

改造的Catmull-Rom插值基函数及其逼近性质

刘 星, 章仁江

(浙江工商大学 统计与数学学院, 浙江杭州 310018)

摘 要: 此文利用多项式再生性和局部支撑性对著名的Catmull-Rom插值基函数进行改造, 获得新的插值基函数, 生成新的插值算子, 并求得新插值算子精确的Lebesgue常数, 估计了其逼近连续函数的收敛速度, 理论和数值例子都表明新插值算子的逼近效果优于其他各类插值算子.

关键词: 插值; 连续模; 逼近误差; Lebesgue常数; 基函数

中图分类号: O174

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2024)04-0391-13

§1 引 言

插值算子是函数逼近论的核心研究内容^[1-2], 在几何设计中有重要应用^[3-5]. 已有许多构造插值算子的方法, 如多项式插值算子(Lagrange插值)^[1-3], Shepard插值算子^[6], 重心有理插值算子^[7-10]等等. Lagrange插值在端点附近的插值曲线会产生剧烈的振荡, 即存在Runge现象; Lagrange插值算子的Lebesgue常数随着插值节点 n 的增加是趋于无穷大的^[1]. Shepard插值算子和重心有理插值算子都不能对插值曲线进行局部调整, 且随着插值节点 n 的增加, 它们的计算量会大增^[6-10]. 重心有理插值算子的逼近效果比Shepard插值算子好, 如Berrut的插值算子^[7], Folater-Hormann(F-H)插值算子^[9]和文献[10]的插值算子, 它们都不会出现Runge现象, F-H插值算子对高阶连续的曲线有很高的逼近精度. Berrut的插值算子和F-H插值算子的Lebesgue常数都随着插值节点 n 的增加呈对数形式增长^[11-13], 这意味着它们插值逼近某些连续函数可能不收敛; 插值算子^[10]的Lebesgue常数是有限的正常数. 细分插值的插值基函数没有具体的表达式, 对于非封闭的插值数据点列需要添加辅助点^[14]. 平移基函数插值算子^[15-18]能对插值曲线进行局部调整; Catmull-Rom插值基函数^[18]是由 $m-1$ 次B-样条基函数和 m 次Lagrange插值基函数组成的 $2m-1$ 次的分段多项式, 将其平移可得一组插值基函数, 但它同样需要添加辅助点, 辅助点的选取对首尾两端点的插值曲线段有较大的影响; 若没有辅助点, 首尾两端点间的插值曲线波动较大, 同时也不好比较与其他各类插值算子之间的逼近误差和估计插值算子的收敛速度, 这些都是该类插值算子的不足. 章仁江等人^[19]利用二次多项式精确性对文献[16]中的基函数进行改造, 获

得了两个不同连续性和支撑区间的插值算子, 对于非封闭的插值点列, 这类插值算子不需要添加辅助点.

针对平移基函数插值算子存在的不足, 本文对Catmull-Rom插值基函数进行改造, 新的插值基函数不仅保留了Catmull-Rom插值基函数的所有优点, 而且新的插值算子能避免原插值算子和上述其他插值算子的缺点. 新插值算子的Lebesgue常数恒为一个正常数, 其逼近任何连续函数都是收敛于该函数的, 有很好的稳定性. 数值例子也表明, 逼近连续函数时, 本文的插值算子比Berrut的插值算子和文献[10]的插值算子具有更高的逼近精度; 对于高阶连续的函数, 本文的插值算子和F-H插值算子的逼近精度差不多, 但F-H插值算子只有权性, 不具有多项式再生性与局部支撑性等性质. 综上所述, 本文改造后的Catmull-Rom插值基函数列有很好的逼近效果, 因此它有一定的应用价值.

§2 预备知识

本节介绍一些关于B-样条基函数, Lagrange插值基函数以及Catmull-Rom插值基函数的基本概念.

设 t_i 是节点, U 为节点矢量, 给定任意节点矢量 $U = \{t_i\}$, 且节点满足 $t_i \leq t_{i+1}$. 用 $N_{i,p}(t)$ 表示第 i 个 p 次的B-样条基函数, 则 $N_{i,p}(t)$ 可用de Boor-Cox公式进行递归计算^[3]. 定义

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

递归公式为

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t), \quad p \geq 1. \quad (2.1)$$

给定 $n+1$ 个有序插值数据点 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 以及互不相等的插值节点 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 存在唯一的 n 次插值多项式^[3]

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t|t_0, \dots, t_n) P_i, \quad (2.2)$$

其中 $L_0^n(t|t_0, \dots, t_n), L_1^n(t|t_0, \dots, t_n), \dots, L_n^n(t|t_0, \dots, t_n)$ 为 n 次的Lagrange插值基函数, 满足插值条件 $P_n(t_i) = P_i, i = 0, 1, \dots, n$, 其表达式为^[3]

$$L_i^n(t|t_0, \dots, t_n) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

满足

$$L_i^n(t_j|t_0, \dots, t_n) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.4)$$

Catmull和Rom^[18]提出将B-样条基函数和Lagrange插值基函数结合在一起得到Catmull-Rom插值基函数

$$\varphi_{2m-1}(t) = \sum_{j=0}^m N_{-j,m-1}(t) L_j^m(t|t_{-j}, \dots, t_{-j+m}), \quad m \geq 2. \quad (2.5)$$

这里 t_j 为均匀节点, 且满足 $t_{j+1} - t_j = 1 (t_j \text{ 为整数})$. 将 $\varphi_{2m-1}(t)$ 向右平移 i 个单位得 $\varphi_{2m-1}(t-i)$, 记 $\varphi_{i,2m-1}(t) = \varphi_{2m-1}(t-i)$, 得Catmull-Rom插值基函数列

$$\{\dots, \varphi_{0,2m-1}(t), \varphi_{1,2m-1}(t), \varphi_{2,2m-1}(t), \dots, \varphi_{n,2m-1}(t), \dots\}. \quad (2.6)$$

Catmull-Rom插值基函数列 $\varphi_{i,2m-1}(t)$ 具有如下性质.

- (i) $\varphi_{i,2m-1}(t)$ 具有 C^{m-1} 阶连续性;
- (ii) 局部支撑性, 即 $\varphi_{i,2m-1}(t)$ 在区间 $(-m+i, m+i)$ 外恒等于零;
- (iii) m 次多项式再生性, 即 $\sum i^a \varphi_{i,2m-1}(t) = \sum i^a \varphi_{2m-1}(t-i) = t^a, a = 0, 1, \dots, m$;
- (iv) 插值性, 即

$$\varphi_{i,2m-1}(j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

设给定 $n+1$ 个有序数据点 $P_i \in \mathbf{R}^d (i = 0, 1, \dots, n)$, 维数 $d \geq 1$, 则由 Catmull-Rom 插值基函数列构造插值该数据点的曲线方程为

$$P(t) = \sum_{i=-m+1}^{n+m-1} P_i \varphi_{i,2m-1}(t) = \sum_{i=-m+1}^{n+m-1} P_i \varphi_{2m-1}(t-i), \quad t \in [0, n], \quad (2.7)$$

其中 $P_{-m+1}, \dots, P_{-1}$ 与 $P_{n+1}, \dots, P_{n+m-1}$ 称为辅助点^[15-16], 其作用是调节首尾两端点附近的曲线形状, 辅助点的选取具有主观因素和不确定性; 而无辅助点时, 首尾两端点间的插值曲线波动大, 同时无法比较与其他插值算子的逼近误差和估计插值算子的收敛速度.

设给定控制阵列 $\{P_{i,j}\}$, 那么插值控制阵列 $\{P_{i,j}\}$ 的 $(2m-1, 2n-1)$ 次张量积 Catmull-Rom 曲面可写为

$$P(u, v) = \sum_i \sum_j P_{i,j} \varphi_{2m-1,i}(u) \varphi_{2n-1,j}(v). \quad (2.8)$$

其中 $\varphi_{2m-1,i}(u), \varphi_{2n-1,j}(v)$ 是张量积 Catmull-Rom 插值基函数, 控制阵列 $\{P_{i,j}\}$ 构成了张量积 Catmull-Rom 曲面的控制网格.

本文利用多项式再生性和局部支撑性对 Catmull-Rom 插值基函数进行改造, 获得了新的 $n+1$ 个插值基函数, 生成的新插值算子不需要添加辅助点. 获得新插值算子的精确的 Lebesgue 常数, 并估计了新插值算子的收敛速度; 最后将其与各种类型的重心有理插值算子作比较, 数值例子表明新插值算子有更好的逼近效果.

§3 新插值基函数的改造

3.1 新插值基函数的构造

本节对一般的 Catmull-Rom 插值基函数进行改造, 获得新的 $n+1$ 个插值基函数. 设新的 $n+1$ 个插值基函数为 $\{\bar{\varphi}_{0,2m-1}(t), \dots, \bar{\varphi}_{m,2m-1}(t), \bar{\varphi}_{m+1,2m-1}(t), \dots, \bar{\varphi}_{n-m-1,2m-1}(t), \bar{\varphi}_{n-m,2m-1}(t), \dots, \bar{\varphi}_{n,2m-1}(t)\}$, 为获得新插值基函数, 令 (2.7) 式中插值曲线

$$\sum_{i=-m+1}^{n+m-1} P_i \varphi_{2m-1}(t-i) = \sum_{i=0}^n P_i \bar{\varphi}_{i,2m-1}(t), \quad t \in [0, n]. \quad (3.1)$$

这里 $n \geq 2m+2$. 由 Catmull-Rom 插值基函数列的局部支撑性可知, 只需对上面插值基函数列中的前 $m+1$ 个和后 $m+1$ 个基函数进行改造, 中间的 $n-2m-1$ 个基函数是原来的平移基函数, 即

$$\bar{\varphi}_{i,2m-1}(t) = \varphi_{i,2m-1}(t) = \varphi_{2m-1}(t-i), \quad i = m+1, \dots, n-m-1, \quad t \in [0, n]. \quad (3.2)$$

为确定新插值基函数列中的前 $m+1$ 个和后 $m+1$ 个基函数 $\bar{\varphi}_i(t) (i = 0, 1, \dots, m, n-m, \dots, n-1, n)$, 令左右两边的辅助点 $P_i (i = -m+1, \dots, -1, n+1, \dots, n+m-1)$ 仅与临近的 $m+1$ 个已知插值点 $P_i (i = 0, 1, \dots, m, n-m, \dots, n-1, n)$ 线性相关(这样取辅助点是为了保

证新插值基函数列也具有 m 次多项式再生性). 以左边为例, 即 $P_i(i = -m+1, \dots, -1)$ 与 $P_i(i = 0, 1, \dots, m)$ 有如下关系(右边可由对称性得)

$$\begin{bmatrix} P_{-1} \\ P_{-2} \\ \vdots \\ P_{-m+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - k_{11} - \dots - k_{1m} & k_{11} & \dots & k_{1m} \\ 1 - k_{21} - \dots - k_{2m} & k_{21} & \dots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - k_{m-11} - \dots - k_{m-1m} & k_{m-11} & \dots & k_{m-1m} \end{bmatrix}.$$

根据 $\varphi_{2m-1}(t-i)$ 的局部支撑性, 当 $t \in [q, q+1)$, $q = 0, 1, \dots, 2m-1$ 时, 由(3.1)式可得

$$\begin{cases} \sum_{i=-m+1+q}^{m+q} P_i \varphi_{2m-1}(t-i) = \sum_{i=0}^{m+q} P_i \bar{\varphi}_{i,2m-1}(t), & q = 0, 1, \dots, m-2; \\ \sum_{i=q-m+1}^{q+m} P_i \varphi_{2m-1}(t-i) = \sum_{i=q-m+1}^{q+m} P_i \bar{\varphi}_{i,2m-1}(t), & q = m-1, \dots, 2m-1. \end{cases} \quad (3.4)$$

为了确定辅助点与已知插值点的关系, 试着令新的插值基函数列 $\bar{\varphi}_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n$)也具有 m 次多项式再生性, 因此从多项式基 t^a ($a = 0, 1, 2, \dots, m$)上取点列 $P_i = i^a$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). 当 $t \in [q, q+1)$, $q = 0, 1, \dots, 2m-1$ 时, 将点列 $P_i = i^a$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)代入(3.4)式得

$$\begin{cases} \sum_{i=-m+1+q}^{m+q} P_i \varphi_{2m-1}(t-i) = \sum_{i=0}^{m+q} i^a \bar{\varphi}_{i,2m-1}(t) = t^a, & q = 0, 1, \dots, m-2; \\ \sum_{i=q-m+1}^{q+m} i^a \varphi_{2m-1}(t-i) = \sum_{i=q-m+1}^{q+m} i^a \bar{\varphi}_{i,2m-1}(t) = t^a, & q = m-1, \dots, 2m-1. \end{cases} \quad (3.5)$$

再将(3.3)式代入上式整理得

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ (-i)^2 \\ \vdots \\ (-i)^m \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.6)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^m & 3^m & \dots & m^m \end{bmatrix}.$$

这里 $\mathbf{B}$ 为Vandermonde矩阵, 因此 $|\mathbf{B}| \neq 0$, 从而对每一个 i ($i = 1, 2, \dots, m-1$), (3.6)式存在唯一解, 再将解

$$(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

代入(3.3)式可得辅助点 P_i ($i = -1, -2, \dots, -m+1$)与临近的 $m+1$ 个已知插值点 P_i ($i =$

$0, 1, \dots, m$)的关系, 再根据(3.5)式可得 $\bar{\varphi}_{i,2m-1}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, m$)的表达式为

$$\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{0,2m-1}(t) \\ \bar{\varphi}_{1,2m-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{m,2m-1}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\top \begin{bmatrix} \varphi_{2m-1}(t+1) \\ \varphi_{2m-1}(t+2) \\ \vdots \\ \varphi_{2m-1}(t+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{2m-1}(t) \\ \varphi_{2m-1}(t-1) \\ \vdots \\ \varphi_{2m-1}(t-m) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, n]. \quad (3.7)$$

最后可由对称性可得出 $\bar{\varphi}_{i,2m-1}(t)$ ($i = n-m, \dots, n-1, n$)的表达式为

$$\begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{n-m,2m-1}(t) \\ \bar{\varphi}_{n-m+1,2m-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{n,2m-1}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \varphi_{2m-1}(t-n-1) \\ \varphi_{2m-1}(t-n-2) \\ \vdots \\ \varphi_{2m-1}(t-n-m+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{2m-1}(t-n+m) \\ \varphi_{2m-1}(t-n+m-1) \\ \vdots \\ \varphi_{2m-1}(t-n) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, n]. \quad (3.8)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_{1m} & k_{1m-1} & \cdots & k_{11} & 1 - k_{11} - \cdots - k_{1m} \\ k_{2m} & k_{2m-1} & \cdots & k_{21} & 1 - k_{21} - \cdots - k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{m-1m} & k_{m-1m-1} & \cdots & k_{m-11} & 1 - k_{m-11} - \cdots - k_{m-1m} \end{bmatrix}^\top.$$

所以改造后的 $n+1$ 个插值基函数可表示为 $\{\bar{\varphi}_{0,2m-1}(t), \dots, \bar{\varphi}_{m,2m-1}(t), \varphi_{m+1,2m-1}(t), \dots, \varphi_{n-m-1,2m-1}(t), \bar{\varphi}_{n-m,2m-1}(t), \dots, \bar{\varphi}_{n,2m-1}(t)\}$. 新插值基函数列 $\{\bar{\varphi}_{i,2m-1}(t), i = 0, 1, \dots, n\}$ 具有 C^{m-1} 阶连续性、 m 次多项式再生性、局部支撑性等性质.

3.2 改进的五次Catmull-Rom插值基函数

由于三次Catmull-Rom插值基函数的改造已在文献[19]中由其他方法给出, 这里给出改造后的五次Catmull-Rom插值基函数列的具体表达式. 由于计算比较繁琐, 其他更高次的从略.

五次Catmull-Rom插值基函数 $\varphi_5(t)$ 的表达式为

$$\varphi_5(t) = \begin{cases} \frac{9}{2} + \frac{45}{4}t + \frac{21}{2}t^2 + \frac{14}{3}t^3 + t^4 + \frac{1}{12}t^5, & t \in [-3, -2]; \\ \frac{1}{2} - \frac{11}{4}t - \frac{17}{2}t^2 - \frac{47}{6}t^3 - 3t^4 - \frac{5}{12}t^5, & t \in [-2, -1]; \\ 1 - 2t^2 + \frac{1}{6}t^3 + 2t^4 + \frac{5}{6}t^5, & t \in [-1, 0]; \\ 1 - 2t^2 - \frac{1}{6}t^3 + 2t^4 - \frac{5}{6}t^5, & t \in [0, 1]; \\ \frac{1}{2} + \frac{11}{4}t - \frac{17}{2}t^2 + \frac{47}{6}t^3 - 3t^4 + \frac{5}{12}t^5, & t \in [1, 2]; \\ \frac{9}{2} - \frac{45}{4}t + \frac{21}{2}t^2 - \frac{14}{3}t^3 + t^4 - \frac{1}{12}t^5, & t \in [2, 3]; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

此时 $m = 3$. 根据前面的构造过程, 由(3.6)式得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ (-i)^2 \\ (-i)^3 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (3.9)$$

从而可得

$$\begin{cases} k_{11} = -6, & k_{12} = 4, & k_{13} = -1; \\ k_{21} = -20, & k_{22} = 15, & k_{23} = -4. \end{cases} \quad (3.10)$$

将(3.10)式代入(3.3)式可得辅助点与已知插值节点的关系为

$$\begin{cases} P_{-1} = 4P_0 - 6P_1 + 4P_2 - P_3, \\ P_{-2} = 10P_0 - 20P_1 + 15P_2 - 4P_3. \end{cases} \quad (3.11)$$

最后由(3.2), (3.7)-(3.8)式可得新的五次Catmull-Rom插值基函数 $\bar{\varphi}_{i,5}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$ 的表达式分别为

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{0,5}(t) = 4\varphi_5(t+1) + 10\varphi_5(t+2) + \varphi_5(t), \\ \bar{\varphi}_{1,5}(t) = -6\varphi_5(t+1) - 20\varphi_5(t+2) + \varphi_5(t-1), & t \in [0, n]; \\ \bar{\varphi}_{2,5}(t) = 4\varphi_5(t+1) + 15\varphi_5(t+2) + \varphi_5(t-2), \\ \bar{\varphi}_{3,5}(t) = -\varphi_5(t+1) - 4\varphi_5(t+2) + \varphi_5(t-3), \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\bar{\varphi}_{i,5}(t) = \varphi_{i,5}(t) = \varphi_5(t-i), \quad i = 4, 5, \dots, n-4, \quad t \in [0, n]; \quad (3.13)$$

以及

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{n-3,5}(t) = -\varphi_5(t-n-1) - 4\varphi_5(t-n-2) + \varphi_5(t-n+3), \\ \bar{\varphi}_{n-2,5}(t) = 4\varphi_5(t-n-1) + 15\varphi_5(t-n-2) + \varphi_5(t-n+2), & t \in [0, n]. \\ \bar{\varphi}_{n-1,5}(t) = -6\varphi_5(t-n-1) - 20\varphi_5(t-n-2) + \varphi_5(t-n+1), \\ \bar{\varphi}_{n,5}(t) = 4\varphi_5(t-n-1) + 10\varphi_5(t-n-2) + \varphi_5(t-n), \end{cases} \quad (3.14)$$

这样得到新的五次Catmull-Rom插值基函数列

$\{\bar{\varphi}_{0,5}(t), \bar{\varphi}_{1,5}(t), \bar{\varphi}_{2,5}(t), \bar{\varphi}_{3,5}(t), \bar{\varphi}_{4,5}(t), \dots, \bar{\varphi}_{n-4,5}(t), \bar{\varphi}_{n-3,5}(t), \bar{\varphi}_{n-2,5}(t), \bar{\varphi}_{n-1,5}(t), \bar{\varphi}_{n,5}(t)\}$.
新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\{\bar{\varphi}_{i,5}(t), i = 0, 1, \dots, n\}$ 的图像如图1所示.

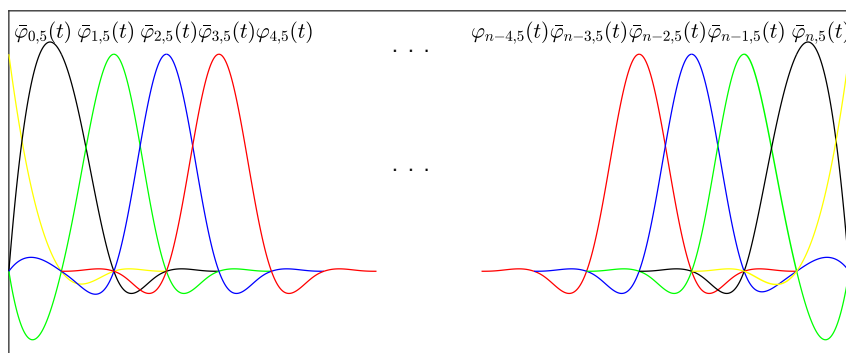


图 1 新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 图

§4 新插值算子的逼近性质

在本节主要研究新的五次Catmull-Rom插值算子的Lebesgue常数和估计其逼近连续函数的收敛速度. 下面将说明新插值算子具有精确的Lebesgue常数, 这说明新插值算子具有很好的稳定性, 比前面很多插值算子的Lebesgue常数一般为 $O(\ln n)$ 有较大的改进.

4.1 新插值算子的Lebesgue常数

本小节研究新插值算子的Lebesgue常数, Lebesgue常数能反映插值算子的稳定性.

设 $f(t)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 给定插值节点 $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, 其满足 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $b_i(t)$ 表示插值基函数, 则插值算子为

$$L_n(f, t) = \sum_{i=0}^n f(t_i) b_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

满足插值条件 $L_n(f, t_i) = \sum_{i=0}^n f(t_i) b_i(t_i) = f(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. 该插值算子的Lebesgue常数为

$$\|L_n\| = \max_{a \leq t \leq b} L_n(t), \quad (4.2)$$

其中 $L_n(t) = \sum_{i=0}^n |b_i(t)|$ 为插值节点 $t_0, t_1, \dots, t_n$ 上的Lebesgue函数^[1].

当插值节点 t_i 为等距时, 由新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\{\bar{\varphi}_{i,5}(t), i = 0, \dots, n\}$ 生成的插值算子的Lebesgue常数和Lebesgue函数分别为

$$\|L_n\| = \max_{a \leq t \leq b} \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(t)|, \quad L_n(t) = \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(t)|. \quad (4.3)$$

于是有

定理4.1 新插值算子 $L_n(f, t)$ 的Lebesgue常数为

$$\|L_n\| = \frac{7 + 14\sqrt{7}}{27}, \quad n \geq 8.$$

证 取插值区间 $[a, b] = [0, 1]$, 插值节点 $t_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 此时 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 变为 $\bar{\varphi}_{i,5}(nt)$. $\forall k$, 当 $t = t_k$, 由插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(nt)$ 的插值性可得 $L_n(t) = 1$. 对某一个 k , 令 $t_k < t < t_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), 将这一区间上的Lebesgue函数记为 $L_{n,k}(t)$, 即

$$L_{n,k}(t) := L_n(t) = \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)|, \quad t_k < t < t_{k+1}.$$

当 $t \in (t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), 由插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(nt)$ 的局部支撑性和对称性可知, $L_{n,k}(t)$ 的和式中至多出现6个相邻的插值基函数且只需计算 $L_{n,k}(t)$ ($k = 0, 1, 2$)即可. 因此有如下的三种情况.

(1) 当 $k = 0$ 时, $0 < t < \frac{1}{n}$, 此时

$$\begin{aligned} L_{n,0}(t) &= \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \sum_{i=0}^3 |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \\ &= \bar{\varphi}_{0,5}(nt) + \bar{\varphi}_{1,5}(nt) + \bar{\varphi}_{2,5}(nt) + \bar{\varphi}_{3,5}(nt) = \\ &= (nt)^3 - 4(nt)^2 + 3nt + 1; \end{aligned}$$

(2) 当 $k = 1$ 时, $\frac{1}{n} < t < \frac{2}{n}$, 此时

$$\begin{aligned} L_{n,1}(t) &= \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \sum_{i=0}^4 |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \\ &= \bar{\varphi}_{0,5}(nt) + \bar{\varphi}_{1,5}(nt) + \bar{\varphi}_{2,5}(nt) + \bar{\varphi}_{3,5}(nt) + \bar{\varphi}_{4,5}(nt) = \\ &= \frac{1}{2} \left[-8 + 29nt - 36(nt)^2 + 24(nt)^3 - 8(nt)^4 + (nt)^5 \right]; \end{aligned}$$

(3) 当 $k = 2$ 时, $\frac{2}{n} < t < \frac{3}{n}$, 此时

$$L_{n,2}(t) = \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \sum_{i=0}^5 |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| =$$

$$\bar{\varphi}_{0,5}(nt) - \bar{\varphi}_{1,5}(nt) + \bar{\varphi}_{2,5}(nt) + \bar{\varphi}_{3,5}(nt) - \bar{\varphi}_{4,5}(nt) + \bar{\varphi}_{5,5}(nt) =$$

$$\frac{1}{2} \left[-52 + 75nt - 40(nt)^2 + 10(nt)^3 - (nt)^4 \right];$$

为了便于比较, 将上述所有的区间 $(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ ($k = 0, 1, 2$) 都平移到区间 $(0, \frac{1}{n})$ 上, 变量 $u = t - \frac{k}{n}$ 仍记为 t 得

$$L_{n,k}(t) = \begin{cases} 1 + 3nt - 4(nt)^2 + (nt)^3, & k = 0; \\ 1 + nt - (nt)^2 + (nt)^3 - \frac{3(nt)^4}{2} + \frac{(nt)^5}{2}, & k = 1; \\ 1 + \frac{3nt}{2} - 2(nt)^2 + (nt)^3 - \frac{(nt)^4}{2}, & k = 2. \end{cases}$$

因为 $0 < t < \frac{1}{n}$, 所以有

$$\begin{cases} L_{n,0}(t) - L_{n,1}(t) = -\frac{nt}{2}(nt-2)(nt-1)((nt)^2-2) > 0, \\ L_{n,0}(t) - L_{n,2}(t) = \frac{nt}{2}(nt-1)(-3+nt+(nt)^2) > 0. \end{cases}$$

由上式可知, $L_n(t)$ 的最大值在 $L_{n,0}(t)$ 上取得, 即 $L_n(t) = L_{n,0}(t)$. 易得此时 $L_n(t)$ 的导数为

$$L'_n(t) = L'_{n,0}(t) = 3n \left[(nt)^2 - \frac{8}{3}nt + 1 \right] = 3n \left[nt - \frac{4-\sqrt{7}}{3} \right] \left[nt - \frac{4+\sqrt{7}}{3} \right], \quad t \in \left(0, \frac{1}{n} \right).$$

因此当 $t \in \left(0, \frac{4-\sqrt{7}}{3n} \right]$ 时, $L'_n(t) \geq 0$; $t \in \left[\frac{4-\sqrt{7}}{3n}, \frac{1}{n} \right)$ 时, $L'_n(t) \leq 0$. 所以当 $t = \frac{4-\sqrt{7}}{3n}$ 时, $L_n(t)$ 取得最大值, 即

$$\|L_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} L_n(t) = L_n \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3n} \right) = \frac{7+14\sqrt{7}}{27}. \quad (4.4)$$

当插值节点 $n = 20$ 时, 新插值算子 $L_n(f, t)$ 的 Lebesgue 函数如图 2 所示.

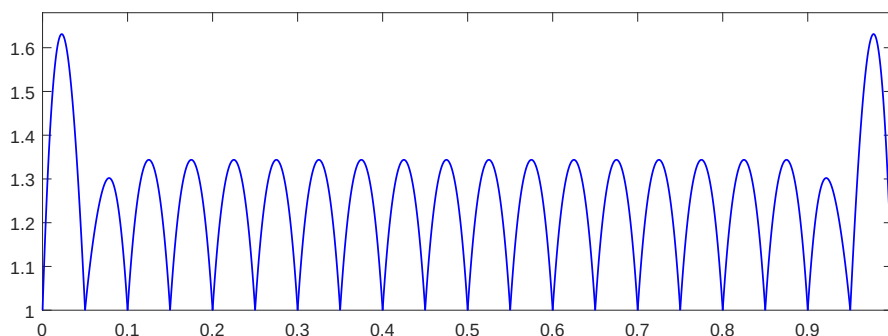


图 2 当 $n = 20$ 时, 新插值算子 $L_n(f, t)$ 的 Lebesgue 函数图

4.2 新插值算子的逼近误差

本小节对新插值算子 $L_n(f, t)$ 逼近连续函数的收敛速度进行研究. 设 $f(t)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 对于 $h > 0$, 称

$$\omega(h) = \omega(f, h) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leq h \\ t_1, t_2 \in [a, b]}} |f(t_1) - f(t_2)|$$

为 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上的连续模. 这样有

定理4.2 设 $f(t)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 插值节点 $t_i = \frac{i}{n} (i = 0, 1, \dots, n)$, 则对新插值算子 $L_n(f, t)$ 有

$$|L_n(f, t) - f(t)| < \frac{43}{10} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 8.$$

证 假设 t 离 $t_k (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 较近, 则

$$|t - t_i| \leq |t - t_k| + |t_k - t_i| \leq \frac{1}{2n} + \frac{|k - i|}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + |k - i| \right), \quad (4.5)$$

以及连续模的性质

$$\omega(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega(h), \quad \lambda > 0. \quad (4.6)$$

根据插值算子的性质和上式得

$$\begin{aligned} |L_n(f, t) - f(t)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f(t) - f(t_i)) \bar{\varphi}_{i,5}(nt) \right| \leq \\ &\sum_{i=0}^n |f(t) - f(t_i)| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| \leq \\ &\sum_{i=0}^n \omega\left(f, \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + |k - i| \right)\right) |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

再由(4.4)和(4.7)式得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n \omega\left(f, \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + |k - i| \right)\right) |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| \leq \\ &\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \sum_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2} + |k - i| \right) |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \\ &\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \left[\frac{3}{2} \sum_{i=0}^n |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| + \sum_{i=0}^n |k - i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| \right] \leq \\ &\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \left[\frac{7 + 14\sqrt{7}}{18} + \sum_{i=0}^n |k - i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

现在估计 $\sum_{i=0}^n |k - i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 的最大值. 由于

$$\sum_{i=0}^n |k - i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \sum_{i=0}^{k-1} (k - i) |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| + \sum_{i=k+1}^n (i - k) |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)|, \quad t_k < t < t_{k+1}. \quad (4.9)$$

根据插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(nt)$ 的性质知 $\sum_{i=0}^n |k - i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)|$ 的和式在区间 (t_k, t_{k+1}) 上至多出现5个相邻的插值基函数. 与定理4.1的计算类似, 最后将所有的区间 $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 都平

移到区间 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 上, 变量 $u = t - \frac{k}{n}$ 仍记为 t 得

$$\sum_{i=0}^n |k-i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = \begin{cases} 7nt - 8(nt)^2 + 2(nt)^3, & k=0; \\ \frac{nt}{3} (5 + 6(nt)^2 - 12(nt)^3 + 4(nt)^4), & k=1, 2, \dots, n-3; \\ \frac{1}{3} (5nt - 2(nt)^3), & k=n-2, n-1. \end{cases} \quad (4.10)$$

由上式容易比较得出 $\sum_{i=0}^n |k-i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)|$ 在 $k=0$ 时取得最大值, 令

$$\sum_{i=0}^n |0-i| |\bar{\varphi}_{i,5}(nt)| = 7nt - 8(nt)^2 + 2(nt)^3 := h(t), \quad t \in \left(0, \frac{1}{n}\right). \quad (4.11)$$

$h(t)$ 的一阶导数为

$$h'(t) = 6n(nt)^2 - 16n^2t + 7n = 6n \left[nt - \frac{1}{6} (8 - \sqrt{22}) \right] \left[nt - \frac{1}{6} (8 + \sqrt{22}) \right]. \quad (4.12)$$

当 $t \in \left(0, \frac{8-\sqrt{22}}{6n}\right]$ 时, $h'(t) \geq 0$; 当 $t \in \left[\frac{8-\sqrt{22}}{6n}, \frac{1}{n}\right)$ 时, $h'(t) \leq 0$. 所以当 $t = \frac{8-\sqrt{22}}{6n}$ 时, $h(t)$ 取得最大值. 即

$$h(t) \leq h\left(\frac{8-\sqrt{22}}{6n}\right) = \frac{11\sqrt{22}-4}{27}. \quad (4.13)$$

最后由(4.8)和(4.13)两式得

$$\left| L_n(f, t) - f(t) \right| \leq \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \left[\frac{7+14\sqrt{7}}{18} + \frac{11\sqrt{22}-4}{27} \right] < \frac{43}{10} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right). \quad (4.14)$$

§5 数值例子

本节将展现新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 在构造插值曲线、曲面时的便捷性、快速性, 比较本文的插值算子和三种重心有理插值算子逼近连续函数时的逼近精度.

例1 用新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 来构造极坐标插值曲线, 三叶草形的极坐标方程为

$$r(\theta) = 4 \left(1 + \cos(3\theta) + 3 \sin(3\theta)^2 \right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

从原点开始, 在三叶草曲线上均匀的采取41个数据点作为插值节点, 由新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 构造出如图3所示的三叶草形的插值曲线, 其中小圆点为插值节点. 这种方法构造插值曲线编程简单且耗时少.

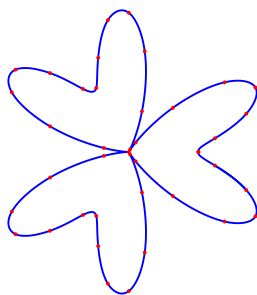


图 3 新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 插值三叶草形曲线图

例2 用新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 重建墨西哥草帽曲面, 其表达式为

$$z = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \in [-8, 8] \times [-8, 8].$$

从原点开始, 在曲面上均匀地选取321个数据点作为插值节点, 根据(2.8)式曲面的张量积公式, 用本文的插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 来插值墨西哥草帽曲面, 图4左边是墨西哥草帽的原始曲面、右边是用新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 插值重建的墨西哥草帽曲面.



图 4 新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 插值重建墨西哥草帽曲面, 左边原始墨西哥草帽曲面, 右边新的五次Catmull-Rom插值基函数列 $\bar{\varphi}_{i,5}(t)$ 插值重建墨西哥草帽曲面图

本文还比较了本文的插值算子与三种重心有理插值算子逼近连续函数时的逼近精度. 插值区间 $[a, b] = [-5, 5]$, 插值节点 $t_i = -5 + \frac{10i}{n} (i = 0, 1, \dots, n)$. 在本文中, 用如下的误差表达式

$$e = \max_{t \in [a, b]} \left| \sum_{i=0}^n f(t_i) b_i(t) - f(t) \right| \quad (5.1)$$

来度量插值算子逼近连续函数的优劣.

例3 运用(5.1)式比较了本文的插值算子, Berrut和文献[10]的插值算子在不同插值节点数下逼近Runge函数 $f(t) = \frac{1}{1+t^2} (t \in [-5, 5])$ 的逼近精度. 图5是当 n 为不同的插值节点数, 本文的插值算子逼近 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的效果图. 表1是在不同的插值节点下, 本文的插值算子, Berrut的插值算子以及文献[10]的插值算子逼近 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Runge函数)的逼近精度. 结果表明, 本文的插值算子不会出现Runge现象, 且随着插值节点数 n 的增加, 本文的插值算子逼近精度明显的优于其他两种插值算子的逼近精度.

表1 本文的插值算子与其他两种插值算子逼近 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Runge函数)的误差比较

插值节点数	$n = 10$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 640$
e_1 (文献[10])	8.21×10^{-2}	2.39×10^{-2}	1.92×10^{-2}	9.54×10^{-3}	1.48×10^{-3}
e_2 (Berrut's)	3.61×10^{-2}	1.44×10^{-3}	1.17×10^{-3}	6.00×10^{-4}	9.53×10^{-5}
e_3 (本文方法)	9.38×10^{-3}	7.87×10^{-4}	3.30×10^{-4}	1.96×10^{-5}	1.09×10^{-8}

例4 运用(5.1)式比较了本文的插值算子与其他三种重心有理插值算子在不同插值节点数下逼近函数 $f(t) = \sin t (t \in [-5, 5])$ 的逼近精度. 表2是在不同的插值节点下, 本文的插值算子和其他三种重心有理插值算子逼近 $f(t) = \sin t$ 的逼近精度, 从中可看出本文的插值算子的逼近精度远远优于Berrut和文献[10]的插值算子的逼近精度, 大约是它们逼近精度的十倍至一百万倍! 本文的插值算子和F-H插值算子($d = 3$)的逼近精度差不多, 但本文的插值算子编程简单、计算量小、稳定性好.

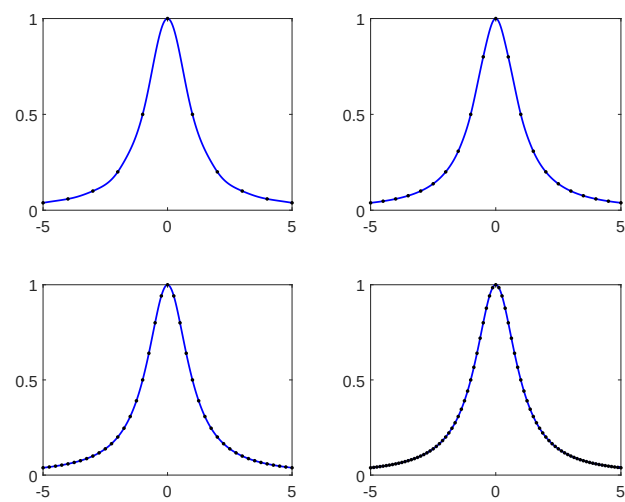


图 5 当 $n = 10, 20, 40, 80$ 时, 本文的插值算子逼近 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的效果图

表2 本文的插值算子与其他三种插值算子逼近 $f(t) = \sin t$ 的误差比较

插值节点数	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 640$
e_1 (文献[10])	1.56×10^{-1}	7.52×10^{-2}	2.93×10^{-2}	1.47×10^{-2}	2.29×10^{-3}
e_2 (Berrut's)	6.99×10^{-2}	4.48×10^{-2}	2.01×10^{-2}	1.03×10^{-2}	1.67×10^{-3}
e_3 (F-H($d = 3$))	1.27×10^{-2}	1.23×10^{-3}	3.48×10^{-5}	2.20×10^{-6}	1.33×10^{-9}
e_4 (本文方法)	2.04×10^{-2}	2.38×10^{-3}	6.64×10^{-5}	4.09×10^{-6}	2.40×10^{-9}

§6 结语

本文提出利用多项式再生性和局部支撑性对Catmull-Rom插值基函数进行改造的方法, 获得新的插值基函数, 生成新的插值算子, 新插值算子能避免其他各类插值算子的不足. 以改造后的五次Catmull-Rom插值算子为例, 本文给出了它的插值基函数的具体表达式; 获得了它精确的Lebesgue常数; 估计了它逼近连续函数的收敛速度. 改造后的Catmull-Rom插值算子有很好的稳定性, 在实际应用中不需要添加辅助点, 能局部调整曲线、曲面的形状; 文中的数值例子进一步佐证了本文的插值算子优于其他插值算子, 因此本文的插值算子有很好的应用前景.

参考文献:

[1] 谢庭藩, 周颂平. 实函数逼近论[M]. 杭州: 杭州大学出版社, 1998.

[2] 莫国端, 刘开第. 函数逼近论方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[3] 朱春钢, 李彩云. 数值逼近与几何计算[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[4] Ron Goldman. 金字塔算法-曲线曲面几何模型的动态编程处理[M]. 吴宗敏, 刘剑平, 曹沅, 等译, 北京: 电子工业出版社, 2004.

- [5] Farin G E. Curves and Surfaces for CAGD: a Practical Guide[M]. New York: Morgan Kaufmann Publishers, 2002.
- [6] Xie Tingfan, Zhang Renjiang, Zhou Songping. Three conjectures on Shepard interpolatory operators[J]. Approx Theory, 1998, 93: 399-414.
- [7] Berrut J P. Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation[J]. Comput Math Appl, 1988, 15: 1-16.
- [8] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. SIAM Rev, 2004, 46: 501-517.
- [9] Floater M S, Hormann K. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation[J]. Numer Math, 2007, 107: 315-331.
- [10] Zhang Renjiang, Liu Xing. Rational interpolation operator with finite Lebesgue constant[J]. Calcolo, 2022, 59: 10.
- [11] Bos L, Marchi S D, Hormann K, et al. Bounding the Lebesgue constant for Berrut's rational interpolant at general nodes[J]. Approx Theory, 2013, 169: 7-22.
- [12] Zhang Renjiang. Optimal asymptotic Lebesgue constant of Berrut's rational interpolation operator for equidistant nodes[J]. Appl Math Comput, 2016, 294: 139-145.
- [13] Bos L, Marchi S D, Hormann K, et al. On the Lebesgue constant of barycentric rational interpolation at equidistant nodes[J]. Numer Math, 2012, 121: 461-471.
- [14] Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [J]. Comput Aid Geome Design, 1987, 4(4): 257-268.
- [15] Zhang Renjiang, Ma Weiyin. An efficient scheme for curve and surface construction based on a set of interpolatory basis functions[J]. ACM Trans Graph, 2011, 30: 1-11.
- [16] Zhang Renjiang. Uniform interpolation curves and surfaces based on a family of symmetric splines[J]. Comput Aided Geom Design, 2013, 30(9): 844-860.
- [17] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes[J]. Constr Approx, 1989, 5: 49-68.
- [18] Catmull E, Rom R. A class of local interpolating splines[C]. Computer Aided Geometric Design. New York: Academic Press, 1974, 317-326.
- [19] 章仁江, 黄志鹏, 刘星. 一类具有优良性质的插值基函数[J]. 中国科学: 数学, 2023, 53(10): 1325-1348.

Remould Catmull-Rom interpolation basis functions and approximative properties

LIU Xing, ZHANG Ren-jiang

(Department of Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The paper utilizes polynomial reproducibility and local support to modify the famous Catmull Rom interpolation basis function, obtaining new interpolation basis functions, generating new interpolation operators, and also obtaining the precise Lebesgue constant of the new interpolation operator. The convergence speed of the new interpolation operator approaching continuous functions is estimated, and both theoretical and numerical examples show that the approximation effect of the new interpolation operator is better than other types of interpolation operators.

Keywords: interpolation; modulus of continuity; approximation error; Lebesgue constant; basis functions

MR Subject Classification: 65D05; 65D17; 41A05; 41A15