高校应用数学学报
2024, 39(4): 439-450

非线性时滞微分方程解的性质

孙合庆, 李叶舟*, 牛文潇

(北京邮电大学 理学院, 北京 100876)

摘　要: 设$\omega_1,\cdots,\omega_t$为互相判别的非零复常数, $H_0(z),\cdots,H_t(z)$为亚纯函数. 该文研究了Tumura-Cluine型非线性时滞微分方程

$$f^n(z)+P(z,f)=H_0(z)+H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}+\cdots+H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$$

亚纯解的零点分布和增长性, 这里$n(\geq 2),t,q\in\mathbf{N}^+$, $P(z,f)$为时滞微分单项式. 利用角域上指数多项式的性质, 该文还考虑了上面方程整函数解Julia集的径向分布, 并给出了相应极限方向测度的下界估计.

关键词: 时滞微分方程; 增长性; 零点分布; 径向分布; 测度

中图分类号: O175.14

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)04-0439-12

§1　引言与主要结果

微分差分方程是描绘自然现象变化规律的有力工具. 工程技术、医药、生态和数学物理等领域的许多非线性现象都可以借助微分差分方程建立相关的数学模型来刻画. 为了更好地理解这些自然现象, 人们广泛地关注微分差分方程解的结构和性质的研究. Tumura-Cluine型非线性微分方程就是其中比较典型的一类. 2004 年, Yang等人[1]证明非线性微分方程

$$4f^3(z)+3f''(z)=-\sin 3z$$

有三个超越整函数解$f_1(z)=\sin z, f_2(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\frac{1}{2}\sin z, f_3(z)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\frac{1}{2}\sin z$. 注意到$\sin 3z$可以看成是$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}$ 和$\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}z}$的一个线性组合. 随后, 李平, 廖良文, 刘慧芳等人研究了如

$$f^n(z)+L(z,f)=p_1(z)\mathrm{e}^{\alpha_1(z)}+p_2(z)\mathrm{e}^{\alpha_2(z)}\ (\text{其中}n\geq 2) \tag{1.1}$$

一般形式的微分方程解的结构和性质(这里的$p_j(z),\alpha_j(z)(j=1,2)$为整函数, $L(z,f)$为f及其导数的微分多项式), 得到了一系列丰富的结果, 参见文献[2-5]等.

Li等人[6]利用Cartan's第二基本定理考虑了方程(1.1)的差分模拟, 并得到以下结果.

定理1.1[6, 定理1.8]　设t,n为满足$n\geq t+2$的正整数, $p(z)$为非零多项式, $\omega_1,\cdots,\omega_t$为互相判别的非零复常数, $A_0(z),\cdots,A_t(z)$为增长级小于q的指数多项式或关于z的多项式且满足$A_1(z)\cdots A_t(z)\not\equiv 0$, $c\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$. 若$f(z)$为差分方程

$$f^n(z)+p(z)f(z+c)=A_0(z)+A_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}+\cdots+A_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}\ (\text{其中}q\in\mathbf{N}^+) \tag{1.2}$$

收稿日期: 2022-11-18　　修回日期: 2023-11-06

*通讯作者, E-mail: yezhouli2019@outlook.com

基金项目: 国家自然科学基金(12171050; 12071047); 中央高校基本科研基金(500423101)

超级小于1的亚纯解, 则$f(z)$退化为超越整函数且满足下面的(1)和(2).

(1) 若$A_0(z)\equiv 0$, 则$t=2, f(z)=\frac{A_1(z-c)\mathrm{e}^{\omega_1(z-c)^q}}{p(z-c)}$, 其中$A_1^n(z)=p^n(z)A_2(z+c)\mathrm{e}^{\omega_2[(z+c)^q-z^q]}$.

(2) 若$A_0(z)\not\equiv 0$, 则有$n=t+2$, 且$f(z)$的零点收敛指数和增长级均为q.

最近, Mao等人[7]进一步考虑了将方程(1.2)中的差分项"$f(z+c)$"替换成"$f^{(k)}(z+c)$ (其中$k\geq 0$)"的情况, 并得到了类似的结果. 记

$$P(z,f)=h(z)\prod_{k=0}^{l}\left(f^{(k)}(z+\zeta_k)\right)^{n_k}\ \ (\text{其中}k,n_k\in\mathbf{N},l\in\mathbf{N}^+)$$

为关于亚纯函数$f(z)$的时滞微分单项式, 其中$h(z)$为整函数, $\zeta_k(k=0,1,\cdots,l)$为不同的复常数. 笔者想知道, 对于更一般的时滞微分方程(下式中$H_0(z),H_1(z),\cdots,H_t(z)$为亚纯函数, $n,t,q\in\mathbf{N}^+$)

$$f^n(z)+P(z,f)=H_0(z)+H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}+\cdots+H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}, \tag{1.3}$$

它的亚纯解的结构和性质是怎样的呢? 这是本文主要考虑的问题. 以下约定$P(z,f)\not\equiv 0$且定义它的阶数为$\gamma_p:=\sum_{k=0}^{l}n_k\geq 1$.

Nevanlinna理论是研究复域方程解的振荡性质的有力工具[8-9]. 本文用$\lambda(f)$和$\rho(f)$分别表示复平面$\mathbf{C}$上超越亚纯函数$f(z)$的零点收敛指数和增长级, 具体定义为

$$\lambda(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r},\quad \rho(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

特别地, 亚纯函数$f(z)$的超级表示为$\rho_2(f)=\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}$. 为叙述方便, 还需介绍一点动力系统的基本知识和符号. 若$f(z)$是复平面$\mathbf{C}$上的超越整函数, 记$f^{\circ k}(z)=f\circ f^{\circ(k-1)}(z)$(其中$k\in\mathbf{N}$)为$f(z)$的$k$次迭代, 则称迭代函数族$\{f^{\circ k}\}$的正规区域为$f(z)$的Fatou集, 记为$\mathcal{F}(f)$. 它的余集$\mathcal{J}(f)=\mathbf{C}\backslash\mathcal{F}(f)$称为$f(z)$的Julia集. 根据定义, 显然有$\mathcal{F}(f)$为开集, $\mathcal{J}(f)$为非空闭集. 进一步, 如果对任意的$\varepsilon>0$都有

$$\{z\in\mathbf{C}:\arg z\in(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)\}\cap\mathcal{J}(f)$$

是无界的, 则称射线$\arg z=\theta,\theta\in[0,2\pi)$是$\mathcal{J}(f)$的极限方向[10-11]. 用集合$L(f)$记为整函数$f(z)$的Julia集极限方向的全体, 且用符号mes$(*)$表示给定集合的线测度. 显然集合$L(f)$是一个可测闭集. 近年来, 复域微分差分方程整函数解Julia集极限方向的研究广受大家的关注, 取得了许多有趣的结果, 参见文献[10, 12-15]等. Wang等人[16]提出了超越方向的概念: 对任意给定的$\theta\in[0,2\pi)$, 如果存在一个无界的子列$\{z_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\theta,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log|f(z_n)|}{\log|z_n|}=+\infty,$$

则称θ为函数$f(z)$的超越方向, 并用符号$TD(f)$代表$f(z)$所有超越方向构成的集合. 显然有理函数没有超越方向. 当$f(z)$为超越整函数时, $TD(f)$为$[0,2\pi)$上的非空紧子集且有关系$TD(f)\subseteq L(f)$成立[15, 引理2.2]. 首先利用Nevanlinna理论, 得到以下定理1.2.

定理1.2 设$H_0(z),H_1(z),\cdots,H_t(z)$为满足$H_j(z)\not\equiv 0(1\leq j\leq t)$的有理函数, $\omega_1,\cdots,\omega_t$为互相判别的非零复常数, 时滞微分单项式$P(z,f)(\not\equiv 0)$的系数$h(z)$是满足$\rho(h)<q$的整函数. 若$\gamma_p<n$且方程(1.3)的亚纯函数解$f(z)$满足$N(r,f)=o(T(r,f))$和$\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{r}=0$, 则以下情形成立.

(i) 当$H_0(z)\equiv 0$时, 有下面两种情况成立.

- $t=2$和$f(z)=\gamma_0(z)\mathrm{e}^{\frac{\omega_j z^q}{n}}$, 这里的$\gamma_0^n(z)=H_j(z),\omega_{j'}=\frac{\gamma_p}{n}\omega_j$, $\{j,j'\}=\{1,2\}$;

• $\lambda(f)=\rho(f)=q$且$n\le\gamma_p+t$.

(ii) 当$H_0(z)\not\equiv 0$时, 有$\lambda(f)=\rho(f)=q$和$n\le\gamma_p+t+1$.

如果亚纯函数$f(z)$满足条件$\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{r}=0$, 则通过分析不难发现$\rho_2(f)\le 1$且等号是可能取到的. 不妨取$f(z)$是满足特征函数$T(r,f)=\exp\{r(\log r)^{\lambda}\}$(其中$\lambda<0$)的亚纯函数, 则有$\rho_2(f)=1$[17, 注记2.1]. 这意味着定理1.2中函数增长的限制是比定理1.1更弱的. 下面的例子表明定理1.2的结果是可以发生的.

例1.1 记i为虚数单位, 则时滞微分方程
$$f^4(z)+4z^2(z+8\pi)f(z+8\pi)f'(z)=\frac{1}{z^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+(\mathrm{i}z-4)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}z}$$
存在亚纯函数解$f(z)=\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}z}{4}}$. 记$\gamma_0(z)=\frac{1}{z}$, 有理函数$H_1(z)=\frac{1}{z^4}, H_2(z)=\mathrm{i}z-4$. 显然亚纯函数$f(z)$满足定理1.2中的条件, 且有$t=2,\gamma_p=2,\gamma_0^4(z)=H_1(z), \omega_2=\frac{\gamma_p}{4}\omega_1=\frac{\mathrm{i}}{2}$.

例1.2 (1) 亚纯函数$f(z)=\frac{1}{z}+z\mathrm{e}^{2z}$是时滞微分方程
$$f^2(z)+(z+1)^2f'(z+1)=\frac{1}{z^2}-1+(2+\mathrm{e}^2(2z^3+7z^2+8z+3))\mathrm{e}^{2z}+z^2\mathrm{e}^{4z}$$
的一个解. 这里的$H_0(z)=\frac{1}{z^2}-1\not\equiv 0,\gamma_p=1,t=2,n<\gamma_p+t+1$, 且有$\lambda(f)=\rho(f)=1$.

(2) 微分方程$f^2(z)+f'(z)=(\frac{2}{z}+2)\mathrm{e}^{2z}+\mathrm{e}^{4z}$有一个亚纯函数解$f(z)=\frac{1}{z}+\mathrm{e}^{2z}$. 这里的$H_0(z)\equiv 0,\gamma_p=1,t=2,n<\gamma_p+t$. 通过简单计算有$\lambda(f)=\rho(f)=1$.

进一步, 当方程(1.3)中$P(z,f)$的系数$h(z)=B_0(z)+B_1(z)\mathrm{e}^{b_1z^q}(b_1\in\mathbf{C}\backslash\{0\})$时(即$\rho(h)=q$), 借助角域上指数多项式的性质, 考虑了方程整函数解Julia集的径向分布, 得到如下定理1.3.

定理1.3 设$B_0(z),B_1(z),H_0(z),H_1(z)$是增长级小于$q$的整函数, $m\in\mathbf{Z}$. 若$B_1(z)\not\equiv 0, H_1(z)\not\equiv 0$, 则方程
$$f^n(z)+[B_0(z)+B_1(z)\mathrm{e}^{b_1z^q}]\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}=H_0(z)+H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1z^q} \tag{1.4}$$
的任意超越整函数解$f(z)$满足下面的情况(i)和(ii).

(i) 若$\frac{b_1}{\omega_1}=c(0<c<1)$, 则有$\mathrm{mes}(L(f^{(m)}))\ge\mathrm{mes}\left(\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})\right)\ge\pi$;

(ii) 若$\mathrm{Im}(b_1)\ne 0,\omega_1\in\mathbf{R}^+$, 则有
$$\mathrm{mes}(L(f^{(m)}))\ge\mathrm{mes}\left(\bigcap_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})\right)\ge\min\{\arg b_1,2\pi-\arg b_1\},$$
其中$f^{(m)}(z)(m\in\mathbf{Z})$表示$f(z)$的$m$阶导数(当$m\ge 0$), 或者表示$f(z)$的$m$阶积分原函数(当$m<0$).

下面的例子表明时滞微分方程(1.4)存在超越整函数解, 且满足定理1.3中的条件.

例1.3 令i为虚数单位. 经计算, 函数$f(z)=\mathrm{e}^z+z$是时滞微分方程
$$f^2(z)-(z+z\mathrm{e}^z)f'(z+2\pi\mathrm{i})=z^2-z+(1-z)\mathrm{e}^{2z}$$
的超越整函数解. 对照方程(1.4), 有$b_1=1,\omega_1=2$满足$\frac{b_1}{\omega_1}<1$. 同理方程
$$f^2(z)+(\mathrm{i}+\mathrm{e}^{(2-2\mathrm{i})z})f(z+2\pi)f'(z+4\pi)=\mathrm{i}\mathrm{e}^{2z}$$
有整函数解$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. 对照方程(1.4)得到$\mathrm{Im}(b_1)=-2,\omega_1=2$, 符合定理1.3中(ii)的假设.

§2 预备知识

为了方便定理的证明, 现给出本文需要用到的几个辅助引理.

引理2.1[17] 设$c\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$且$f(z)$为满足$\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{r}=0$的非常数亚纯函数, 则当$r(\notin$

E_1)充分大时有

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)+m\left(r,\frac{f(z)}{f(z+c)}\right)=o(T(r,f))$$

和

$$T(r,f(z+c))=T(r,f)+o(T(r,f)),N(r,f(z+c))=N(r,f)+o(N(r,f))$$

成立, 这里E_1表示一个零上密度集合, 即$\overline{\mathrm{dens}}E_1=\limsup\limits_{r\to\infty}\int_{E_1\cap[1,r]}\frac{1}{r}\mathrm{d}t=0$. 同时以下两条成立.

(1) 结合[18, 引理2.1], 有$N(r,\frac{1}{f(z+c)})=N(r,\frac{1}{f(z)})+o(N(r,\frac{1}{f}))$;(其中$r\to\infty,r\notin E_1$)

(2) 对于任意的正整数k, 根据对数导数引理[9]易得

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)}\right)=o(T(r,f)),\ (r(\notin E_1\cup E_2)\to\infty)$$

这里的E_2代表一个有限线测度集合. 以下约定$E=E_1\cup E_2$且每次出现不必完全相同.

引理2.2[7, 引理2.5] 设$\omega_1,\cdots,\omega_t$为互相判别的非零复常数, $H_0(z),\cdots,H_t(z)$为增长级小于q的亚纯函数且有$H_j(z)\not\equiv 0(1\le j\le t)$, 这里$t,q\in\mathbf{N}^+$. 记$\varphi(z)=H_0(z)+\sum\limits_{j=1}^{t}H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}$, 则存在正常数$d_1<d_2$使得

$$d_1r^q\le T(r,\varphi)\le d_2r^q,\ r\to\infty.$$

其中当$H_0(z)\not\equiv 0$且r充分大时有$m(r,\frac{1}{\varphi})=o(r^q)$.

引理2.3 在定理1.2的条件下, 若方程(1.3)的亚纯函数解$f(z)$满足$N(r,f)=o(T(r,f))$以及$\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{r}=0$, 则有$\rho(f)=q$. 其中当$H_0(z)\not\equiv 0$时有

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+o(T(r,f)),\ r\to\infty,r\notin E.$$

证 由引理2.2和方程(1.3), 当r充分大时有

$$\begin{aligned}&d_1r^q\le T(r,f^n(z)+P(z,f))=m(r,f^n(z)+P(z,f))+N(r,f^n(z)+P(z,f))\le\\&nm(r,f)+m(r,h)+m\left(r,\frac{\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^{\gamma_p}(z)}f^{\gamma_p}(z)\right)+\sum_{j=0}^{t}N(r,H_j)+O(1).\end{aligned}$$

因为方程(1.3)中的系数$H_0(z),\cdots,H_t(z)$为有理函数且整函数$h(z)$满足$\rho(h)<q$, 由引理2.1和上面的不等式有

$$d_1r^q\le(n+\gamma_p)T(r,f)+o(T(r,f))+o(r^q).\ (\text{其中}r\to\infty,r\notin E)$$

另一方面, 方程(1.3)可以改写为

$$f^n(z)=H_0(z)+\sum_{j=1}^{t}H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}-\frac{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^{\gamma_p}(z)}f^{\gamma_p}(z).$$

根据引理2.1, 引理2.2和均值函数$m(r,f)$的定义, 当$r(\notin E)\to\infty$时有

$$(n-\gamma_p)m(r,f)\le d_2r^q+o(T(r,f))+o(r^q).$$

结合定理1.2中的条件$n>\gamma_p$和$N(r,f)=o(T(r,f))$, 可以找到正常数$A<B$满足

$$Ar^q\le T(r,f)\le Br^q.\ (\text{其中}r\to\infty,r\notin E) \tag{2.1}$$

即有$\rho(f)=q$和$o(T(r,f))=o(r^q)$成立.

当$H_0(z)\not\equiv 0$时, 由方程(1.3)变形可得

$$\frac{1}{H_0(z)+\Sigma_{j=1}^{t}H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}+\frac{h(z)}{H_0(z)+\Sigma_{j=1}^{t}H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}\cdot\frac{\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^n(z)}=\frac{1}{f^n(z)}.$$

根据引理2.1和引理2.2有

$$nm\left(r,\frac{1}{f}\right)\le (n-\gamma_p)m\left(r,\frac{1}{f}\right)+o(r^q),\ (\text{其中}r\to\infty,r\notin E)$$

进而$m(r,\frac{1}{f})=o(r^q)$. 结合第一基本定理和式(2.1), 易得

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+o(T(r,f)).\ (\text{其中}r(\notin E)\to\infty)$$

假设$f(z)$是具有k重零点的非常数亚纯函数, 采用计数符号$n_p(r,\frac{1}{f})=\min\{k,p\}$, 则相应的零点积分计数函数表示为$N_p(r,\frac{1}{f})$.

引理2.4[19-20, Cartan's第二基本定理] 假设$f_1,f_2,\cdots,f_p$是线性无关的整函数, 且对于任意的复数z都有$\max\{|f_1(z)|,|f_2(z)|,\cdots,|f_p(z)|\}>0$. 当$r>0$时, 记

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta-u(0),u(z)=\sup_{1\le j\le p}\log|f_j(z)|.$$

令$f_{p+1}=f_1+f_2+\cdots+f_p$, 则有

$$T(r)\le\sum_{j=1}^{p+1}N_{p-1}(r,\frac{1}{f_j})+S(r)\le(p-1)\sum_{j=1}^{p+1}\overline{N}(r,\frac{1}{f_j})+S(r),$$

这里的$S(r)=O(\log rT(r)),r(\notin E_2)\to\infty$. 如果至少存在一对比值$\frac{f_j}{f_m}(1\le m\ne j\le p+1)$是超越整函数, 则有$S(r)=o(T(r)),r(\notin E_2)\to\infty$. 其中对任意的$j,m$, 当$r$充分大时有

$$T(r,f_j/f_m)=T(r)+O(1),N(r,1/f_m)=T(r)+O(1).$$

引理2.5[21] 若$f(z)$为非常数亚纯函数, k为正整数, 则有

$$N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\le N\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+o(T(r,f)).\ (\text{其中}r(\notin E_2)\to\infty)$$

引理2.6[21] 假若$f_1,f_2,\cdots,f_p$是线性无关的亚纯函数且满足$\sum_{j=1}^p f_j\equiv 1$, 则对任意的$1\le j\le p$和充分大的$r(\notin E_2)$, 有

$$T(r,f_j)\le$$

$$\sum_{k=1}^{p}N(r,\frac{1}{f_k})+N(r,f_j)+N(r,D)-\sum_{k=1}^{p}N(r,f_k)-N(r,\frac{1}{D})+o\left(\max_{1\le k\le p}\{T(r,f_k)\}\right)\le$$

$$\sum_{k=1}^{p}N(r,\frac{1}{f_k})+(p-1)\sum_{k=1}^{p}\overline{N}(r,f_k)-N(r,\frac{1}{D})+o\left(\max_{1\le k\le p}\{T(r,f_k)\}\right)$$

成立, 这里的D表示Wronskian行列式$W(f_1,f_2,\cdots,f_p)$.

下面关于指数多项式角域上的增长引理在定理1.3的证明中发挥着重要的作用. 约定$\Omega(\vartheta_1,\vartheta_2)=\{z\in\mathbf{C}:\arg z\in(\vartheta_1,\vartheta_2)\}$, 这里$\vartheta_2-\vartheta_1\in(0,2\pi]$.

引理2.7[14] 设$A(z)$为满足$\rho(A)<q$的非零整函数, $P(z)=(\alpha+\beta i)z^q+\cdots(q\in\mathbf{N}^+)$为$q$次多项式, 其中$\alpha,\beta$为实数. 记$g(z)=A(z)e^{P(z)}$(其中$z=re^{i\theta}$)以及$\delta(P,\theta)=\alpha\cos q\theta-\beta\sin q\theta$, 则对任意给定的$\varepsilon>0$, 当$\theta\in[0,2\pi)\backslash(F_1\cup F_2)$, $|z|=r>R_0(\theta,\varepsilon)>0$时有

(1) 若$\delta(P,\theta)>0$, 则

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^q\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^q\};$$

(2) 若$\delta(P,\theta)<0$, 则

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^q\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^q\},$$

这里$F_1\subset[0,2\pi)$为零线测度集合, $F_2=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P,\theta)=0\}$.

注2.1 对于多项式$P(z)=(\alpha+\beta\mathrm{i})z^q+\cdots, q\in\mathbf{N}^+$, 取角域

$$S_j(P,\theta)=\left\{\theta\in[0,2\pi):-\frac{\arg(\alpha+\beta\mathrm{i})}{q}+(2j-1)\frac{\pi}{2q}<\theta<-\frac{\arg(\alpha+\beta\mathrm{i})}{q}+(2j+1)\frac{\pi}{2q}\right\},$$

这里$j=0,1,\cdots,2q-1$. 不失一般性, 若记$\alpha+\beta\mathrm{i}=a_n=|a_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}$, 则根据引理2.7有

$$\delta(P,\theta)=\alpha\cos q\theta-\beta\sin q\theta=|a_n|\cos(\varphi_n+q\theta).$$

容易知道: 当j为偶数且$\theta\in S_j(P,\theta)$时, $\delta(P,\theta)>0$; 当j为奇数且$\theta\in S_j(P,\theta)$时, $\delta(P,\theta)<0$. 这也说明F_2是一个零线测度集合.

引理2.8 若$f(z)$为超越整函数, 则有$TD(f)\subseteq\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})$和$TD(f)\subseteq L(f^{(m)})\bigcap L(f)$.

证 若射线$\arg z=\theta\notin\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})$, 则至少存在一个$m_0\in\mathbf{Z}$使得$\theta\notin TD(f^{(m_0)})$. 根据超越方向的定义, 存在$\varepsilon>0$和正常数$K$, 使得

$$|f^{(m_0)}(z)|\le|z|^K, z\in\varOmega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon). \tag{2.2}$$

当$m_0>0$时, 有$f^{(m_0-1)}(z)=\int_0^z f^{(m_0)}(\xi)\mathrm{d}\xi+c$成立, 这里$c$为常数且取积分路径为0到$z$的直线. 结合这个事实和式(2.2)有

$$|f^{(m_0-1)}(z)|=O(|z|^{K+1}), z\in\varOmega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon).$$

重复上面的讨论m_0次, 对于任意的$z\in\varOmega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$, 有$|f(z)|=O(|z|^{K+m_0})$.

现在考虑$m_0<0$的情况. 由式(2.2)可以知道函数$f^{(m_0)}(z)$在角域$\varOmega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$上是有穷增长的. 由[15, 引理3.1]可知存在正数K_1,K_2和$\varepsilon'<\varepsilon$使得

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(m_0)}(z)}\right|\le K_1|z|^{K_2}, z\in\varOmega(\theta-\varepsilon',\theta+\varepsilon')$$

成立, 至多除去一个线测度有限的例外集. 即在适当的角域中有

$$|f(z)|\le\left|\tfrac{f(z)}{f^{(m_0)}(z)}\right|\cdot|f^{(m_0)}(z)|=O(|z|^{K+K_2}).$$

通过上面讨论, 知道不论m_0取值如何, 均有

$$|f(z)|=O(|z|^M), z\in\varOmega(\theta-\varepsilon',\theta+\varepsilon')$$

成立(至多除去一个有限线测度集合), 这里的M表示为适当的正常数. 上面事实说明了, 当$\theta\notin\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})$时也有$\theta\notin TD(f)$. 这意味着$TD(f)\subseteq\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})$成立. 另一方面, 因为$TD(f)\subseteq L(f)$和$\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})\subseteq TD(f^{(m)})$, 所以有$TD(f)\subseteq L(f^{(m)})\bigcap L(f)$.

§3 定理1.2的证明

假设$f(z)$为方程(1.3)的亚纯函数解, 由分解定理, 可以找到一个整函数$g_1(z)$使得$f(z)g_1(z)$同样为整函数, 且满足$N\left(r,\frac{1}{g_1}\right)=N(r,f)=o(T(r,f))$. 令$g(z)=g_1^n(z)g_2(z)$(这里$g_2(z)$为有理函数$H_0(z),\cdots,H_t(z)$所有极点的乘积(计重数)). 根据方程(1.3)和式(2.1)知道$P(z,f)g(z)$为整函数且有

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)=N\left(r,\frac{1}{g_1^n}\right)+\sum_{j=0}^{t}N(r,H_j)=o(r^q). \text{ (其中}q\in\mathbf{N}^+) \tag{3.1}$$

下面分$H_0(z)\equiv0$和$H_0(z)\not\equiv0$两种情形讨论.

(i) $H_0(z)\equiv0$. 因为$\rho(h)<q$, 根据关系式$\frac{1}{f^n(z)}=\frac{P(z,f)}{f^n(z)}\cdot\frac{1}{P(z,f)}$和第一基本定理有

$$T\left(r,\frac{P(z,f)}{f^n(z)}\right)\ge nT(r,f)-T\left(r,\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}\right)-o(r^q). \tag{3.2}$$

由于$P(z,f)g(z)=h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}g(z)$为整函数, 所以有

$$N\left(r,\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}\right)\leq N(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{h})=o(r^q).$$

由式(2.1), (3.2)和引理2.1有

$$T\left(r,\frac{P(z,f)}{f^n(z)}\right)\geq nT(r,f)-\gamma_p m(r,f)-m\left(r,\frac{\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^{\gamma_p}(z)}\right)-o(r^q)\geq$$
$$(n-\gamma_p-o(1))Ar^q. \text{ (其中}r\to\infty,r\notin E) \tag{3.3}$$

下面从$n\geq\gamma_p+t+1$和$\gamma_p<n\leq\gamma_p+t$两种子情况来讨论.

- 当$n\geq\gamma_p+t+1$. 设$C_1(z)$为函数$f^n(z)g(z),P(z,f)g(z),H_1(z)g(z),\cdots,H_t(z)g(z)$的所有公共零点的乘积, 且每一个公共零点的次数都只取上面函数中相应零点的最小重数. 根据式(3.1)和$\rho(H_1)<q$, 可以知道

$$N\left(r,\frac{1}{C_1}\right)\leq N\left(r,\frac{1}{H_1g}\right)=o(r^q). \text{ (其中}r\to\infty,r\notin E) \tag{3.4}$$

现假设$-P(z,f),H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1z^q},H_2(z)\mathrm{e}^{\omega_2z^q},\cdots,H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_tz^q}$是线性无关的. 把方程(1.3)改写为

$$\frac{f^n(z)g(z)}{C_1(z)}=\sum_{j=1}^{t}\frac{H_j(z)g(z)\mathrm{e}^{\omega_jz^q}}{C_1(z)}-\frac{P(z,f)g(z)}{C_1(z)}. \tag{3.5}$$

根据$g(z)$和$C_1(z)$的取法, 可知$\frac{f^n(z)g(z)}{C_1(z)},\frac{P(z,f)g(z)}{C_1(z)},\frac{H_1(z)g(z)}{C_1(z)},\cdots,\frac{H_t(z)g(z)}{C_1(z)}$是没有公共零点的整函数. 结合式(3.3)和$n>\gamma_p$, 可以知道函数$\frac{P(z,f)g(z)}{C_1(z)}/\frac{f^n(z)g(z)}{C_1(z)}$是超越的.

根据式(3.1)和(3.4), 对方程(3.5)应用引理2.4, 得到

$$nN\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq N\left(r,\frac{C_1}{f^ng}\right)+N\left(r,\frac{g}{C_1}\right)=T_1(r)+o(r^q)\leq$$
$$\sum_{j=1}^{t}N_t\left(r,\frac{C_1}{H_jg\mathrm{e}^{\omega_jz^q}}\right)+N_t\left(r,\frac{C_1}{P(z,f)g}\right)+N_t\left(r,\frac{C_1}{f^ng}\right)+o\left(T_1(r)\right)+o(r^q)\leq$$
$$N\left(r,\frac{1}{P(z,f)}\right)+t\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+o\left(T_1(r)\right)+o(r^q), \tag{3.6}$$

这里

$T_1(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta-u_1(0)$, $u_1(z)=\sup\{\log|\frac{P(z,f)g(z)}{C_1(z)}|,\log|\frac{H_j(z)g(z)\mathrm{e}^{\omega_jz^q}}{C_1(z)}|:1\leq j\leq t\}$.

注意到$N(r,f)=o(r^q)$. 根据引理2.1和引理2.5, 由$P(z,f)$的定义和式(3.6), 可以得到

$$(n-\gamma_p-t)N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq o(T_1(r))+o(r^q) \text{ (其中}r\to\infty,r\notin E)$$

和

$$T_1(r)\leq(\gamma_p+t)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+o(T_1(r))+o(r^q)\leq O(T(r,f))+o(T_1(r))+o(r^q).$$

又因为有$n\geq\gamma_p+t+1$和$\rho(f)=q$, 所以不难得到$N(r,\frac{1}{f})=o(r^q),r(\notin E)\to\infty$.

同样依据方程(1.3)可以得到等式

$$\frac{H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1z^q}}{f^n(z)}+\cdots+\frac{H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_tz^q}}{f^n(z)}-\frac{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^n(z)}=1. \tag{3.7}$$

因为$N(r,\frac{1}{f})=o(r^q)$, $N(r,f)=o(r^q)$, $H_j(z)$(其中$j=1,\cdots,t$)为有理函数且$\rho(h)<q$, 当$r\to\infty,r\notin E$时, 由引理2.1, 引理2.5和$P(z,f)g(z)$为整函数的事实可以得到

$$\sum_{j=1}^{t}N\left(r,\frac{f^n}{H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_jz^q}}\right)+N\left(r,\frac{f^n}{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}\right)=o(r^q),$$

$$\sum_{j=1}^{t}\overline{N}\left(r,\frac{H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}{f^n}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^n}\right)=o(r^q).$$

记$T_f(r)=\max\{T(r,\frac{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}{f^n}),T(r,\frac{H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}{f^n}):j=1,\cdots,t\}$. 对方程(3.7)应用引理2.6, 得到

$$(1-o(1))T_f(r)=o(r^q).\ (其中r\to\infty,r\notin E)$$

这意味着有$T\left(r,\frac{P(z,f)}{f^n(z)}\right)=o(r^q)$成立, 与式(3.3)矛盾, 故假设不成立.

接下来考虑$-P(z,f),H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q},H_2(z)\mathrm{e}^{\omega_2 z^q},\cdots,H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$是线性相关的情况. 因为$\omega_1,\cdots,\omega_t$是互相判别的非零复常数, 所以$H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q},H_2(z)\mathrm{e}^{\omega_2 z^q},\cdots,H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$是线性无关的, 从而可以找到适当的常数$b_1,b_2,\cdots,b_t$使得

$$P(z,f)=h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}=\sum_{j=1}^{t}b_jH_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}. \tag{3.8}$$

把上式带入方程(1.3)可得

$$f^n(z)=\sum_{j=1}^{t}(1-b_j)H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}. \tag{3.9}$$

现在断言常数$1-b_1,1-b_2,\cdots,1-b_t$ 中只有一个不为零. 假若至少存在两个数不为零, 不失一般性, 方程(3.9)可以改写为

$$f^n\mathrm{e}^{-\omega_1 z^q}=(1-b_1)H_1(z)+(1-b_2)H_2(z)\mathrm{e}^{(\omega_2-\omega_1)z^q}+\cdots+(1-b_{t_0})H_{t_0}(z)\mathrm{e}^{(\omega_{t_0}-\omega_1)z^q},$$

这里$2\le t_0\le t$. 因为$(1-b_1)H_1(z)\not\equiv 0$, 结合引理2.2和上面式子, 可以找到正常数$d_3$满足

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{n}N\left(r,\frac{1}{f^n\mathrm{e}^{-\omega_1 z^q}}\right)\ge d_3r^q,\ r\to\infty. \tag{3.10}$$

另一方面, 由方程(3.9)可以推测到函数$f^n(z)g_2(z)$为整函数. 类似的可以取得$C_2(z)$为整函数$f^n(z)g_2(z),H_1(z)g_2(z),\ H_2(z)g_2(z),\cdots$ 的公共零点的乘积(每个公共零点的重数只取上述函数中相应零点重数的最小值), 使得方程

$$\frac{f^n(z)g_2(z)}{C_2(z)}=\frac{g_2(z)(1-b_1)H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}}{C_2(z)}+\cdots+\frac{g_2(z)(1-b_{t_0})H_{t_0}(z)\mathrm{e}^{\omega_{t_0} z^q}}{C_2(z)} \tag{3.11}$$

中的$\frac{f^n(z)g_2(z)}{C_2(z)},\frac{g_2(z)(1-b_1)H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}}{C_2(z)},\cdots,\frac{g_2(z)(1-b_{t_0})H_{t_0}(z)\mathrm{e}^{\omega_{t_0} z^q}}{C_2(z)}$ 各项之间是没有公共零点的整函数, 且满足

$$N\left(r,\frac{1}{C_2}\right)\le N\left(r,\frac{1}{g_2(z)H_1(z)}\right)=o(r^q),\ r\to\infty.$$

对方程(3.11)应用引理2.4, 当$r\to\infty,r\notin E$时, 得到

$$\begin{aligned}&nN\left(r,\frac{1}{f}\right)\le N\left(r,\frac{C_2}{f^ng_2}\right)+N\left(r,\frac{g_2}{C_2}\right)=T_2(r)+o(r^q)\le\\&\sum_{j=1}^{t_0}N_{t_0-1}\left(r,\frac{C_2}{g_2(1-b_j)H_j\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}\right)+N_{t_0-1}\left(r,\frac{C_2}{f^ng_2}\right)+o(T_2(r))+o(r^q)\le\\&(t_0-1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+o(T_2(r))+o(r^q),\end{aligned} \tag{3.12}$$

这里的$T_2(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_2(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta-u_2(0),u_2(z)=\sup\{\log|\frac{g_2(z)(1-b_j)H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}{C_2(z)}|:1\le j\le t_0\}$.

因为$2\le t_0\le t$且由式(3.12)有$T_2(r)\le(t_0-1)T(r,f)+o(T_2(r))+o(r^q)$, 所以有$N(r,\frac{1}{f})=o(r^q)$, 这与式(3.10)是矛盾的, 假设不成立. 现不妨把这个非零数记为$1-b_1$.

同理, 可以断言常数$b_1,b_2,\cdots,b_t$中也只有一个不为零. 当方程(3.8)中至少有两个数$b_j(1\le$

$j \le t$)不等于零时, 类似于式(3.10)的分析, 存在正常数d_4满足

$$N\left(r, \frac{1}{P(z,f)}\right) \ge d_4 r^q,\ r \to \infty.$$

然而根据定理1.2的条件并由引理2.1, 引理2.5和方程(3.9)又得到

$$N\left(r, \frac{1}{P(z,f)}\right) = N\left(r, \frac{1}{h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}}\right) = o(r^q),\ r \to \infty, r \notin E,$$

产生矛盾. 现不妨取$j_0 \in \{1, 2, \cdots, t\}$使得$b_{j_0} \ne 0$. 此时方程(3.8)可以写成

$$P(z,f) = h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k} = b_{j_0}H_{j_0}(z)\mathrm{e}^{\omega_{j_0}z^q}. \tag{3.13}$$

因为$f(z)$为亚纯函数, 根据分解定理和方程(3.9)有

$$f(z) = \gamma_0(z)\mathrm{e}^{\frac{\omega_1 z^q}{n}}, f^{(k)}(z) = \gamma_k(z)\mathrm{e}^{\frac{\omega_1 z^q}{n}},$$

这里的$\gamma_0^n(z) = (1-b_1)H_1(z)$, $\gamma_i(z) = \gamma_{i-1}'(z) + \frac{\omega_1 q z^{q-1}}{n}\gamma_{i-1}(z), i = 1, 2, \cdots, k$. 根据定义, 显然有$T(r, \gamma_k) = o(r^q)$, $0 \le k \le l$. 把$f(z)$的表达式代入方程(3.13), 可以得到

$$b_{j_0}H_{j_0}(z)\mathrm{e}^{\omega_{j_0}z^q} = h(z)\prod_{k=0}^{l}\gamma_k^{n_k}(z+\zeta_k)\mathrm{e}^{\frac{\omega_1}{n}[n_0(z+\zeta_0)^q + n_1(z+\zeta_1)^q + \cdots + n_l(z+\zeta_l)^q]}.$$

由定理1.2的假设条件$n > \gamma_p = \sum_{k=0}^{l} n_k$, 为达到上面等式的平衡, 需满足$j_0 \ne 1$, $\omega_{j_0} = \frac{\gamma_p}{n}\omega_1$.

此外结合方程(1.3), (3.9)和(3.13), 可以得到$t = 2, j_0 = 2, b_1 = 0, b_2 = 1$. 当开始假定$1 - b_2 \ne 0$时, 也可以得到类似的结果. 综上所述有

$$t = 2, f(z) = \gamma_0(z)\mathrm{e}^{\frac{\omega_j z^q}{n}}, \gamma_0^n(z) = H_j(z), \omega_{j'} = \frac{\gamma_p}{n}\omega_j, \tag{3.14}$$

这里的$j \ne j'$满足集合$\{j, j'\} = \{1, 2\}$.

- 当$\gamma_p < n \le \gamma_p + t$. 设$f(z)$为方程(1.3)的亚纯函数解, 根据定义有$\lambda(f) \le \rho(f) = q$. 若$\lambda(f) = \rho(f)$, 满足结论(i)中的第二种情况. 若$\lambda(f) < \rho(f)$, 通过计算有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = o(r^q),\ r \to \infty.$$

类似的分别去讨论$-P(z,f), H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}, H_2(z)\mathrm{e}^{\omega_2 z^q}, \cdots, H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$中各项是线性相关或线性无关的情况, 同样可以得到式(3.14). 因而定理1.2中结论(i)得证.

(ii) $H_0(z) \not\equiv 0$. 通过引理2.3有

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) + o(T(r,f)), \lambda(f) = \rho(f) = q. \text{ (其中}r \to \infty, r \notin E) \tag{3.15}$$

类似于情形(i)中函数$C_1(z)$的取法, 可以取到函数$C_3(z)$使得$\frac{f^n(z)g(z)}{C_3(z)}$, $\frac{P(z,f)g(z)}{C_3(z)}$, $\frac{H_0(z)g(z)}{C_3(z)}$, $\cdots$, $\frac{H_t(z)g(z)}{C_3(z)}$是一些没有公共零点的整函数, 同时满足$N(r, \frac{1}{C_3}) = o(r^q)$, $r \to \infty, r \notin E$.

现在考虑$n > \gamma_p + t + 1$的情况. 若$-P(z,f), H_0(z), H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}, \cdots, H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$是线性无关的, 则考虑把方程(1.3)改写为

$$\frac{f^n(z)g(z)}{C_3(z)} = \frac{H_0(z)g(z)}{C_3(z)} + \sum_{j=1}^{t}\frac{H_j(z)g(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}}{C_3(z)} - \frac{P(z,f)g(z)}{C_3(z)}.$$

根据式(3.1), 引理2.1, 引理2.4和引理2.5, 类似于式(3.6)中的讨论可以得到

$$(n - \gamma_p - t - 1)N\left(r, \frac{1}{f}\right) \le o(r^q),\ r \to \infty, r \notin E.$$

由于$n > \gamma_p + t + 1$, 结合式(3.15)和上面的式子可以导出$T(r,f) = o(r^q)$, 这是不可能的.

当$-P(z,f), H_0(z), H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q}, H_2(z)\mathrm{e}^{\omega_2 z^q}, \cdots, H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$是线性相关时, 同样可以找到不

全为零的常数$b_0', b_1', \cdots, b_t'$使得

$$P(z,f)=h(z)\prod_{k=0}^{l}(f^{(k)}(z+\zeta_k))^{n_k}=b_0'H_0(z)+\sum_{j=1}^{t}b_j'H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}.$$

把上式代入方程(1.3), 有

$$f^n(z)=(1-b_0')H_0(z)+\sum_{j=1}^{t}(1-b_j')H_j(z)\mathrm{e}^{\omega_j z^q}. \tag{3.16}$$

根据引理2.3和式(3.15), 可以推测到上面方程右侧的常系数$1-b_0', 1-b_1', \cdots, 1-b_t'$中至少有两项不为零. 反之, 根据方程(3.16)有$T(r,f)=N(r,\frac{1}{f})+o(r^q)=o(r^q)$, 产生矛盾.

依据方程(3.16)同样可以知道$f^n(z)g_2(z)$为整函数, 再类似方程(3.11)和式(3.12)的分析可以得到$(n-t)N\left(r,\dfrac{1}{f}\right)\le o(r^q)$, $r\to\infty, r\notin E$. 结合式(3.15)和上面事实同样可以导出$T(r,f)=o(r^q)$, 产生矛盾. 定理1.2中结果(ii)得证.

§4 定理1.3的证明

(i) 当$\frac{b_1}{\omega_1}=c(0<c<1)$时, 根据定义有$\delta(b_1z^q,\theta)=c\delta(\omega_1z^q,\theta)$. 记集合

$$S_1(\theta)=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(\omega_1z^q,\theta)>0\}.$$

由引理2.7和注2.1知道$\mathrm{mes}(S_1(\theta))=\pi$. 因为$B_0(z), B_1(z), H_0(z), H_1(z)$均是增长级小于$q$的整函数, 当$\theta\in S_1(\theta)\backslash F_1$时, 根据引理2.7, 对任意给定的$\varepsilon_0\in(0,\frac{1-c}{1+c})$, 当$r>R_0(\theta)$有

$$\frac{1}{2}\exp\{(1-\varepsilon_0)\delta(\omega_1z^q,\theta)r^q\}\le\left|H_0(z)+H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1z^q}\right| \tag{4.1}$$

和

$$\left|B_0(z)+B_1(z)\mathrm{e}^{b_1z^q}\right|\le 2\exp\{(1+\varepsilon_0)c\delta(\omega_1z^q,\theta)r^q\} \tag{4.2}$$

成立, 这里$F_1\subset[0,2\pi)$表示线测度为零的集合. 下面证明$(S_1(\theta)\backslash F_1)\subseteq TD(f)$.

根据超越方向的定义, 当$\theta\notin TD(f)$时, 存在充分小的正数ε有

$$|f(z)|\le|z|^{M_0}, z\in\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon), \tag{4.3}$$

这里的M_0表示为适当的正常数(以下每次出现时可不必相同). 可以通过缩小角域, 选取适当的正数$\varepsilon_1(<\varepsilon)$, 当$|z|=r$充分大时可以使得

$$|f(z+\zeta_k)|\le|z|^{M_0}, z\in\Omega(\theta-\varepsilon_1,\ \theta+\varepsilon_1),$$

这里的$\zeta_k(k=0,1,\cdots,l)$为不同的复常数. 因为$f(z)$为整函数, 利用Cauchy估计式, 对任意的$k\in\mathbf{N}$满足

$$|f^{(k)}(z+\zeta_k)|\le|z|^{M_0}, z\in\Omega\left(\theta-\frac{\varepsilon_1}{3},\theta+\frac{\varepsilon_1}{3}\right), |z|=r\to\infty. \tag{4.4}$$

对任意给定的$\theta\in(S_1(\theta)\backslash F_1)$但$\theta\notin TD(f)$时, 结合方程(1.4)和式(4.1)-(4.4)有

$$\frac{1}{2}\exp\{(1-\varepsilon_0)\delta(\omega_1z^q,\theta)r^q\}\le\left|H_0(z)+H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1z^q}\right|\le$$
$$[1+2\exp\{(1+\varepsilon_0)c\delta(\omega_1z^q,\theta)r^q\}]\,O(r^{M_0}).$$

把上面的式子进一步整理可以得到

$$\exp\{[(1-\varepsilon_0)-c(1+\varepsilon_0)]\delta(\omega_1z^q,\theta)r^q\}\le O(r^{M_0}).$$

因为$0<\varepsilon_0<\frac{1-c}{1+c}$, 所以$[(1-\varepsilon_0)-c(1+\varepsilon_0)]\delta(\omega_1z^q,\theta)>0$, 当$r$充分大时导出矛盾. 故只能是有$(S_1(\theta)\backslash F_1)\subseteq TD(f)$成立. 利用引理2.8可得$(S_1(\theta)\backslash F_1)\subseteq TD(f)\subseteq\bigcap\limits_{m\in\mathbf{Z}}TD(f^{(m)})$. 因

为F_1的线测度为零, 所以有$\mathrm{mes}(L(f^{(m)})) \geq \mathrm{mes}\left(\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} TD(f^{(m)})\right) \geq \pi$.

(ii) 当$\mathrm{Im}(b_1) \neq 0, \omega_1 \in \mathbf{R}^+$时, 根据注2.1有

$$\delta(\omega_1 z^q, \theta) = |\omega_1|\cos(q\theta), \delta(b_1 z^q, \theta) = |b_1|\cos(q\theta + \arg b_1),$$

这里的$\arg b_1 \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. 下面分$\arg b_1 \in (0,\pi)$和$\arg b_1 \in (\pi, 2\pi)$两种情况来考虑, 记

$$S_j(\theta) = S_j(\omega_1 z^q, \theta) \cap S_{j+1}(b_1 z^q, \theta),\ j = 0, 2, \cdots, 2q-2,$$

这里的$S_j(\omega_1 z^q, \theta) = \{\theta \in [0, 2\pi) : (2j-1)\frac{\pi}{2q} < \theta < (2j+1)\frac{\pi}{2q}\}$,

$$S_{j+1}(b_1 z^q, \theta) = \left\{\theta \in [0,2\pi) : (2j+1)\frac{\pi}{2q} - \frac{\arg b_1}{q} < \theta < (2j+3)\frac{\pi}{2q} - \frac{\arg b_1}{q}\right\}.$$

显然, $\forall \theta \in S_{j_0}(\theta)$, 有$\delta(\omega_1 z^q, \theta) = |\omega_1|\cos(q\theta) > 0, \delta(b_1 z^q, \theta) = |b_1|\cos(q\theta + \arg b_1) < 0$.

- 当$\arg b_1 \in (0,\pi)$时, 对于任意不同的两个$i_0, j_0 \in \{0, 2, \cdots, 2q-2\}$, 有

$$S_{i_0}(\theta) \cap S_{j_0}(\theta) = \varnothing, \mathrm{mes}(S_{i_0}(\theta)) = \mathrm{mes}(S_{j_0}(\theta)) = \frac{\arg b_1}{q}.$$

因为$\rho(B_0) < q$和$\delta(b_1 z^q, \theta) < 0$, 利用引理2.7, 当$\theta \in S_{j_0}(\theta) \backslash F_1$时有

$$\left|B_0(z) + B_1(z)\mathrm{e}^{b_1 z^q}\right| \leq |B_0(z)| + \exp\left\{\frac{1}{2}\delta(b_1 z^q, \theta) r^q\right\} < \exp\left\{r^{\frac{\rho(B_0)+q}{2}}\right\}. \tag{4.5}$$

假设此时$\theta \notin TD(f)$, 把式(4.1), (4.3)-(4.5)代入方程(1.4)得到

$$\frac{1}{2}\exp\{(1-\varepsilon_0)\delta(\omega_1 z^q, \theta) r^q\} \leq \left(1 + \exp\{r^{\frac{\rho(B_0)+q}{2}}\}\right) O(r^{M_0}).$$

又因$\delta(\omega_1 z^q, \theta) > 0$, 所以当$r$充分大时上面式子显然是矛盾的. 这意味着有

$$(S_{j_0}(\theta) \backslash F_1) \subseteq TD(f) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbf{Z}} TD(f^{(m)}).$$

当j_0取遍所有$0, 2, \cdots, 2q-2$的数时, 上式依旧成立, 从而有$\mathrm{mes}\left(\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} TD(f^{(m)})\right) \geq \arg b_1$.

- 当$\arg b_1 \in (\pi, 2\pi)$时, 根据集合$S_j(\omega_1 z^q, \theta)$ 和$S_{j+1}(b_1 z^q, \theta)$的定义, 可以得到

$$\mathrm{mes}(S_j(\theta)) = \frac{2\pi - \arg b_1}{q},\ j = 0, 2, \cdots, 2q-2.$$

当j取遍所有的偶数$0, 2, \cdots, 2q-2$时, 类似上面的分析, 同样有$\mathrm{mes}\left(\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} TD(f^{(m)})\right) \geq 2\pi - \arg b_1$. 综合上面两种情况的分析, 结合引理2.8和关系式$TD(f) \subseteq L(f)$, 可以得到

$$\mathrm{mes}(L(f^{(m)})) \geq \mathrm{mes}\left(\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} TD(f^{(m)})\right) \geq \min\{\arg b_1, 2\pi - \arg b_1\}.$$

参考文献:

[1] Yang Chunuchun, Li Ping. On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear differential equations[J]. Arch Math, 2004, 82: 442-448.

[2] Li Ping. Entire solutions of certain type of differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2008, 344: 253-259.

[3] Li Ping. Entire solutions of certain type of differential equations II[J]. J Math Anal Appl, 2011, 375: 310-319.

[4] Lu Xiaoqing, Liao Liangwen, Wang Jun. On meromorphic solutions of a certain type of nonlinear differential equations[J]. Acta Math Sin, 2017, 33: 1597-1608.

[5] Liu Huifang, Mao Zhiqiang. Meromorphic solutions of certain types of nonlinear differential equations[J]. Comput Methods Funct Theory, 2020, 20: 319-332.

[6] Li Xiaomin, Hao Chenshuang, Yi Hongxun. On the growth of meromorphic solutions of certain nonlinear difference equations[J]. Mediterr J Math, 2021, 18: 56.

[7] Mao Zhiqiang, Liu Huifang. On meromorphic solutions of nonlinear delay-differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2022, 509(1): 125886.
[8] Chen Zongxuan. Complex Differences and Difference Equations[M]. Beijing: Science Press, 2014.
[9] Laine I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
[10] Li Jingjing, Huang Zhigang. Radial distributions of Julia sets of difference operators of entire solutions of complex differential equations[J]. AIMS Math, 2022, 7(4): 5133-5145.
[11] Zheng Jianhua, Wang Sheng, Huang Zhigang. Some properties of Fatou and Julia sets of transcendental meromorphic functions[J]. Bull Austral Math Soc, 2002, 66: 1-8.
[12] Chen Jinchao, Li Yezhou, Wu Chengfa. Radial distribution of Julia sets of entire solutions to complex difference equations[J]. Mediterr J Math, 2020, 17: 184.
[13] Li Yezhou, Sun Heqing. A note on the Julia sets of entire solutions to delay differential equations[J]. Acta Math Sci, 2023, 43(1): 143-155.
[14] Wang Jun, Chen Zongxuan. Limiting direction and Baker wandering domain of entire solutions of differential equations[J]. Acta Math Sci, 2016, 36(5): 1331-1342.
[15] Wang Jun, Yao Xiao, Zhang Chengchun. Julia limiting directions of entire solutions of complex differential equations[J]. Acta Math Sci, 2021, 41: 1275-1286.
[16] Wang Jun. Yao Xiao. On Julia limiting directions of meromorphic functions[J]. Israel J Math, 2020, 238: 405-430.
[17] Cao Tingbin, Xu Ling. Logarithmic difference lemma in several complex variables and partial difference equations[J]. Ann Mat Pura Appl, 2020, 199(2): 767-794.
[18] Zheng Jianhua, Korhonen R. Studies of differences from the point of view of Nevanlinna theory[J]. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 4285-4318.
[19] Cartan H. Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données[J]. Mathematica (Cluj), 1933, 7: 5-31.
[20] Gundersen G G, Hayman W K. The strength of Cartan's version of Nevanlinna theory[J]. Bull Lond Math Soc, 2004, 36(4): 433-454.
[21] Yang Chunuchun, Yi Hongxun. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

On the properties of solutions to nonlinear delay differential equations

SUN He-qing, LI Ye-zhou, NIU Wen-xiao

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: Let $\omega_1, \cdots, \omega_t$ be distinct nonzero complex numbers, $H_0(z), \cdots, H_t(z)$ be meromorphic functions. In this paper, the zero distribution and growth of meromorphic solutions of the Tumura-Cluine type nonlinear delay differential equation

$$f^n(z) + P(z,f) = H_0(z) + H_1(z)\mathrm{e}^{\omega_1 z^q} + \cdots + H_t(z)\mathrm{e}^{\omega_t z^q}$$

are studied, where $n(\geq 2), t, q \in \mathbf{N}^+$ and $P(z,f)$ is a delay differential monomial. Using the properties of exponential polynomials in the angular domain, it also considers the radial distribution of Julia sets of entire solutions to the above equation, and the lower bound estimates of the measure of related limiting directions are verified.

Keywords: delay differential equation; growth; zero distribution; radial distribution; measure

MR Subject Classification: 30D35; 37F10; 34M05