

基于谱展开方法的一类到达率可变的有限排队系统分析

张宏波^{1,2}, 周高军¹

(1. 河南财政金融学院 统计与数学学院, 河南郑州 450046;

2. 郑州西亚斯学院 数字技术产业学院, 河南郑州 450003)

摘要: 该文讨论到达率可变的M/T-SPH/1/N有限排队, 其中T-SPH表示可数状态吸收生灭过程吸收时间的分布. 当顾客到达时, 根据系统中顾客数决定是否进入系统. 对该排队模型, 首先对文中建立的QBD过程模型, 用谱展开方法进行分析, 得到了过程联合平稳分布和排队模型的平稳队长分布. 另外, 由所得结果还进一步得到了QBD过程的矩阵几何解. 最后, 通过几个数值例子演示了参数变化对排队系统性能指标的影响.

关键词: M/T-SPH/1/N排队; 有限排队; QBD过程; 谱展开方法; 矩阵几何解

中图分类号: O226

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2024)04-0404-09

§1 引言

著名的PH分布是有限状态Markov链吸收时间的分布^[1], 在随机模型的研究中有重要应用^[1-2]. 史定华等引进的SPH分布是经典的PH分布的推广^[3-4]. SPH分布是可数状态连续时间吸收Markov链吸收时间的分布. 关于SPH分布在排队论中的应用参见综述论文[5]. 本文考虑一种特殊的SPH分布, 即在其表示 (β, T) 中, $\beta = (1, 0, 0, \dots)$, 而

$$T = \begin{bmatrix} -(a+c) & a & & & \\ c & -(a+c) & a & & \\ & c & -(a+c) & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

其中 $c > a > 0$. 以下称该分布为T-SPH分布, 这是可数状态吸收生灭过程吸收时间的分布. 关于T-SPH分布及其相关排队模型的讨论, 参见[6-7].

本文研究到达率可变, 等待空间有限的M/T-SPH/1/N排队. 在实际场景中, 当顾客到达服务台时, 他是否进入系统排队往往取决于正在排队的人数, 这一情况可以用可变到达率来描述.

另外, 由于资源的稀缺性, 等待空间有限也具有现实意义, 如服务大厅空间有限, 服务器存储空间有限, 停车位有限等. 因此研究到达率可变, 等待空间有限的M/T-SPH/1/N排队具有重要意义. 对该模型, 本文用水平无限, 位相有限的拟生灭(QBD)过程建模, 并用谱展开方法求解, 此外还讨论了与经典的算子几何解之间的关系.

谱展开方法也称为广义特征值方法^[8]. 该方法已成功应用于一些排队模型的研究之中, 例如, Drekić和Grassmann^[9]关于有限顾客源M/M/1抢占优先排队研究; Drekić和Grassmann^[10]关于有限等待空间M/M/1抢占优先权排队研究; Grassmann和Drekić^[11-12]关于反馈排队的研究, Zhang等人^[13]关于M/M/1多重工作休假排队的研究等.

本文余下部分安排如下. §2对所研究排队系统建立了QBD过程模型. §3用谱展开方法对建立的模型求解, 得到了过程的联合平稳分布以及排队系统的平稳队长分布. §4给出了模型的矩阵几何解. §5给出了几个数值例子, 以演示参数变化对系统性能指标的影响. §6是小结.

§2 模型描述

在M/T-SPH/1/N排队中, 假设顾客按照强度为 λ 的Poisson过程到达一个等待空间容量为 N 的服务系统, 这里 N 是一个正整数. 从而最多有 N 个顾客可进入系统, 且一旦系统中有 N 个顾客, 再到达的顾客将不能进入, 这也称为溢出^[14]. 另外, 还假设对一个到达的顾客, 当系统中人数小于 N 时, 他选择进入的概率 $u_n \in (0, 1)$ 依赖于当前系统中顾客数 n , 从而实际到达率为

$$\lambda_n = \lambda u_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

最后, 假设服务台的服务时间独立同分布, 且共同的分布是表示为 $(\beta, \mathbf{T})$ 的T-SPH分布.

令 $L(t)$ 表示 t 时刻系统中的顾客数, 从而 $0 \leq L(t) \leq N$. 令 $J(t)$ 表示 t 时刻服务台的服务位相, 则可建立二维随机过程模型 $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$, 其状态空间为

$$E = \{0\} \cup \{(j, l) : j = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N\},$$

且当状态按字典规则排列时, 过程的无穷小生成元矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A & & \\ & C & B & A & \\ & & C & B & A \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

其中

$$B_0 = (-\lambda_0), \quad A_0 = (\lambda_0, 0, \dots, 0)_{1 \times N}, \quad C_1 = (c, 0, \dots, 0)_{1 \times N}^T, \\ B_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + a + c) & \lambda_1 & & & \\ c & -(\lambda_2 + a + c) & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & -(\lambda_{N-1} + a + c) & \lambda_{N-1} \\ & & & c & -(a + c) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + a + c) & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -(\lambda_{N-1} + a + c) & \lambda_{N-1} & \\ & & & & -(a + c) \end{bmatrix},$$

以及 $A = aI, C = cI$, 这里 I 表示 N 阶单位方阵. 故所建立模型是一个有限位相 QBD 过程^[1-2].

因为 $c > a$, 所以根据著名的漂移性条件^[2], 容易证明上述 QBD 过程遍历, 从而过程的平稳分布唯一存在. 如果记平稳分布为 $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$, 其中 π_0 是一个标量而

$$\pi_n = (\pi_{n1}, \dots, \pi_{nN}), \quad n = 1, 2, \dots.$$

显然平稳分布满足以下方程

$$0 = \pi_0 B_0 + \pi_1 C_1, \quad (1)$$

$$0 = \pi_0 A_0 + \pi_1 B_1 + \pi_2 C, \quad (2)$$

$$0 = \pi_n A + \pi_{n+1} B + \pi_{n+2} C, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

以及归一化条件.

因为到达率可变, 导致矩阵 B_1, B 不具有重复的行, 因此在传统的矩阵解析方法中, 求解率矩阵比较困难. 在本文中, 首先用谱展开方法讨论所建立的 QBD 过程, 然后再由所得结果给出矩阵几何解.

§3 平稳分布的求解

方程(3)是二阶矩阵系数齐次向量差分方程, 对应的特征矩阵多项式为 $D(x) = A + xB + x^2C$, 即

$$D(x) = \begin{bmatrix} d_1(x) & \lambda_1 x & & & \\ & d_2(x) & \lambda_2 x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{N-1}(x) & \lambda_{N-1} x \\ & & & & d_N(x) \end{bmatrix},$$

其中

$$d_i(x) = a - (\lambda_i + a + c)x + cx^2, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

这里假定 $\lambda_N = 0$.

令 x 和 g 分别为矩阵 $D(x)$ 的特征值和相应的左特征向量, 即满足 $gD(x) = 0$. 从而通过简单计算可知 $\pi_n = gx^{n-1}$ 是方程(3)的解. Mitrani 和 Chakka^[8]指出, 当 QBD 过程 $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ 遍历时, 特征多项式 $D(x)$ 恰有 N 个特征根位于单位圆内, 不妨记相应的特征根为 $x_1, \dots, x_N$, 对应的左特征向量记为 $g_1, \dots, g_N$, 则过程的联合平稳分布可表为

$$\pi_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i x_i^{n-1}, \quad (4)$$

其中常数 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ 由方程(1)和(2)以及归一化条件共同确定.

因此求解 QBD 过程 $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ 的平稳分布, 转化为求矩阵多项式 $D(x)$ 的特征值与特征向量, 这种方法在文献中称为谱展开方法或广义特征值方法^[15].

引理 3.1 当 $c > a$ 时, 矩阵特征多项式 $D(x)$ 有 N 个位于区间 $(0, 1)$ 内的特征根 $x_1, \dots, x_N$, 表

达式为

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{2c} \left(\lambda_i + a + c - \sqrt{(\lambda_i + a + c)^2 - 4ac} \right), & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{a}{c}, & i = N. \end{cases} \quad (5)$$

证 因 $\mathbf{g}$ 是特征向量, $\mathbf{D}(x)$ 是上三角方阵, 所以 $\mathbf{gD}(x) = 0$ 等价于 $\det \mathbf{D}(x) = \prod_{i=1}^N d_i(x) = 0$, 这又等价于 $d_i(x) = 0$ 对某一 $i = 1, 2, \dots, N$ 成立. 显然 $d_i(x) = 0$ 是一个一元二次方程, 其两个根为

$$x_i = \frac{1}{2c} \left(\lambda_i + a + c - \sqrt{(\lambda_i + a + c)^2 - 4ac} \right), \quad y_i = \frac{a}{cx_i},$$

因为 $c > a$, 所以容易证明 $x_i \in (0, 1)$, $y_i > 1$. 最后, 注意到 $\lambda_N = 0$, 从而 $X_N = \frac{a}{c}$, 由此即得引理结论.

引理3.2 $\forall i = 1, 2, \dots, N$, 特征值 x_i 对应的左特征向量 $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{iN})$ 的分量由

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, i-1, \\ \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_i}, & j = i, i+1, \dots, N \end{cases} \quad (6)$$

给出, 其中假设空的乘积的值为1, 从而 $g_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, N$.

证 显然 $\forall i = 1, 2, \dots, N$, 矩阵方程 $\mathbf{g}_i \mathbf{D}(x_i) = 0$ 的分量形式为

$$0 = g_{i1} d_1(x_i), \quad (7)$$

$$0 = g_{i,j-1} \lambda_{j-1} x_i + g_{ij} d_j(x_i), \quad j = 2, 3, \dots, N. \quad (8)$$

当 $i = 1$ 时, 因为 $d_1(x_1) = 0$, 所以由(7)可知 g_{11} 可取任意值, 但若 $g_{11} = 0$, 则由(8)以及 $d_j(x_1) \neq 0, j > 1$ 知 $\mathbf{g}_1 = 0$, 这与特征向量非零不符, 从而可取 $g_{11} = 1$. 由此出发, 由(8)易得

$$g_{1j} = \frac{(-1)^{j-1} x_1^{j-1} \prod_{k=1}^{j-1} \lambda_k}{\prod_{k=2}^j d_k(x_1)}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

其中假设空的乘积的值为1, 从而该式包含 $g_{11} = 1$.

当 $i \geq 2$ 时, 因为 $d_i(x_i) = 0, d_i(x_j) \neq 0, j \neq i$. 类似于以上推理, 当 $j = 1, \dots, i-1$ 时 $g_{ij} = 0$, 而

$$g_{ij} = \frac{(-1)^{j-i} x_i^{j-i} \prod_{k=i}^{j-1} \lambda_k}{\prod_{k=i+1}^j d_k(x_i)}, \quad j = i, i+1, \dots, N.$$

最后显然当 $i \neq k$ 时有

$$d_k(x_i) = a - (\lambda_k + a + c)x_i + cx_i^2 = (\lambda_i - \lambda_k)x_i,$$

代入以上两式分母, 经过化简即可得引理的结论.

定理3.1 令 $\mathbf{G} = (g_{ij})_{N \times N}$, 则 $\mathbf{G}$ 是一个对角元素全为1的上三角方阵, 且 $\mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{e}_N$. 其中 $\mathbf{e}$ 是 N 维全1列向量, 而 $\mathbf{e}_N$ 是第 N 个 N 维单位列向量.

证 由(6)显然 $\mathbf{G}$ 是一个对角元素全为1的上三角方阵. 另外, 在(7)和(8)中对 j 求和, 并注意 $\lambda_N = 0$, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=2}^{N-1} g_{i,j-1} \lambda_{j-1} x_i + \sum_{j=1}^N g_{ij} d_j(x_i) = \sum_{j=1}^N g_{ij} [\lambda_j x_i + d_j(x_i)] = \\ &[a - (a + c)x_i + cx_i^2] \sum_{j=1}^N g_{ij} = d_N(x_i) \sum_{j=1}^N g_{ij}. \end{aligned}$$

再由 x_i 的定义知当 $i \neq N$ 时, $d_N(x_i) \neq 0$, 从而可得 $\mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{e}_N$.

现在确定联合平稳分布(4)式中待定常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ 的值. 为此令 $\mathbf{e}_1$ 表示第1个 N 维单位列向量, 再令

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

有下述引理3.3.

引理3.3 N 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{H} = -\lambda_0\mathbf{e}_1^\top \quad (9)$$

确定, 其中

$$\mathbf{H} \triangleq \mathbf{G}\mathbf{B}_1 + c\mathbf{\Lambda}\mathbf{G} - \frac{\lambda_0}{1-x_N}\mathbf{e}_N\mathbf{e}_1^\top \quad (10)$$

是一个 N 阶方阵.

证 首先, 采用引进的相关向量和矩阵符号, 联合平稳分布(4)可以改写为

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Lambda}^{n-1}\mathbf{G}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

所以 $\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}$, 代入(2)式可得

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{G}\mathbf{B}_1 + c\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) = -\lambda_0\boldsymbol{\pi}_0\mathbf{e}_1^\top. \quad (12)$$

其次, 由定理3.1及归一化条件可得

$$1 = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Lambda}^{n-1}\mathbf{G}\mathbf{e} = \pi_0 + \boldsymbol{\alpha}\text{diag}\left\{\frac{1}{1-x_1}, \dots, \frac{1}{1-x_N}\right\}\mathbf{e}_N = \pi_0 + \frac{\alpha_N}{1-x_N}.$$

因此 $\pi_0 = 1 - \frac{\alpha_N}{1-x_N}$, 代入(12)即可得(9)式.

在以上几个引理的基础上, 现在考虑M/T-SPH/1/N排队的平稳队长分布. 记稳态时系统中的顾客数为 L , 从而 $L \in \{0, 1, \dots, N\}$, 定义

$$p_k = P(L = k), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

则平稳队长分布律为 $(p_0, p_1, \dots, p_N)$, 显然这是过程 $\{(J(t), L(t)), t \geq 0\}$ 对位相的边缘分布律, 从而有下述定理3.2.

定理3.2 对到达率可变的M/T-SPH/1/N排队, 其平稳队长分布律 $\{p_n, n = 0, 1, \dots, N\}$ 由

$$p_n = \begin{cases} \frac{c\alpha_1}{\lambda_0}, & n = 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1-x_i} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}-\lambda_i}, & n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (13)$$

给出, 其中 x_i, α_i 分别由(5)式和(9)给出.

证 首先由方程(1)可知, $\boldsymbol{\pi}_1\mathbf{C}_1 = -\pi_0\mathbf{B}_0 = \lambda_0\boldsymbol{\pi}_0$, 由(2)可得 $\lambda_0\pi_0 = c\pi_{10}$. 再由(11)知 $\pi_{10} = \alpha_1$, 所以 $p_0 = \pi_0 = \frac{c\alpha_1}{\lambda_0}$. 其次令 $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$, 则显然有

$$\mathbf{p} = (\pi_{\cdot 1}, \dots, \pi_{\cdot N}) = \boldsymbol{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^n \mathbf{G} = \boldsymbol{\alpha} \text{diag}\left\{\frac{1}{1-x_1}, \dots, \frac{1}{1-x_N}\right\} \mathbf{G},$$

由此即得定理的结论.

因此, 由定理3.1, 当一个顾客到达时, 发现系统是非空闲的概率为 $p_B = 1 - p_0 = 1 - \frac{c\alpha_1}{\lambda_0}$. 另外还有以下定理3.3.

定理3.3 对到达率可变的M/T-SPH/1/N排队, 在稳态时当一个顾客到达时, 被拒绝进入系统的概率为

$$p_N = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1-x_i} \prod_{k=i}^{N-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}-\lambda_i}. \quad (14)$$

证 显然在系统稳态时, 一个到达的顾客被拒绝进入系统当且仅当系统中已有 N 个顾客, 从

而发生的概率为 p_N . 所以在(13)中令 $n = N$ 即可得定理结论.

§4 算子几何解

对本文所建立的QBD过程, 经典的求解方法是矩阵解析方法. 当其平稳分布存在时, 满足如下的矩阵几何解^[1]

$$\pi_n = \pi_1 \mathbf{R}^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{R}$ 称为率阵, 且是二次矩阵方程 $\mathbf{A} + \mathbf{R}\mathbf{B} + \mathbf{R}^2\mathbf{C} = 0$ 的最小非负解. 对本文的模型, 直接求解率阵较为困难. 但是, 因为 $\pi_1 = \alpha\mathbf{G}$, 所以再由(11)式可知

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{G}. \quad (16)$$

从而若能得到 $\mathbf{G}^{-1}$, 则从上式出发, 可得到率阵的具体表达式, 而不必求解二次矩阵方程. 为此先给出一个引理.

引理4.1 对任意的 $i = 1, 2, \dots, N$, 矩阵 $\mathbf{G}$ 的逆阵 $\mathbf{G}^{-1}$ 的 (i, j) 位系数 f_{ij} 由

$$f_{ij} = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, i-1, \\ \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_j}, & j = i, i+1, \dots, N \end{cases} \quad (17)$$

给出, 其中空乘积的值规定为1, 从而 $f_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, N$.

证 因为 $\mathbf{G}$ 是对角元全为1的上三角方阵, 从而其逆也如此, 所以 $f_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, N$. 其余非零系数满足

$$\sum_{k=i}^j f_{ik} g_{kj} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = i+1, \dots, N.$$

所以再由(6)式可得

$$f_{ij} = - \sum_{k=i}^{j-1} f_{ik} \prod_{l=k}^{j-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{l+1} - \lambda_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = i+1, \dots, N,$$

由此出发, 经过常规的代数运算, 可得(17)式.

注意: 因为 $\lambda_N = 0$, 所以由(17)式立即可得 $f_{iN} = 1, i = 1, 2, \dots, N$, 即 $\mathbf{G}^{-1}$ 的第 N 列系数都是1, 这显然与定理3.1的结论吻合. 最后, 在上述引理的基础上有以下定理4.1.

定理4.1 对任意的 $i = 1, 2, \dots, N$, 率阵 $\mathbf{R}$ 的 (i, j) 位系数 r_{ij} 由

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, i-1, \\ \sum_{l=i}^j x_l \prod_{m=i}^{l-1} \frac{\lambda_m}{\lambda_l - \lambda_m} \prod_{n=l}^{j-1} \frac{\lambda_n}{\lambda_l - \lambda_{n+1}}, & j = i, i+1, \dots, N \end{cases} \quad (18)$$

给出, 其中空乘积的值规定为1, 从而 $r_{ii} = x_i, i = 1, 2, \dots, N$.

证 显然由(16)式知 $\mathbf{R}$ 是上三角方阵, 且其非零系数满足

$$r_{ij} = \sum_{l=i}^j x_l f_{il} g_{lj}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = i, \dots, N,$$

从而再由(6)式和(17)式即可得定理结论.

§5 数值例子

基于前几节的结果, 本节讨论M/T-SPH/1/N排队平稳队长分布律的数值计算问题. 为此, 首先由Gauss消元法求解线性方程组(9)而得到 $\{\alpha_i, i = 1, \dots, N\}$ 的值, 其次再由(13)即可得平稳

分布 $\{p_n, n = 0, \dots, N\}$ 的数值, 从而又可得 p_B 和 p_N 等. 在计算时, 定理3.1的结论及归一化条件均可用于精度监测.

因为 $\lambda_n = \lambda u_n$, 其中 u_n 是当系统中已有 $n \leq N$ 个顾客时, 新到达的顾客选择进入系统的概率, 根据实际情形, 以下假设 u_n 满足以下条件: 第一, 与 n 和 N 有关. 第二, $u_0 = 1, u_N = 0$. 第三, 关于 n 递减且随着 n 的增加, 减小的幅度变大. 下面给出三个具体例子.

在第一个例子中, 设参数取值为 $\lambda = 2, a = 2, c = 5, N = 15$, 选择概率为

$$u_n = \left[1 - \left(\frac{n}{N}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

其中 $\alpha > 1$ 是常数. α 的不同取值会导致不同的衰减速度, 取值越接近1, 同一 n 对应的 u_n 越小, 且随 n 衰减越快. 对 $\alpha = 1.2, 1.6, 2.0$ 的情形, 参见图1.

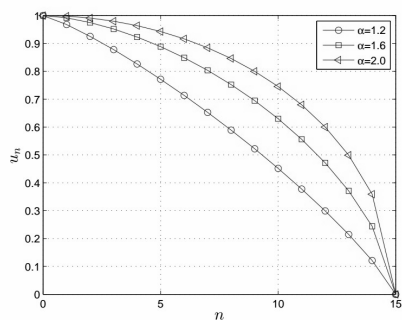


图 1 u_n 随 α 的变化曲线

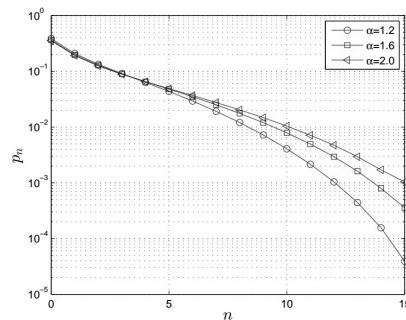


图 2 p_n 随 n 的变化曲线

当 α 分别取上述三个不同值时, 平稳队长 p_n 随 n 变化情形参见图2. 由图可以看出, 对该组参数, p_n 随着 n 的变化呈递减趋势, 但递减的幅度表现出先变缓后增加的特征, 而且 α 越大, 选择进入的概率 u_n 取值较大, 这种特征越明显. 另外, 三种情形下平均队长分别为1.18, 2.06和2.24, 即随着择进入概率变大, 平均队长变长, 这时符合实际情况的.

在第二个例子中, 设参数取值为 $\lambda = 1, a = 2, c = 3$, 分别取 $N = 1, 2, \dots, 10$, 另外, 设选择概率为 $u_n = 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$, 其中 $\beta \in (0, 1)$ 且其值越接近1, u_n 随 n 递减速度越快, 参见图3.

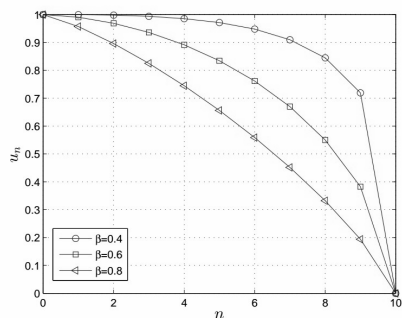


图 3 u_n 随 β 的变化曲线

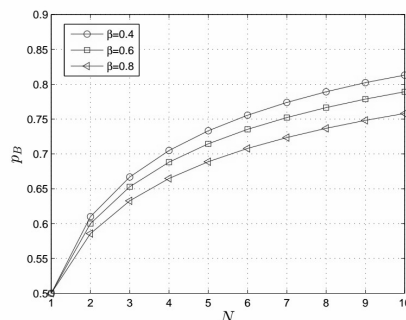
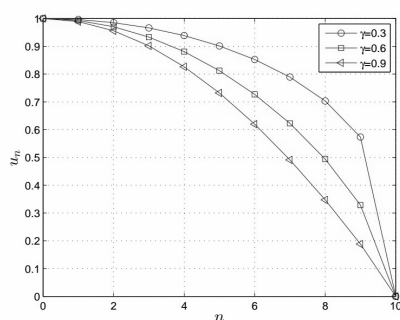
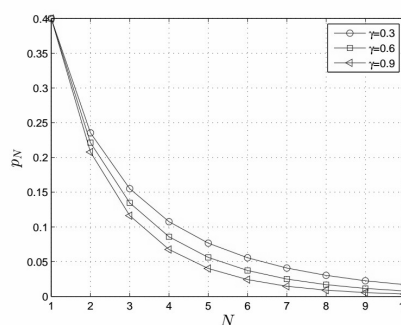


图 4 p_B 随 N 的变化曲线

对 β 的以上三种取值, 一个到达的顾客发现系统忙的概率 p_B 随 N 变化情况见图4. 由图可以看出, p_B 随着系统容量 N 的增加而递增. 因 N 越大, 到达的顾客越有可能进入系统, 一个顾客到达时就越有可能发现系统处于忙期. 另外, 由图还可以看出, 对相同的 N , 选择进入的概率越大, p_B 也越大.

在第三个例子中, 设参数取值为 $\lambda = 2, a = 3, c = 6$. 取 $N = 1, 2, \dots, 10$. 并令选择概率具有形式 $u_n = (\cos \frac{n\pi}{2N})^\gamma$, 其中 $\gamma \in (0, 1)$ 且其值越接近1, u_n 随 n 递减速度越快, 对 $\gamma = 0.3, 0.6, 0.9$ 的情形, 参见图5.

图 5 u_n 随 γ 的变化曲线图 6 p_N 随 N 的变化曲线

对 γ 的三种取值, 溢出概率 p_N 随 N 的变化情形参见图6. 由图可看出, p_N 随着 N 的增加而递减. 同时, 还可看出, 对固定的 N , 溢出概率 p_N 随着选择进入概率的增大而增大. 这显然都符合实际情况.

§6 小结

本文讨论了到达率可变的有限M/T-SPH/1/N排队的平稳队长分布的计算问题. 对建立的QBD过程模型首先采用谱展开方法进行分析, 不但得到了排队系统平稳队长分布的结果, 还得到了QBD过程经典的矩阵几何解. 最后, 还给出了几个具体数值例子以说明参数变化对排队系统性能指标的影响.

在所得结论的基础上, 进一步讨论其它性能指标, 如等待时间或忙期分布, 或讨论排队系统性能优化问题等, 是值得进一步考虑的问题.

参考文献:

- [1] Neuts M F. Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach[M]. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [2] Latouche G, Ramaswami V. Introduction to Matrix-analytic Methods in Stochastic Modeling[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1999.
- [3] Shi Dinghua, Guo Jinli, Liu Liming. SPH-distributions and the rectangle-iterative algorithm[C]. In: Matrix-analysis methods in stochastic models. Chakravarty and Alfa (eds.), New York: Marcel Decker, p207-224, 1997.

- [4] Shi Dinghua, Guo Jinli, Liu Liming. On the SPH-distribution class[J]. Acta Mathematica Scientia, Series B, 2005, 25: 201-214.
- [5] Alfa A S. Discrete time queues and matrix-analytic methods[J]. TOP, 2002, 10: 147-210.
- [6] Zhang Hongbo, Shi Dinghua. Analysis of two queueing models with explicit rate operators and stationary distributions[J]. International Journal of Information and Management Sciences, 2011, 22: 177-188.
- [7] Zhang Hongbo, Shi Dinghua, Hou Zhenting. Explicit solution for queue length distribution of M/T-SPH/1 queue[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2014, 31: 1450001.
- [8] Mitrani I, Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method[J]. Performance Evaluation, 1995, 23: 241-260.
- [9] Drekić S, Grassmann W K. An Eigenvalue approach to analyzing a finite source priority queueing model[J]. Annals of Operations Research, 2002, 112: 139-152.
- [10] Drekić S, Grassmann W K. A preemptive priority queue with balking[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164: 387-401.
- [11] Grassmann W K, Drekić S. An analytical solution for a tandem queue with blocking[J]. Queueing Systems, 2000, 36: 221-235.
- [12] Grassmann W K, Drekić S. A tandem queue with movable servers: an eigenvalue approach[J]. SIAM Journal on Matrix analysis and Applications, 2002, 24: 465-474.
- [13] Zhang Hongbo, Zhou Gaojun. M/M/1 queue with m kinds of differentiated working vacations[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2017, 54: 213-227.
- [14] Bhat U N. An Introduction to Queueing Theory[M]. Boston: Birkhäuser, 2008.
- [15] Gohberg P, Lancaster P, Rodman L. Matrix Polynomials[M]. New York: Academic Press, 1982.

An spectral expansion approach to analyzing a finite queue with variable arrival rate

ZHANG Hong-bo^{1,2}, ZHOU Gao-jun¹

- (1. School of Statistics and Mathematics, Henan Finance University, Zhengzhou 450046, China;
- 2. Digital Technology School, Sias University, Zhengzhou 450003, China)

Abstract: A finite M/T-SPH/1/N queueing model with variable arrival rate is analyzed, where T-SPH denotes the infinite phase type distribution defined on a birth and death process with countably many states. For an arriving customer the probability he decides join the queue depends on the number of customers present in the system. For the queueing system, the established QBD process model can be analyzed by the method of generalized eigenvalues. Using this method, the expression of stationary queue length distribution of the queue is given. Furthermore, the obtained results enable us to give the matrix-geometric solution of the QBD process. Finally, several numerical examples are also presented to illustrate the impact of parameters on performance indexes of the queueing system.

Keywords: the M/T-SPH/1/N queue; finite queue; QBD process; spectral expansion method; matrix-geometric solution

MR Subject Classification: 60E05; 30E15