

q -Baskakov曲线

董美娟¹, 刘国芬^{1,2}, 解 滨³, 韩力文^{1,2,4*}

- (1. 河北师范大学 数学科学学院, 河北石家庄 050024;
2. 河北省计算数学与应用重点实验室, 河北石家庄 050024;
3. 河北师范大学 计算机与网络空间安全学院, 河北石家庄 050024;
4. 河北省数学与交叉科学国际联合研究中心, 河北石家庄 050024)

摘 要: 近年来, 一类基于 q -微积分的广义Baskakov算子得到广泛研究, 为构造新的曲线提供了理论依据. 在Aral与Gupta(2011)定义的 q -Baskakov算子中提取出 q -Baskakov基函数, 研究得到它的性质, 如非负性、单位分解性、单峰性等. 由于固定次数的 q -Baskakov基函数有无限多个, 为避免所构造的曲线无法插值它的控制多边形末端点, 给出 q -Baskakov曲线的截断定义, 并证明截断的 q -Baskakov曲线具有几何不变性、仿射不变性、凸包性等优良性质. 在形状控制方面, 文中给出的实例显示了 q -Baskakov曲线在造型中的实际应用, 很好地模拟控制多边形的形状, 并且形状参数可从整体对曲线形状进行控制, 从而进一步补充和完善了曲线造型理论.

关键词: q -微积分; q -Baskakov基函数; q -Baskakov曲线; 曲线造型

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2024)04-0379-12

§1 引 言

在计算机辅助几何设计CAGD(Computer Aided Geometric Design)中, Bernstein基函数具有非负性、单位分解性、端点性等性质, 使得经典Bézier曲线曲面具有几何不变性、仿射不变性、凸包性等优越性质, 同时通过调整控制顶点即可直观地控制曲线曲面形状, 成为曲线曲面造型设计中的有力工具^[1-3].

随着 q -微积分理论^[4]的发展, 涉及 q -整数的广义Bézier曲线被相继提出, 其中研究较为广泛的是Lupaş q -Bézier曲线和Phillips q -Bézier曲线, 这两种广义Bézier曲线在固定的控制多边形内, 可以通过改变 q 的取值调整曲线的形状, 满足不同的设计需求.

收稿日期: 2023-07-18 修回日期: 2024-05-19

*通讯作者, E-mail: hanliwen@hebtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(62076088); 河北省中央引导地方科技发展资金(236Z0104G); 河北师范大学研究生创新资助项目(XCXZZSS202430)

1996年Phillips提出多项式形式的 q -Bernstein算子^[5], 该算子可以利用 q -差分简单表示. 2003年, Oruç和Phillips依据Phillips q -Bernstein算子构造了Phillips q -Bézier曲线^[6]

$$F(t; q) = \sum_{i=0}^n F_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q t^i \prod_{r=0}^{n-i-1} (1 - q^r t), \quad q \in (0, 1], t \in [0, 1].$$

当 $q = 1$ 时, Phillips q -Bézier曲线退化为经典Bézier曲线. 随后Phillips q -Bézier曲线受到广泛关注与研究^[7-10].

1987年Lupaş将 q -整数与Bernstein多项式结合, 构造出有理形式的 q -模拟Bernstein算子^[11], 并研究了该算子的逼近性质和保形性质. 此后对于Lupaş q -Bernstein算子的一致收敛性、Voronovskaja型定理、局部逼近等方面性质得到广泛研究^[12-15]. 2014年, Han等在Lupaş q -Bernstein算子的基础上构造出Lupaş q -Bézier曲线^[16]

$$P(t; q) = \sum_{i=0}^n \frac{P_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q q^{i(i-1)/2} t^i (1-t)^{n-1}}{\prod_{j=1}^n (1-t+q^{j-1}t)}, \quad q > 0, t \in [0, 1],$$

并且给出了Lupaş q -Bézier曲线凸包性、仿射不变性、变差缩减性、升阶等基本性质以及de Casteljau算法. 当 $q = 1$ 时, Lupaş q -Bézier曲线可退化为经典Bézier曲线. 随后, 国内外学者从不同角度对Lupaş q -Bézier曲线进行深入研究^[17-20].

之后, 各种 q -模拟(q -analogue)算子在函数逼近论领域的应用越来越广泛深入, 算子序列的研究越来越受到学者们的关注, 涌现出了许多新型 q -模拟算子, 就收敛速度而言, 由 q -整数构造的线性正算子非常有效, 可以得到一些意想不到的结果, 这些是在经典情况下无法得到的, 从而将性质优良的 q -模拟算子引入到计算机辅助几何设计领域有重要意义.

2009年, Aral和Gupta^[21]根据 q -Bernstein算子的定义, 提出了两个Baskakov算子的 q -模拟形式, 对于第一个算子, 得到了它在有界区间上的收敛性. 对于第二个算子, 得到了无界区间上的直接逼近性质并估计收敛速度. 根据 q 的不同取值, 这些算子比经典的Baskakov算子更加灵活, 同时保留了它们的逼近性质. 然而对于上述Baskakov算子的 q -模拟, 无法研究其 q -导数及其应用. 在此基础上, 2011年Aral和Gupta提出了一类新的具有更好逼近性质的 q -模拟Baskakov算子^[22], 称之为 q -Baskakov算子, Gupta等人研究了 q -Baskakov算子的一些形状保持性质, 找到了 q -Baskakov基函数的生成函数^[23], q -Baskakov型算子的逼近理论越来越完善^[24-25]. 为避免曲线取自无限项基函数时无法插值控制多边形最后一个控制顶点的缺点, 本文根据文献[26-28]的截断曲线定义方法, 从 q -Baskakov算子提取出 q -Baskakov基函数构造出相应的 q -Baskakov曲线, 并研究了该基函数与曲线的性质, 丰富了曲线造型方法.

§2 预备知识

定义2.1 给定实数 $q > 0$ 及任意自然数 k , 定义 k 的 q -整数

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{(1-q^k)}{1-q}, & q \neq 1, \\ k, & q = 1. \end{cases}$$

定义2.2 给定实数 $q > 0$ 及任意自然数 $0 \leq k \leq n$, 定义 q -二项式系数

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!},$$

其中

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ [n]_q \times [n-1]_q \times \cdots \times [1]_q, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

q -二项式系数满足Pascal-type关系式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \end{aligned}$$

定义2.3 $(a+b)^n$ 的 q -模拟为

$$(a+b)_q^n = \prod_{s=0}^{n-1} (a + q^s b), \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

定义2.4 q -导数公式

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad (1)$$

D_q 是线性算子,

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x). \quad (2)$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 乘积的 q -导数公式为

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x). \quad (3)$$

由对称性, 交换 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x). \quad (4)$$

将 $g(x) \cdot (f(x)/g(x)) = f(x)$ 应用于(4)有

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}, \quad (5)$$

同样

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \quad (6)$$

定义2.5 f 的 $r+1$ 阶 q -向后差分为

$$\nabla_q^0 f(x_j) = f(x_j), \quad \nabla_q^{r+1} f(x_j) = q^r \nabla_q^r f(x_{j+1}) - \nabla_q^r f(x_j).$$

定义2.6 Baskakov算子

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right),$$

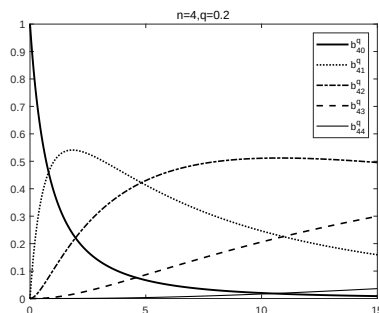
其中Baskakov基函数为

$$b_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}.$$

Baskakov算子是Bernstein算子在无穷域上的一种推广, 也是一种概率型算子. 文献[29-30]的研究表明, 经典的Baskakov算子可以保持被逼近函数的单调性、凸性、光滑性、变差缩减性、Lipschitz函数类等分析和几何性质. Baskakov基函数可以看作负二项分布的分布函数^[23], 负二项分布在某种意义下趋于Poisson分布, 从而Baskakov基函数的极限函数是Poisson基函数, 它的研究对其它学科也具有重要的现实意义.

§3 q -Baskakov基函数及其性质

2011年Aral和Gupta定义了可计算 q -导数的 q -Baskakov算子^[22], 对任意的连续函数 $f(x)$, $0 <$

图1 部分4次 q -Baskakov基函数

$q \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$, q -Baskakov算子定义为

$$B_{n,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^q(x) f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right),$$

其中

$$b_{n,k}^q(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}. \quad (7)$$

下文将证明(7)具有非负性、单位分解性和线性无关性等优良性质, 将其称之为 q -Baskakov基函数, 图1给出了部分4次 q -Baskakov基函数图像. 当 $q=1$ 时, q -Baskakov算子退化为经典Baskakov算子, q -Baskakov基函数退化为经典Baskakov基函数.

本节研究 q -Baskakov基函数的一些基本性质, 这些性质对探究 q -Baskakov曲线将起到重要作用.

命题3.1 非负性

$$b_{n,k}^q(x) \geq 0, \quad x \in [0, +\infty).$$

引理3.1^[22] 对 $\forall j, r \geq 0$, 可以得到

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r}] = q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}} \frac{\nabla_q^r f(x_j)}{[r]_q!},$$

其中 $x_j = \frac{[j]_q}{q^{j-1}}$, 从而 q -Baskakov算子可以写成

$$B_{n,q}(f, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \nabla_q^r f(0) \frac{x^r}{[r]_q!},$$

$$B_{n,q}(f, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} q^{-\frac{r(r-1)}{2}} \cdot f\left[0, \frac{1}{[n]_q}, \frac{[2]_q}{q[n]_q}, \dots, \frac{[r]_q}{q^{r-1}[n]_q}\right] \frac{x^r}{[n]_q!}.$$

命题3.2 单位分解性

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^q(x) = 1, \quad x \in [0, +\infty).$$

证 由 $f[x_0, x_1, \dots, x_r] = \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!}$ ($\xi \in (x_0, x_r)$) 和引理3.1可以得到

$$\frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}} \nabla_q^r f(x_0)}{[r]_q!} [n]_q^r = \frac{f^{(r-1)}(\xi)}{r!}.$$

因此 x^m 的 r 阶 q 后向差分为0($m > r$), 从而有 $B_{n,q}(1, x) = 1$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^q(x) = B_{n,q}(1, x) = 1$.

命题3.3 端点插值性

$$b_{n,k}^q(0) = \delta_{k,0}, \lim_{x \rightarrow +\infty} b_{n,k}^q(x) = 0.$$

引理3.2 对 $\forall n, k \geq 0$ 有

$$D_q \frac{x_k}{(1+x)_q^{n+k}} = \frac{[k]_q x^{k-1}}{(1+x)_q^{n+k}} - \frac{q^k x^k [n+k]_q}{(1+x)_q^{n+k+1}}.$$

证 先证 $D_q(1+x)_q^n = [n]_q(1+qx)_q^{n-1}$.

$$\begin{aligned} D_q(1+x)_q^n &= \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1+q^{j+1}x) - \prod_{j=0}^{n-1}(1-q^jx)}{(q-1)x} = \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{n-2}(1+q^{j+1}x)((1+q^n x) - (1+x))}{(q-1)x} = \\ &= \frac{q^n - 1}{q-1} \prod_{j=0}^{n-2}(1+q^{j+1}x) = [n]_q(1+qx)_q^{n-1}. \end{aligned}$$

由 q -导数公式(5)则有

$$D_q \frac{1}{(1+x)_q^{n+k}} = \frac{-[n+k]_q(1+qx)_q^{n+k-1}}{(1+x)_q^{n+k}(1+qx)_q^{n+k}} = -\frac{[n+k]_q}{(1+x)_q^{n+k+1}}.$$

由两个函数乘积的 q -导数公式(3)有

$$D_q \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \frac{[k]_q x^{k-1}}{(1+x)_q^{n+k}} - \frac{q^k x^k [n+k]_q}{(1+x)_q^{n+k+1}}.$$

命题3.4 q -导数

$$D_q b_{n,k}^q(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{[k]_q x^{k-1} - q^k [n]_q x^k}{(1+x)_q^{n+k+1}}, \quad x \in [0, +\infty).$$

证 由引理3.2

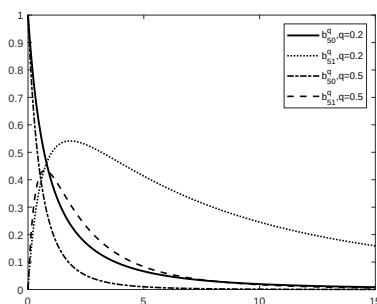
$$\begin{aligned} D_q b_{n,k}^q(x) &= D_q \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \\ &= \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} D_q \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \\ &= \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \left(\frac{[k]_q x^{k-1}}{(1+x)_q^{n+k}} - \frac{q^k x^k [n+k]_q}{(1+x)_q^{n+k+1}} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{[k]_q x^{k-1} - q^k [n]_q x^k}{(1+x)_q^{n+k+1}}. \end{aligned}$$

命题3.5 单峰性

$\min_{0 \leq x < +\infty} b_{n,k}^q(x)$ 在 x_{n_k} 处取得, x_{n_k} 满足 $([k]_q x^{k-1} - q^k [n]_q x^k)|_{x_{n_k}} = \frac{[k]_q}{q^k [n]_q}$ 或 $b_{n,k}^q$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调.

证 当 $k=0$ 时, $b_{n,0}^q(x) = \frac{1}{(1+x)_q^n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 单峰性成立.当 $1 \leq k \leq n$ 时, 令 $D_q b_{n,k}^q(x) = 0$, 则

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{[k]_q x^{k-1} - q^k [n]_q x^k}{(1+x)_q^{n+k+1}} = 0,$$

图 2 q 取不同值时部分5次 q -Baskakov基函数

即 $[k]_q x^{k-1} - q^k [n]_q x^k = 0$, 可得 $x_{n_k} = \frac{[k]_q}{q^k [n]_q}$.

由图2可以看出, $b_{5,1}^{0.5}$ 比 $b_{5,1}^{0.2}$ 先达到峰值, 即 q 越大, 对应的同次数基函数越先达到峰值.

命题3.6 线性无关性

$$\sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x) = 0 \Leftrightarrow c_k = 0, k = 0, 1, \dots, n.$$

证 充分性显然, 下面证明必要性.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n c_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \geq 0 \quad (x \in [0, +\infty)) \Leftrightarrow \\ &\sum_{k=0}^n c_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} = 0 \Leftrightarrow c_k = 0, k = 0, 1, \dots. \end{aligned}$$

命题3.7 Descartes符号法则

$$\text{zeros}[0, +\infty) \sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x) \leq SAC_0, c_1, \dots, c_n,$$

其中 $\text{zeros}[0, +\infty) \sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x)$ 表示 $\sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的根的个数, $SAC_0, c_1, \dots, c_n$ 表示序列 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 的符号变化数, 讨论符号变化数时, 忽略掉0.

幂基 $1, x, \dots, x^n$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上满足Descartes符号法则^[31], 在这里探索符号法则, 不是有限项的基函数序列, 而是无限项的基函数序列, 1999年Goldman证明了在任意开区间 $(0, +\infty)$ 上的无限项幂基满足Descartes符号法则^[32].

证

$$\begin{aligned} \text{zeros}[0, +\infty) \sum_{k=0}^n c_k b_{n,k}^q(x) &= \text{zeros}[0, +\infty) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \\ &\text{zeros}[0, +\infty) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \leq SAC_0, c_1, \dots, c_n. \end{aligned}$$

命题3.8 递推关系式

$$b_{n,k}^q(x) = \frac{[n]_q(1+q^{n+k}x)}{[n+k]_q} b_{n+1,k}^q(x), \quad b_{n+1,k}^q(x) = \frac{[n+k]_q}{[n]_q} b_{n,k}^q(x) - \frac{q^n[k+1]_q}{[n]_q} b_{n,k+1}^q(x).$$

证

$$b_{n+1,k}^q(x) = \frac{\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \frac{1}{(1+q^{n+k}x)} =$$

$$\frac{[n+k]_q}{[n]_q(1+q^{n+k}x)} b_{n,k}^q(x),$$

从而 $b_{n,k}^q(x) = \frac{[n]_q(1+q^{n+k}x)}{[n+k]_q} b_{n+1,k}^q(x).$

$$b_{n+1,k}^q(x) = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k+1}} =$$

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} - \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} \frac{q^{n+k}x^{k+1}}{(1+x)_q^{n+k+1}} =$$

$$\frac{[n+k]_q}{[n]_q} b_{n,k}^q(x) - \frac{q^n[k+1]_q}{[n]_q} b_{n,k+1}^q(x).$$

§4 q -Baskakov 曲线

本节给出 q -Baskakov 曲线的定义, 讨论其几何性质.

对于基函数为有限项的曲线, 例如 Bernstein 基函数对应的 Bézier 曲线, 给定 $n+1$ 个控制顶点 $p_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 定义一条 n 次 Bézier 曲线为 $p(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t), 0 \leq t \leq 1$. 在曲线造型的实际问题中, 一般选取的控制顶点个数是有限的, 然而对于无限项基函数, 如 Poisson 基函数与 q -Baskakov 基函数, 若类似 Bézier 曲线定义相应曲线, 则曲线不会插值控制多边形最后一个控制顶点. 从而需要给出一种截断的曲线定义^[26, 28, 32].

使用控制顶点 $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, p_n, \dots$ 来构建 n 次 q -Baskakov 曲线 $B(t)$ (其中 $t \in [0, +\infty)$)

$$B(t) = \sum_{k=0}^n p_k b_{n,k}^q(t) + (1 - \sum_{k=0}^n b_{n,k}^q(t)) p_n. \quad (8)$$

依次用直线段连接相邻两个 p_k 所得的 n 边折线多边形称为构建 n 次 q -Baskakov 曲线的控制多边形.

例1 记控制顶点为

$$(0, 0), (5, 6), (10, 6), (15, 0), (15, 0) \dots$$

三次 q -Baskakov 基函数的前4个为

$$b_{3,0}^q(t) = \frac{1}{(1+t)_3^q}, b_{3,1}^q(t) = [3]_q \frac{t}{(1+t)_4^q}, b_{3,2}^q(t) = \frac{[4]_q [3]_q}{[2]_q [1]_q} q \frac{t^2}{(1+t)_5^q}, b_{3,3}^q(t) = \frac{[5]_q [4]_q}{[2]_q [1]_q} q^3 \frac{t^3}{(1+t)_6^q},$$

则三次 q -Baskakov 曲线为

$$B(t) = \sum_{k=0}^3 p_k b_{3,k}^q(t) + (1 - \sum_{k=0}^3 b_{3,k}^q(t)) p_3,$$

如图3所示.

性质4.1 几何不变性和仿射不变性

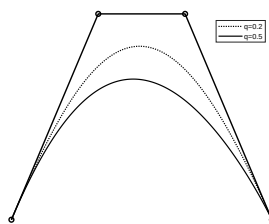
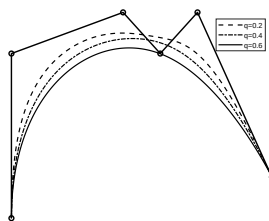


图3 控制顶点(0, 0); (5, 6); (10, 6); (15, 0); (15, 0)...

图4 q -Baskakov曲线的凸包性

因为 q -Baskakov基函数满足单位分解性, 对 q -Baskakov曲线进行仿射变换, 即用线性变换 M 和平移 C 作用, 得到新的曲线

$$B^*(t) = MB(t) + c = M \sum_{k=0}^{\infty} p_k b_{n,k}^q + c \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}^q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Mp_k b_{n,k}^q + c \sum_{k=0}^{\infty} cb_{n,k}^q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (Mp_k + c) b_{n,k}^q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^* b_{n,k}^q(t).$$

对原 q -Baskakov曲线的控制顶点 p_k 进行相同的仿射变换后得到新的控制顶点 p_k^* 对应的 q -Baskakov曲线, 这说明 q -Baskakov曲线曲线不依赖于坐标系的选取, 是几何不变的.

性质4.2 凸包性

从 q -Baskakov基函数的性质可知 $b_{n,k}^q(t) (k=0, 1, \dots)$ 构成权函数(非负性和单位分解性), 对于固定的 t , $B(t)$ 即为各控制顶点 $p_k (k=0, 1, \dots)$ 的加权平均, 从几何上看, q -Baskakov意味着曲线落在了控制多边形的凸包之中. 图4表明 q 取不同值时对应的 q -Baskakov曲线位于控制多边形凸包内.

性质4.3 局部性

局部性意味着每个控制顶点对整条曲线应该只有一个局部影响, 并且随着曲线从控制顶点后退, 其影响应该相当快地减弱, 这种局部性质由 q -Baskakov基函数的单峰性保证, 因为单峰性意味着 q -Baskakov基函数只有一个局部最大值, 相应的控制顶点对曲线的影响很大, 但远离此最大值相应控制顶点的影响可以忽略不计.

性质4.4 端点插值性

由(8)式及命题3.3有 $B(0) = p_0, \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = p_n$, 这表明 q -Baskakov曲线以控制多边形的起点 p_0 , 终点 p_n , 为它的起点和终点.

性质4.5 非退化性

q -Baskakov 曲线是非退化的, 因为 q -Baskakov 基函数是线性无关的. 若假设 q -Baskakov 曲线 $B(t)$ 坍缩到一点 Q . 令

$$b_{n,k}^{*q}(x) = \begin{cases} b_{n,k}^q(x), & k = 0, 1, \dots, \hat{n}, \\ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}^q(x), & k = \hat{n}, \end{cases}$$

则

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k b_{n,k}^{*q}(x) + p_n b_{n,n}^{*q}(x) = \sum_{k=0}^n p_k b_{n,k}^{*q}(x) = Q \Rightarrow \sum (p_k - Q) b_{n,k}^{*q}(x) = 0.$$

等式两边点乘任意向量 v 有 $\sum (p_k - Q) \cdot v b_{n,k}^{*q}(x) = 0$. 由 q -Baskakov 基函数是线性无关的, 得到

$$(p_k - Q) \cdot v = 0, k = 0, 1, \dots,$$

对任意 $v \Leftrightarrow p_k = Q, k = 0, 1, \dots$, 从而 q -Baskakov 曲线是非退化的.

性质4.6 变差缩减性

在平面上, 任意直线和 q -Baskakov 曲线的交点个数不多于它和控制多边形的交点个数.

证 记 q -Baskakov 曲线为 B , 在它所在的平面上任意选一条直线 L , 记直线 L 与曲线 B 的交点个数为 $I(B, L)$, 记控制多边形为 P , 记它与直线的交点个数为 $I(P, L)$, 即证 $I(B, L) \leq I(P, L)$.

以直线 L 为 x 轴建立平面直角坐标系, 由性质4.1, 记控制顶点的新坐标为 (x_i, y_i) , 由命题3.7, 有

$$I(B, L) = \text{zeros}[0, +\infty) \sum y_k b_{n,k}^q(t) \leq S A y_0, y_1, \dots = I(P, L),$$

这意味着 q -Baskakov 曲线大体上沿着它的控制多边形前进, 不会比它的控制多边形更拐来拐去.

性质4.7 平面 q -Baskakov 曲线的保凸性

当 q -Baskakov 曲线的控制多边形是凸的, 则它所定义的 q -Baskakov 曲线也是凸的.

证 除端点外, 平面 q -Baskakov 曲线上任一点切线与凸控制多边形最多只有2个交点, 由性质4.5, 此切线与曲线交点正好为切点, 从而整条曲线位于切线同侧, 即 q -Baskakov 曲线是凸的.

定义几组控制多边形, 得到对应的曲线, 如图5-图9所示. 观察图象, 也可以直观地验证 q -Baskakov 曲线的几何性质, 如凸包性、变差缩减性、保凸性等. 同时也可以从图象中得到, q 越小, 曲线越靠近控制多边形. 同一个控制多边形(图7)定义 q -Baskakov 曲线, q 的不同取值, 导致自交点个数也不同了. 调整 q 的取值, q -Baskakov 曲线比同次数 Bézier 曲线更靠近控制多边形(图9). 实现了固定控制点来改变自由曲线形状的目的(图5-图7), 从而形状参数 q 的增加是有意义的.

§5 结语

本文的思路是在具有优良性质的算子中提取基函数来构造曲线, 研究了 q -Baskakov 基函数的性质, 非负性、单位分解性、单峰性等, 接着给出了 q -Baskakov 曲线的定义, 证明了其具有几何不变性、仿射不变性、凸包性等优良性质, 实例显示了 q -Baskakov 曲线在造型中的实际应用性, 形状参数可从整体对曲线形状进行控制, q 的取值越小, 相应的曲线越靠近控制多边形. 本文构造的 q -Baskakov 曲线实现了固定控制点来改变自由曲线形状的目的, 能很好地模拟控制多边形的形状, 进一步补充和完善了曲线造型理论. 后续将研究 q -Baskakov 曲面模型, 探究 q -Baskakov 曲线曲面与 Bézier 曲线曲面的内在联系.

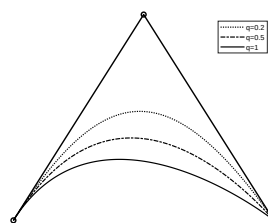


图 5 控制顶点 $(0, 0)$; $(5, 6)$; $(10, 0)$; $(10, 0)$...

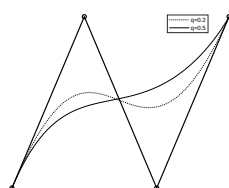


图 6 控制顶点 $(0, 0)$; $(5, 6)$; $(10, 0)$; $(15, 6)$; $(15, 6)$...

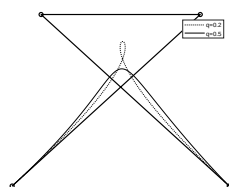


图 7 控制顶点 $(0, 0)$; $(13, 6)$; $(2, 6)$; $(15, 0)$; $(15, 0)$...

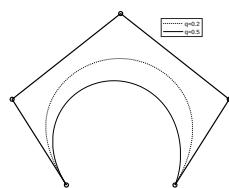


图 8 控制顶点 $(0, 0)$; $(-5, 6)$; $(5, 12)$; $(15, 6)$; $(10, 0)$; $(10, 0)$...

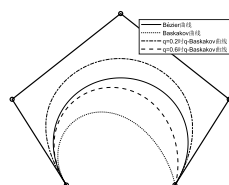


图 9 四次 q -Baskakov曲线与Bézier曲线

参考文献:

- [1] Bézier P, Mathematical and practical possibilities of UNISURF[C]. Computer Aided Geometric Design. New York: Academic Press, 1974, 127-152.
- [2] Farouki R T. The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective[J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(6): 379-419.
- [3] 王国瑾, 刘利刚. 几何计算逼近与处理[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [4] Kac V G, Cheung P. Quantum Calculus[M]. New York: Springer, 2002.
- [5] Phillips G M. A de Casteljau algorithm for generalized Bernstein polynomials[J]. Bit Numerical Mathematics, 1996, 36(1): 232-236.
- [6] Oruc H, Phillips G M. q -Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1-12.
- [7] Disibuyuk C, Oruc H. A generalized of rational Bernstein-Bézier curves[J]. BIT Numerical Mathematics, 2007, 47: 313-323.
- [8] Goldman R, Simeonov P, Simsek Y. Generating functions for the q -Bernstein bases[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2014, 28(3): 1009-1025.
- [9] Liu Xiaomin, Abbas M, Gang Hu, et al. Degree reduction of Q -Bézier curves via squirrel search algorithm[J]. Mathematics, 2021, 9(18): 2212.
- [10] Simeonov P, Zafiris V, Goldman R. q -Blossoming: a new approach to algorithms and identities for q -Bernstein bases and q -Bézier curves[J]. Journal of Approximation Theory, 2012, 164(1): 77-104.
- [11] Lupaş A. A q -analogue of the Bernstein operator[J]. Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 1987, 9: 85-92.
- [12] Mahmudov N I, Sabancigil P. Voronovskaja type theorem for the Lupaş q -analogue of the Bernstein operators[J]. Mathematical Communications, 2012, 17(1): 83-91.
- [13] Mursaleen M, Ansari K J, Khan A. Approximation properties and error estimation of q -Bernstein shifted operators[J]. Numerical Algorithms, 2020, 84: 207-227.
- [14] Ostrovska S. On the Lupaş q -analogue of the Bernstein operator[J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2006, 36(5): 1615-1629.
- [15] Qasim M, Mursaleen M, Khan A, et al. Approximation by generalized Lupaş operators based on q -integers[J]. Mathematics, 2020, 8(1): 68.
- [16] Han Liwen, Chu Ying, Qiu Zhiyu. Generalized Bézier curves and surfaces based on Lupaş q -analogue of Bernstein operator[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 261: 352-363.
- [17] Han Liwen, Wu Yasha, Chu Ying. Weighted Lupaş q -Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 308: 318-329.
- [18] Han Xuli, Zhang Yuanpeng. Optimal constrained polynomials approximation of hyperbolas based on Lupaş q -Bézier curves[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(14): 5619-5613.
- [19] 申学超, 韩力文. 三次加权 Lupaş q -Bézier 曲线表示的圆锥曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2022, 34(1): 36-43.
- [20] 耿梦圆, 解滨, 韩力文. Lupaş q -Bézier 曲线的离散卷积生成与求值算法[J]. 计算机工程与科学, 2023, 45(1): 104-112.
- [21] Aral A, Gupta V. On q -Baskakov type operators[J]. Demonstratio Mathematica, 2009, 42(1): 109-122.

- [22] Aral A, Gupta V. Generalized q -Baskakov operators[J]. *Mathematica Slovaca*, 2011, 61: 619-634.
- [23] Gupta V, Kim T. On a q -analog of the Baskakov basis functions[J]. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2013, 20(3): 276-282.
- [24] Finta Z, Gupta V. Approximation properties of q -Baskakov operators[J]. *Central European Journal of Mathematics*, 2010, 8: 199-211.
- [25] 刘生贵. q -Baskakov型算子的A-统计逼近[J]. *纯粹数学与应用数学*, 2014, 30(4): 367-376.
- [26] Fan Feilong, Zeng Xiaoming. S - λ bases and S - λ curves[J]. *Computer Aided Design*, 2012, 44(11): 1049-1055.
- [27] Zhou Guorong, Zeng Xiaoming, Fan Feilong. Bivariate S - λ bases and S - λ surface patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2014, 31(9): 674-688.
- [28] Chen Shuni, Zhao Chong, Zeng Xiaoming. A new shape adjustment method of S - λ curve[J]. *Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing*, 2014, 24: 39-43.
- [29] Carbone I. Shape preserving properties of some positive linear operators on unbounded intervals[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1998, 93(1): 140-156.
- [30] Khan M K, Vecchia B D, Fassih A. On the monotonicity of positive linear operators[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1998, 92(1): 22-37.
- [31] Schumaker L L. *Spline Functions: Basic Theory*[M]. New York: Wiley, 1981.
- [32] Goldman R. The rational Bernstein bases and the multirational blossoms[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16: 701-738.

q -Baskakov curves

DONG Mei-juan¹, LIU Guo-fen^{1,2}, XIE Bin³, HAN Li-wen^{1,2,4}

(1. School of Math. Sci., Hebei Normal Univ., Shijiazhuang 050024, China;

2. Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang 050024, China;

3. College of Computer and Cyber Security, Hebei Normal Univ., Shijiazhuang 050024, China;

4. Hebei International Joint Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Science, Shijiazhuang 050024, China)

Abstract: In recent years, a class of generalized Baskakov operators based on q -calculus has been widely studied, which just provides a theoretical basis for constructing new curves. In this paper, q -Baskakov bases function is extracted from q -Baskakov operator defined by Aral and Gupta. Some basic properties and identities of the q -Baskakov bases such as non-negativity, partition of unity, unimodality and so on, are studied. Since there are infinite q -Baskakov bases of fixed degree, in order to avoid that the constructed curve cannot interpolate the end points of its control polygon, the truncated of q -Baskakov curve is given, and proved that the truncated q -Baskakov curve has excellent properties such as geometric invariance, affine invariance and convex hull property. In the aspect of shape control, the ex-ample shows the practical application of q -Baskakov curve in modeling. The shape of polygon can be simulated and controlled well, and the shape parameters can control the shape of curve from the whole, thus further supplementing and perfecting the curve modeling theory.

Keywords: q -calculus; q -Baskakov bases; q -Baskakov curve; curve modeling

MR Subject Classification: 65D17