凡解.

如果算子B存在一个非平凡不变子空间M使得$M\subsetneqq\overline{\mathcal{R}(B)}$, 那么$P_MBP_M=BP_M$. 从而$P_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_M=BP_M$. 于是

$$P_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}=BP_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}},$$

这表明$P_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是算子方程$XAX=BX$的一个解. 由$M\subsetneqq\overline{\mathcal{R}(B)}$知$P_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}\neq P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$. 因此$P_MP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是算子方程$XAX=BX$的一个非平凡解, 结论得证.

注2.1 在定理2.1中, 条件“真包含”是为了使M上的正交投影算子$P_M\neq P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$, 从而确保算子方程$XAX=BX$的解是非平凡的.

若将定理2.1中的条件去掉, 则当$\overline{\mathcal{R}(B)}\neq\mathcal{H}$时$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是方程$XAX=BX$的解, 当$\overline{\mathcal{R}(B)}=\mathcal{H}$时$A=B$, 此时$I$是方程$XAX=BX$的解. 于是可得到下面结论.

定理2.2 令A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且$B\overset{*}{\leq}A$. 那么算子方程$XAX=BX$存在非零解.

定理2.3 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子方程$XAX=BX$存在非平凡解, 那么算子B存在非平凡不变子空间.

证 令$X_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是算子方程$XAX=BX$的一个非平凡解, 则有

$$X_0AX_0=BX_0. \tag{2.1}$$

若$\overline{\mathcal{R}(X_0)}\neq\mathcal{H}$, 则由(2.1)知, $\overline{\mathcal{R}(X_0)}$是算子$B$的非平凡不变子空间.

若$\overline{\mathcal{R}(X_0)}=\mathcal{H}$, 则$\overline{\mathcal{R}(B)}\neq\mathcal{H}$. 事实上, 若$\overline{\mathcal{R}(B)}=\mathcal{H}$, 则$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}=I$. 那么由$B\overset{*}{\leq}A$, 知$B=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}A=A$. 这样$X_0BX_0=BX_0$, 即$(X_0B-B)X_0=0$, 从而$(X_0-I)B=0$. 由$\overline{\mathcal{R}(B)}=H$可以得到$X_0=I=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$, 这与$X_0$是非平凡解矛盾. 又注意到$\overline{\mathcal{R}(B)}\neq0$, 于是$\overline{\mathcal{R}(B)}$是算子$B$的非平凡不变子空间.

综上所述, 结论得证.

定理2.4 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子A具有稠值域, 算子B的非平凡不变子空间真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$, 且$\overline{\mathcal{R}(B)}=\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 那么算子方程$XAX=BX$的非平凡解的解集为

$$E=\{X\mid X=I_{\overline{BM}}+T+S\},$$

其中M是B的非平凡不变子空间, $M=M_1\oplus\overline{BM}, T\in\mathcal{B}(M_1,M), S\in\mathcal{B}(M^{\perp},M)$.

证 根据定理2.1知算子方程$XAX=BX$存在非平凡解, 不妨设为X_0. 由$X_0AX_0=BX_0$可知$\overline{\mathcal{R}(X_0)}$是算子$B$的不变子空间. 若$\overline{\mathcal{R}(X_0)}=\mathcal{H}$, 则$(X_0-P_{\overline{\mathcal{R}(B)}})A=0$. 注意到算子$A$具有稠值域, 即$\overline{\mathcal{R}(A)}=\mathcal{H}$, 这样便知$X_0=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$, 这与$X_0$的非平凡性矛盾, 故$\overline{\mathcal{R}(X_0)}\neq\mathcal{H}$, 那么$\overline{\mathcal{R}(X_0)}$是算子$B$的非平凡不变子空间. 又注意到算子$B$的非平凡不变子空间包含在$\overline{\mathcal{R}(B)}$中, $\overline{\mathcal{R}(B)}=\overline{\mathcal{R}(B^*)}$和$B\overset{*}{\leq}A$, 于是

$$BX_0=AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X_0=AX_0. \tag{2.2}$$

令$M=\overline{\mathcal{R}(X_0)}$, 则$\mathcal{H}=\overline{BM}\oplus M_1\oplus M^{\perp}$, 其中$M=\overline{BM}\oplus M_1$. 定义

$$T=X_0|_{M_1}, S=X_0|_{M^{\perp}},$$

则有$T\in\mathcal{B}(M_1,M), S\in\mathcal{B}(M^{\perp},M)$. 由$X_0AX_0=BX_0$和(2.2)知$X_0BX_0=BX_0$, 从而$X_0|_{\overline{BM}}=I_{\overline{BM}}$. 综上所述有$X_0=I_{\overline{BM}}+T+S\in E$.

下面来验证$E=\{X\mid X=I_{\overline{BM}}+T+S\}$中的任意$X$都是算子方程$XAX=BX$的非平凡解, 其中$M$是$B$的非平凡不变子空间, $M=M_1\oplus\overline{BM}$, $T\in\mathcal{B}(M_1,M)$, $S\in\mathcal{B}(M^{\perp},M)$. 任取$X_0\in E$, 那么在$\mathcal{H}=\overline{BM}\oplus M_1\oplus M^{\perp}$的空间分解下, X_0具有矩阵形式

$$X_0 = \begin{pmatrix} I & T_1 & S_1 \\ 0 & T_2 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

由M是B的非平凡不变子空间, 则算子B有矩阵形式

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

通过计算得到

$$X_0BX_0=BX_0=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{11}T_1+B_{12}T_2 & B_{11}S_1+B_{12}S_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix}.$$

由上式$X_0BX_0=BX_0$可知$\overline{R(X_0)}$是算子B的不变子空间. 又注意到X_0的矩阵形式(2.3), 于是$\overline{R(X_0)}\subseteq M\subsetneqq\overline{\mathcal{R}(B)}=\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 便有$BX_0=AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X_0=AX_0$. 因此$X_0AX_0=BX_0$, 即$X_0$是算子方程$XAX=BX$的非平凡解.

综上所述, $E=\{X\mid X=I_{\overline{BM}}+T+S\}$是算子方程$XAX=BX$的非平凡解所构成的解集.

定理2.5 设$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子$A$具有稠值域, 算子$B$的非平凡不变子空间真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$, 且$\overline{\mathcal{R}(B)}=\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 那么算子方程$XAX=BX$非平凡的正规解的解集为

$$F=\{X|X=I_{\overline{BM}}\oplus T\oplus 0, TT^*=T^*T\},$$

其中M是B的非平凡不变子空间, $M=M_1\oplus\overline{BM}$, $T\in\mathcal{B}(M_1,M)$.

证 由算子B的非平凡不变子空间真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$, 则根据定理2.1的证明可知, 算子方程$XAX=BX$存在非平凡的正规解. 再由定理2.4的证明知, 算子方程$XAX=BX$的解X_0和算子B的矩阵形式分别为(2.3)和(2.4).

若X_0是算子方程$XAX=BX$的正规解, 即$X_0X_0^*=X_0^*X_0$, 由

$$\begin{aligned} X_0X_0^* &= \begin{pmatrix} I+T_1T_1^*+S_1S_1^* & T_1T_2^*+S_1S_2^* & 0 \\ T_2T_1^*+S_2S_1^* & T_2T_2^*+S_2S_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_0^*X_0 &= \begin{pmatrix} I & T_1 & S_1 \\ T_1^* & T_1^*T_1+T_2^*T_2 & T_1^*S_1+T_2^*S_2 \\ S_1^* & S_1^*T_1+S_2^*T_2 & S_1^*S_1+S_2^*S_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

有$T_1=S_1=S_2=0, T_2^*T_2=T_2T_2^*$. 令$T=T_2$, 则$X_0=I_{\overline{BM}}\oplus T\oplus 0\in F$.

反过来, 任取$X_0\in F$, 则在$\mathcal{H}=\overline{BM}\oplus M_1\oplus M^{\perp}$的空间分解下, X_0有矩阵形式

$$X_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{BM} \\ M_1 \\ M^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中$TT^*=T^*T$. 注意到B的矩阵形式(2.4)且$BX_0=AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X_0=AX_0$. 那么

$$X_0AX_0=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ BX_0=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然X_0满足算子方程$XAX=BX$, 且$X_0X_0^*=X_0^*X_0$. 故而X_0是算子方程$XAX=BX$的非平凡的正规解.

综上所述, $F=\{X|X=I_{\overline{BM}}\oplus T\oplus 0, TT^*=T^*T\}$是算子方程$XAX=BX$的非平凡的正规解所构成的解集.

类似于定理2.5的证明, 还可以给出算子方程$XAX=BX$的非平凡的自伴解的解集形式.

定理2.6 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子A具有稠值域, 算子B的非平凡不变子空间真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$, 且$\overline{\mathcal{R}(B)}=\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 那么算子方程$XAX=BX$非平凡的自伴解的解集为

$$G=\{X|X=I_{\overline{BM}}\oplus T\oplus 0,\ T=T^*\},$$

其中M是B的非平凡不变子空间, $M=M_1\oplus\overline{BM}$, $T\in\mathcal{B}(M_1,M)$.

定理2.7 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 且$B\overset{*}{\leq}A$. 如果算子方程$XAX=BX$的解$X$满足$\mathcal{R}(X)\subseteq\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 那么算子方程$XAX=BX$的这个解也是算子方程$XAX=AX$的解, 进一步, 如果算子$A$在其不变子空间的限制具有稠值域, 那么算子方程$XAX=BX$的解是幂等的.

证 由$B\overset{*}{\leq}A$知$B=AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}$, 则有 $XAX=BX=AP_{\overline{\mathcal{R}(B^*)}}X$. 又由$\mathcal{R}(X)\subseteq\overline{\mathcal{R}(B^*)}$, 知$XAX=AX$. 进一步, 算子$A$在其不变子空间的限制具有稠值域, 则由$(X-I)AX=0$, 便得到$(X-I)X=0$, 即有$X^2=X$, 这说明算子方程$XAX=BX$的解是幂等的.

定理2.8 令$A,\ B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$, 且$\mathcal{R}(A)$闭. 如果算子方程$XAX=BX$的解满足$\overline{\mathcal{R}(A)}=\overline{\mathcal{R}(AX)}$, 那么算子方程$XAX=BX$的这个解也是算子方程$XA=B$的解.

证 由$B\overset{*}{\leq}A$以及$\mathcal{R}(A)$闭知$B=BA^+A$. 于是$XAX=BX=BA^+AX$, 即有

$$(X-BA^+)AX=0.$$

注意到$\overline{R(A)}=\overline{R(AX)}$, 于是$(X-BA^+)A=0$, 即有$XA=B$, 结论得证.

下面结论给出了非线性算子方程$XAX=BX$的解与线性算子方程组的解之间的关系.

定理2.9 设$A,\ B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$. 若存在算子C使算子方程组$AX=C, XC=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C$至少有一个解$X_0$, 那么$X_0$是算子方程$XAX=BX$的一个解. 反之, 若$X_0$是算子方程$XAX=BX$的一个解, 那么存在算子$C$使算子方程组$AX_0=C, X_0C=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C$成立. 进一步, 若算子$A,C$具有闭值域, 那么

$$X_0=A^+C(I-CC^+)+P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}CC^++(I-A^+A)Y(I-CC^+),$$

其中$Y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是任意算子.

证 若X_0是算子方程组$AX=C$, $XC=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C$的一个解, 那么$AX_0=C$, $X_0C=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C$, 因此

$$X_0AX_0=X_0C=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AX_0=BX_0, \tag{2.6}$$

即X_0是算子方程$XAX=BX$的解. 反之, 设X_0是算子方程$XAX=BX$的一个解, 即$X_0AX_0=BX_0$. 令$C=AX_0$, 则

$$X_0C=X_0AX_0=BX_0=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AX_0=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C,$$

这意味着X_0是算子方程组$AX=C, XC=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C$的一个解. 此时可以看出$AP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}C=C^2$. 这样当$\mathcal{R}(A),\mathcal{R}(C)$闭时, 由引理1.3知

$$\begin{aligned}X_0&=A^+C+(I-A^+A)P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}CC^++(I-A^+A)Y(I-CC^+)\\&=A^+C+P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}CC^+-A^+C^2C^++(I-A^+A)Y(I-CC^+)\\&=A^+C(I-CC^+)+P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}CC^++(I-A^+A)Y(I-CC^+),\end{aligned}$$

其中$Y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是任意算子.

§3 $B\overset{*}{\leq}A$时算子方程$XAX=BX=XB$的解

下面考虑当$B\overset{*}{\leq}A$且B是正规算子时算子方程 $XAX=BX=XB$的解. 注意到当B是正规算子时, $B=B_1\oplus 0$, 又 $B\overset{*}{\leq}A$, 则$A=B_1\oplus A_2$, 其中$B_1\in\mathcal{B}(\overline{\mathcal{R}(B)},\overline{\mathcal{R}(B)})$, $A_2\in\mathcal{B}(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(B))$. 那么$P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}AP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}=BP_{\overline{\mathcal{R}(B)}}=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}B$, 即$X=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是算子方程$XAX=BX=XB$ 的解. 称$X=0$和$X=P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$是 $B\overset{*}{\leq}A$且B为正规算子时算子方程 $XAX=BX=XB$ 的平凡解. 这里需要注意, 当B不是正规算子时, $P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$不一定是算子方程$XAX=BX=XB$的解.

定理3.1 设$A,\ B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$, 且B是正规算子. 如果算子A或B存在真包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$的非平凡约化子空间, 那么算子方程$XAX=BX=XB$存在非平凡解.

证 假设算子A存在一个非平凡约化子空间M使得$M \subsetneqq \overline{\mathcal{R}(B)}$, 令$P_M$为$M$上的正交投影算子, 则有$P_M A = AP_M = P_M AP_M$, 且$P_M \neq 0, P_M \neq P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$. 又由$B \overset{*}{\leq} A$, 那么

$$AP_M = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} AP_M = BP_M. \tag{3.1}$$

在$\mathcal{H} = M \oplus M_1 \oplus \mathcal{R}(B)^{\perp}$的空间分解下, 其中$\overline{\mathcal{R}(B)} = M_1 \oplus M$, $P_M, P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$有矩阵形式

$$\begin{aligned} P_M &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ M_1 \\ \mathcal{R}(B)^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} M \\ M_1 \\ \mathcal{R}(B)^{\perp} \end{pmatrix}, \\ P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ M_1 \\ \mathcal{R}(B)^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} M \\ M_1 \\ \mathcal{R}(B)^{\perp} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

经计算$P_M P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} P_M = P_M$, 则有

$$P_M A = P_M P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} A = P_M B. \tag{3.2}$$

这样由(3.1)和(3.2)可得$P_M AP_M = BP_M = P_M B$, 这表明P_M是算子方程$XAX = BX = XB$的一个非平凡解.

假设算子B存在一个非平凡约化子空间M使得$M \subsetneqq \overline{\mathcal{R}(B)}$, 令$P_M$为$M$上的正交投影算子, 则$P_M B = BP_M = P_M BP_M$, 且$P_M \neq 0, P_M \neq P_{\overline{\mathcal{R}(B)}}$. 类似于上面的证明, 可得$P_M P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} P_M = P_M$. 又由$B = P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} A$可知$P_M BP_M = P_M P_{\overline{\mathcal{R}(B)}} AP_M = P_M AP_M$, 这样

$$P_M AP_M = BP_M = P_M B,$$

这表明P_M是算子方程$XAX = BX = XB$的一个非平凡解, 结论得证.

定理3.2 设A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \overset{*}{\leq} A$, B是正规算子. 则在下列条件之一成立时, 算子方程$XAX = BX = XB$存在非平凡解.

(i) B不是秩1算子; (ii) $\dim\mathcal{H} \geq 3$, 且B是秩1算子; (iii) $\dim\mathcal{H} = 2$, 且$B = A$是秩1算子.

当$\dim\mathcal{H} = 2$, B是秩1算子, 且$B \neq A$时, $XAX = BX = XB$只有平凡解.

证 (i) 当B不是秩1算子时, $\overline{\mathcal{R}(B)}$是$B$的约化子空间, 而且$B$在$\overline{\mathcal{R}(B)}$上的限制是单射正规算子, 从而一定有非平凡的约化子空间. 于是根据定理3.1结论成立.

(ii) 当$\dim\mathcal{H} \geq 3$, 且B是秩1算子时, $\mathcal{N}(B) \geq 2$, 于是对任意非零向量$x \in \mathcal{N}(B)$, 取$y \in \mathcal{N}(B)$, 使得$(Ax, y) = 0$, 则秩1算子$X = x \otimes y$满足$XAX = 0 = BX = xB$.

(iii) 当$\dim\mathcal{H} = 2$, 且$B = A$是秩1算子时, $P_{\mathcal{N}(B)}$是方程$XAX = BX = XB$的非平凡解.

但是当$\dim\mathcal{H} = 2$, B是秩1算子, 且$B \neq A$时, A在$\mathcal{N}(B)$上的限制是非零的, 从而是非零常数a_2, 即$xa_2x = 0$ 只有$x = 0$, 因此$XAX = BX = XB$只有平凡解, 结论得证.

在定理3.1中, 去掉"B是正规算子"这个条件, 并将"真包含"弱化为"包含", 那么根据定理的证明, 可以得到下面结论.

定理3.3 设A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \overset{*}{\leq} A$. 如果算子A或B存在包含于$\overline{\mathcal{R}(B)}$的非平凡约化子空间, 那么算子方程$XAX = BX = XB$存在非零解.

定理3.4 设A, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\overset{*}{\leq}A$, 且B是正规算子. 如果算子方程$XAX=BX=XB$存在非零解, 那么此方程的解集为

$$W=\{X|X=Q+\widetilde{T},Q^2=Q,QB=BQ,\widetilde{A}Q=Q\widetilde{A}=0,\widetilde{T}\widetilde{A}\widetilde{T}=0\},$$

其中$\widetilde{T}=P_{\mathcal{N}(B)}TP_{\mathcal{N}(B)}$, $\widetilde{A}=P_{\mathcal{N}(B)}AP_{\mathcal{N}(B)}$, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是任意算子.

证 由B是正规算子知$\mathcal{N}(B)=\mathcal{N}(B^*)$. 于是根据引理1.1, 算子$B,A$有矩阵形式

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

其中B_1是单射.

令$X_0\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$是算子方程$XAX=BX=XB$的一个非零解. 由$BX_0=X_0B$和Putnam-Fuglede定理, 知$\overline{\mathcal{R}(B)}$是$X_0$的约化子空间. 那么$X_0$具有矩阵形式

$$X_0 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}.$$

于是有$X_1B_1X_1=B_1X_1=X_1B_1,X_2A_2X_2=0$. 因为$B_1$是单射, 所以$X_1^2=X_1$. 令$Q=X_1\oplus 0$, $T=0\oplus X_2$, 那么$Q^2=Q,BQ=QB$, 且$\widetilde{A}Q=Q\widetilde{A}=0$, $\widetilde{T}\widetilde{A}\widetilde{T}=0$, 其中$\widetilde{T}=P_{\mathcal{N}(B)}TP_{\mathcal{N}(B)}$, $\widetilde{A}=P_{\mathcal{N}(B)}AP_{\mathcal{N}(B)}$. 因此$X_0=Q+\widetilde{T}\in W$.

下面验证$W=\{X|X=Q+\widetilde{T},Q^2=Q,QB=BQ,\ \widetilde{A}Q=Q\widetilde{A}=0,\ \widetilde{T}\widetilde{A}\widetilde{T}=0\}$中的任意$X$都是算子方程$XAX=BX=XB$的非零解. 任取$X_0\in W$, 有$X_0=Q+\widetilde{T}$, 根据$BQ=QB$, B是正规算子以及Putnam-Fuglede定理, 知$\overline{R(B)}$是Q的约化子空间, 则算子Q有矩阵表示

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}.$$

令任意算子$T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$有矩阵形式

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(B)} \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix},$$

则

$$X_0 = Q+\widetilde{T}=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2+T_2 \end{pmatrix}.$$

根据$Q^2=Q,QB=BQ,\widetilde{A}Q=Q\widetilde{A}=0$, $\widetilde{T}\widetilde{A}\widetilde{T}=0$以及算子$B,A$的矩阵形式(3.3)和(3.4), 有$Q_1^2=Q_1$, $Q_2^2=Q_2$, $B_1Q_1=Q_1B_1$, $A_2Q_2=Q_2A_2=0$, $T_2A_2T_2=0$. 于是经过计算得到

$$X_0AX_0 = \begin{pmatrix} Q_1B_1Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BX_0 = \begin{pmatrix} B_1Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X_0B=\begin{pmatrix} Q_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然$X_0AX_0=BX_0=X_0B$, 结论得证.

参考文献:

[1] Jodar L, Mariton M. Explicit solutions for a system of coupled Lyapunov differential matrix equations[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1987, 30(3): 427-434.

[2] Wonham W M. Random differential equations in control theory[J]. Matematika, 1970, 2: 129-167.

[3] Karaev M T. On the Riccati equations[J]. Monatshefte Für Mathematik, 2008, 155(2): 161-166.

[4] Aronszajin N, Smith K T. Invariant sub-spaces of completely continuous operators[J]. Annals of Mathematics, 1954, 60: 345-350.

[5] Holbrook J, Nordgren E, Radjavi H. On the operator equation $AX = XAX$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1999, 295(1): 113-116.

[6] An Guimei, Bai Zhaofang, Du Shuanping. On the operator equations $AX = XAX$ and $AX = XA = XAX$[J]. Acta Analysis Functional is Applications, 2003, 5(1): 9-12.

[7] 许俊莲. 算子Moore-Penrose逆与算子方程相关问题研究[D]. 西安: 陕西师范大学, 2008.

[8] Mousavi Z. Rank one solutions of some nonlinear operator equations[J]. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 8(2): 17-21.

[9] 田学刚, 王少英. C *代数上方程$ax = xax$与$ax = xa = xax$的解[J]. 太原师范学院学报(自然科学版), 2018, 17(2): 18-24.

[10] Wang Hua, Huang Junjie, Li Mengran. On the solutions of the operator equation $XAX = BX$[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(22): 7753-7761.

[11] Xu Xiaoming, Du Hongke, Fang Xiaochun, et al. The supremum of linear operators for the $*$-order[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(11-12): 2198-2207.

[12] Putnam C R. On normal operators in Hilbert space[J]. American Journal of Mathematics, 1951, 73(2): 357-362.

[13] Xu Qingxiang. Common hermitian and positive solutions to the adjointable operator equations $AX = C, XB = D$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(1): 1-11.

Solvability of the nonlinear operator equation $XAX = BX$ and its solution set

WU Jing-song, WANG Hua

(College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

Abstract: In this paper, the solvability of the operator equation $XAX = BX$ and its solution set are discussed in Hilbert space. Firstly, sufficient conditions and necessary conditions are presented for the existence of nontrivial solutions to the equation $XAX = BX$ under $B \overset{*}{\leq} A$, and then solution set forms are obtained for nontrivial, normal and self-adjoint solutions, respectively. Secondly, sufficient conditions and necessary conditions are given for the existence of nontrivial solutions to the operator equation $XAX = BX = XB$ when $B \overset{*}{\leq} A$ and B is normal. Moreover, the solution set of the equation is also given.

Keywords: operator equation; $*$-order; invariant subspace

MR Subject Classification: 47A62