高校应用数学学报
2024, 39(3): 371-378

单圈图的$D(2)$-点和可区别全染色

强会英[1]， 刘 欢[1]， 王洪申[2]

(1. 兰州交通大学 数理学院，甘肃兰州 730070;

2. 兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃兰州 730050)

摘 要: 图G的$D(2)$-点和可区别全染色是指在图G的一个正常全染色ϕ下，G中任意两个距离不超过2的顶点u，v，其色集合中所有颜色数之和互不相同. 使得G有一个k-$D(2)$-点和可区别全染色的最小整数k，称为图G的$D(2)$-点和可区别全色数. 文中应用组合零点定理和权转移方法刻画了单圈图的$D(2)$-点和可区别全染色，并得到其$D(2)$-点和可区别全色数.

关键词: 单圈图; 全染色; $D(2)$-点和可区别全染色; 权转移方法

中图分类号: O157.5

文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2024)03-0371-08

§1 引 言

本文讨论的图为简单无向的连通图，$V(G)$和$E(G)$表示图G的顶点集和边集，$C=\{1,2,\cdots,k\}$为k-色集($k\in\mathbf{N}^+$)，顶点x的度数记为$d(x)$，若$d(x)\geq k$，则点x称作是k^+点，若$d(x)=k$，点x简记为k-点. $\Delta(G)$，$\delta(G)$分别表示为图G的最大度和最小度，$d(u,v)$表示点u和点v间的距离，点v的邻点集记为$N(v)$，图G的围长记为$g(G)$. 其它未加说明的术语，请参考文献[1-3].

图的染色问题是图论研究中一个重要课题，许多学者在染色领域取得很多有意义的研究成果. 张忠辅等人[4]提出图的$D(\beta)$-点可区别全染色的概念. Pilsniak等人[5]提出图的邻和可区别全染色的概念，并给出猜想: 对于任意一个点数不小于2的简单连通图G，有$\chi''_{\Sigma}(G)\leq\Delta(G)+3$. 之后Dong等人[6-10]针对一些特殊图，研究了它们的邻和可区别染色问题，得到其相应的邻和可区别色数. 强会英等人[11]对2-距离和可区别边染色进行研究，得到无K_4-子式图的2-距离和可区别边色数的一个上界. 贾秀卿等人[12]应用Hall定理考虑了双圈图的$D(2)$-点可区别边染色.

基于上述研究，本文讨论了单圈图的$D(2)$-点和可区别全染色问题.

§2 预备知识

图G的一个k-正常全染色是指k种颜色对图G的全体顶点及全体边的一个分配，使得相邻点，相邻边，相关联的点和边染色不同. 其中使得G存在k-正常全染色的最小颜色数k称为G的全色数，记为$\chi''(G)$.

收稿日期: 2022-11-21 修回日期: 2023-12-11
基金项目: 国家自然科学基金(11961040)

定义2.1(见[11, p83]) 令ϕ是图G的一个正常$[k]$-全染色, 对$\forall u,v \in V(G)$, $d_G(u,v) \le 2$, 若$g(u) \ne g(v)$, 其中$g(u) = \phi(u) + \sum_{u\omega \epsilon E(G)} \phi(u\omega)$, 则称$\phi$为图$G$的$k$-$D(2)$-点和可区别全染色, 简记为$k$-$D(2)$-VSDTC, 并称$\chi''_{2-\Sigma}(G)= \min\{k|G$有$k$-$D(2)$-VSDTC$\}$为$G$的$D(2)$-点和可区别全色数.

定义2.2(见[9, p78]) 设T是$p(p \ge 3)$阶树, 将T中某两个不相邻的点用一条新的边连起来, 得到的p阶含有p条边的图称为单圈图.

引理2.1(见[11, p83]) 对于简单图G, $\chi''_{2-\Sigma}(G) \ge \chi''_{\Sigma}(G) \ge \Delta(G)+1$. 若简单图$G$存在两个距离不超过2的最大度点, 则$\chi''_{2-\Sigma}(G) \ge \Delta(G)+2$. 其中$\chi''_{\Sigma}(G)$表示图$G$的邻和可区别全色数.

引理2.2(见[8, p189]) 设B_1, B_2是数集, 且$|B_1| = m \ge 2, |B_2| = n \ge 2$, 令$B_3 = \{x+y|x \in B_1, y \in B_2, x \ne y\}$. 则$|B_3| \ge m+n-3$, 并且如果$B_1 \ne B_2$, 那么$|B_3| \ge m+n-2$.

引理2.3(见[8, p189]) 设B_1是一个正整数集且$|B_1| = n$, 令$B_2 = \{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i | x_i \in B_1, x_i \ne x_j (i \ne j)\}$, $m \le n$. 那么$|B_2| \ge mn - m^2 + 1$.

引理2.4(见[11, p83]) 对$n(n \ge 3)$阶圈图C_n, 有$\chi''_{2-\Sigma}(C_n) = \begin{cases} 4, & n \equiv 0(\mod 4); \\ 5, & n \not\equiv 0(\mod 4). \end{cases}$

引理2.5(见[1, p9]) (组合零点定理) 令F为任一数域, $Q = Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为属于$F$上的多项式, 设$deg(Q) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, 其中$k_i$为非负整数, 且$C_Q(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}) \ne 0$, 若$S_1, S_2, \cdots, S_n \subseteq F$且$|S_i| > k_i$, $1 \le i \le n$, 则存在$s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \cdots, s_n \in S_n$, 使得$Q(s_1, s_2, \cdots, s_n) \ne 0$.

§3 主要结果

定理3.1 设G是$\Delta(G) \leqslant 4$的单圈图, 则$\chi''_{2-\Sigma}(G) \leqslant \Delta(G)+3$.

证 采用反证法, 记$\Delta(G)+3 = k$, 设G是一个极小反例, 即$\Delta(G) \le 4$, 且图G是使$|V(G)| + |E(G)|$最小的不存在k-$D(2)$-VSDTC的图. 图G的任意真子图G'都有一个$[k]$-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ'. 下面通过删去图G中的某些边得到图G的真子图G', 若图G'的$[k]$-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ'可扩展为图G的$[k]$-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ, 这与假设相矛盾. 令$g(v)$, $g'(v)$分别表示在染色ϕ, ϕ'中点v及所有与其关联的边的颜色数之和.

去掉图G的所有1-点, 所得图记为H, 显然H为连通图. 因为1-点(悬挂点)达到$D(2)$-点和可区别全染色总是易染的, 所以在下面分析中, 对任意点(或边)染色时, 不考虑与其相邻(或2距离以内)的1-点的颜色限制, 也不分析1-点. 下面讨论图H的结构特点.

断言1 $\delta(H) \ge 2$.

假设断言1不成立, 即$\delta(H) \le 1$. 若$\delta(H) = 0$, 则图G为$K_{1,n-1}$, 易得$\chi''_{2-\Sigma}(G) \leqslant k$, 与$G$的选取矛盾. 若$\delta(H) = 1$, 不妨设$d_H(v) = 1$, 则图$G$包含一个与图1中$G_1$同构的子图, 其中$1 \le l \le k-4$, 令$G' = G - \{vv_1\}$, 图$G'$存在$[k]$-$D(2)$-点和可区别全染色$\phi'$, 由染色条件可知, vv_1至少有$k-(\Delta-1+1) \ge 3$种可用颜色, 点v_1易染, 可得图G的$[k]$-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ, 推出矛盾, 故$\delta(H) \ge 2$.

对$\forall v \in V(H)$, 若$d_H(v) = 2$, 则$2 \le d_G(v) \le \Delta(G)$, 若$d_H(v) = d_G(v) = 2$, 则称$v$为好2-点, 否则称$v$为坏2-点. 下面根据图$G$的最大度进行分类讨论.

情形1 当$\Delta(G) = 2$时, $k = 5$, 根据引理2.4可知$\chi''_{2-\Sigma}(G) \leqslant \Delta(G)+3$成立.

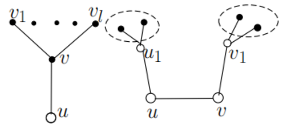

图1　G_1和G_2

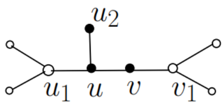

图2　G_3

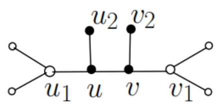

图3　G_4

情形2　当$\Delta(G)=3$时, $k=6$.下面分析此时图H的结构特点.

断言2　H中任意两个2-点不相邻.

假设断言2不成立, 设图H中$\exists uv\in E(H)$, 有$d_H(u)=d_H(v)=2$. 会出现以下三种情形.

(1) u, v均为好2-点, 则图G包含与图1中G_2同构的子图, 令$G'=G-\{uv\}$, 图G'存在一个6-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ', 为了将G'的染色ϕ'扩展为图G的6-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ. 现在重染u,v的颜色, 记u, v, uv分配的颜色分别为x_1, x_2, x_3, 由染色条件得多项式

$Q(x_1,x_2,x_3)=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_1-\phi'(uu_1))(x_1-\phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))(x_3-\phi'(uu_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-g'(v_1))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-g'(u_1))(x_1+\phi'(uu_1)-x_2-\phi'(vv_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-g'(u_1))(x_1+x_3+\phi'(uu_1)-g'(v_1))$.

去掉多项式Q中的常数得

$$\widetilde{Q}(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^2x_3^2\prod_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_2+x_3)^2(x_1+x_3)^2(x_1-x_2).$$

由组合零点定理知, 若证得Q中$x_1^5x_2^5x_3^4$的系数a非零, 即可得到图G的6-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ, 易知$\widetilde{Q}$中$x_1^5x_2^5x_3^4$的系数与Q中$x_1^5x_2^5x_3^4$的系数相同, 均为a, 对$\widetilde{Q}$用Matlab计算得$a=-4\neq 0$, 故图G存在6-$D(2)$-点和可区别全染色.

(2) u, v中有一个好2-点. 不妨设v为好2-点, 则图G包含与图2中G_3同构的子图, 令$G'=G-\{uv\}$, 图G'存在6-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ', 重染u, v, uu_2的颜色, 记u, v, uv, uu_2分配的颜色分别为x_1, x_2, x_3, x_4, 由染色条件得多项式

$Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1-\phi'(uu_1))(x_1-\phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_3-\phi'(uu_1))(x_4-\phi'(uu_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-g'(u_1))(x_1-x_2+x_4+\phi'(uu_1)-\phi'(vv_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-g'(v_1))(x_2+x_3+\phi'(vv_1)-g'(u_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-g'(v_1))$.

去掉Q_1中的常数得多项式

$\widetilde{Q_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2x_2^2x_3^2x_4\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1+x_3+x_4)^2(x_1-x_2+x_4)(x_2+x_3)^2$.

$\widetilde{Q_1}$中$x_1^4x_2^4x_3^4x_4^5$的系数与Q_1中$x_1^4x_2^4x_3^4x_4^5$的系数相同, 均为b, 对$\widetilde{Q_1}$用Matlab计算得$b=2\neq 0$, 由组合零点定理可知, 图G存在6-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ.

(3) u, v均为坏2-点, 则图G包含与图3中G_4同构的子图. 令$G'=G-\{uv\}$, ϕ'为G'的6-$D(2)$-点和可区别全染色, 重染uu_2, vv_2, u, v的颜色. 记u, v, uv, uu_2, vv_2分配的颜色分别为x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 由染色条件得多项式

$Q_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \prod\limits_{i=1}^{2}(x_i - x_{i+3})(x_{i+3} - x_3)\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i - x_j)(x_1 - \phi'(uu_1))(x_1 - \phi'(u_1))(x_2-\phi'(vv_1))(x_2-\phi'(v_1))(x_3-\phi'(uu_1))(x_3-\phi'(vv_1))(x_4-\phi'(uu_1))(x_5-\phi'(vv_1))(x_1+x_3+x_4+\phi'(uu_1)-g'(u_1))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-g'(v_1))(x_1+x_4-x_2-x_5+\phi'(uu_1)-\phi'(vv_1))(x_1+x_4+x_3+\phi'(uu_1)-g'(v_1))(x_2+x_3+x_5+\phi'(vv_1)-g'(u_1))$.

去掉Q_2中的常数得多项式

$\widetilde{Q_2}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1^2x_2^2x_3^2x_4x_5\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_1-x_4)(x_4-x_3)(x_2-x_5)(x_5-x_3)(x_1+x_3+x_4)^2(x_2+x_3+x_5)^2(x_1+x_4-x_2-x_5)$.

$\widetilde{Q_2}$中$x_1^4x_2^4x_3^4x_4^4x_5^4$的系数与$Q_2$中$x_1^4x_2^4x_3^4x_4^4x_5^4$的系数相同, 均为$b$, 对$\widetilde{Q_2}$用Matlab计算得$b=-2\neq 0$, 由组合零点定理可知, 图$G$存在6-$D(2)$-点和可区别全染色$\phi$.

结合(1)-(3)可知, 断言2成立, 即H中任意两个2-点不相邻.

由断言1和断言2知$\Delta(H)=3$, 用$d_H(v)$表示H中点v的度数, 记图G的平均度为$\mathrm{ad}(G)$, G的最大平均度为$\mathrm{mad}(G)$, 下面用权转移的方法推出矛盾.

首先定义初始的权值函数$ch(v)$, 对$\forall v\in V(H)$, 令$ch(v)=d_H(v)-\frac{5}{2}$. 则图H中所有点的权和为$\sum\limits_{v\in V(H)}(d_H(v)-\frac{5}{2}) = |V(H)|\times(\mathrm{ad}(H)-\frac{5}{2})\le |V(H)|\times(\mathrm{mad}(H)-\frac{5}{2})<0$.

给定如下权转移规则.

(R1) H中任一3-点向其2距离内的2-点转移权$\frac{1}{12}$.

设$ch'(v)$是进行权转移之后点v新的权函数, 下面检查图H中点的新权. 对于$\forall v\in V(H)$,

若$d_H(v)=2$, 由断言2及权转移规则(R1)得$ch'(v)=ch(v)+6\times\frac{1}{12}=0$.

若$d_H(v)=3$, v点2距离内至多有6个2-点. 由(R1)得$ch'(v)\ge ch(v)-6\times\frac{1}{12}=0$.

综合上述分析, 对$\forall v\in V(H)$, 都有$ch'(v)\ge 0$, 从而$0\le\sum\limits_{v\in V(H)}ch'(v)=\sum\limits_{v\in V(H)}ch(v)<0$, 产生矛盾, 说明图$H$不存在, 因此图$G$也不存在, 故$\Delta(G)=3$时, 定理3.1成立.

情形3 当$\Delta(G)=4$时, $k=7$, 下面分析图H的结构特点.

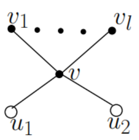

图4 G_5

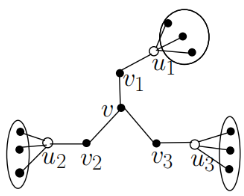

图5 G_6

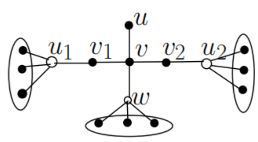

图6 G_7

断言3 对$\forall v\in V(H)$, 若$d_H(v)=2$, 则$d_G(v)=2$.

假设断言3不成立, 即$\exists v\in V(H)$, 满足$d_H(v)=2$且$3\le d_G(v)\le 4$, 则图G包含与图4中G_5同构的子图, 其中$1\le l\le 2$, 当$l=1$时, 令$G'=G-\{vv_1\}$, 图G'存在一个7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ', 对vv_1进行染色, vv_1至多有5种色不可用, $7>5$, 点v_1易染, 结合引理2.2, 知图G存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ.

当$l=2$时, 令$G'=G-\{vv_1,vv_2\}$, 记vv_1, vv_2所分配的颜色分别为x_1, x_2. 由染色条件得

$Q_3(x_1,x_2)=\prod\limits_{i=1}^{2}(x_i-\phi'(u_1v))(x_i-\phi'(u_2v))(x_i-\phi'(v))(x_1+x_2+\phi'(v)+\phi'(vu_1)+\phi'(vu_2)-g'(u_i))(x_1-x_2)$. 去掉$Q_3$中的常数得多项式$\widetilde{Q_3}(x_1,x_2)=x_1^3x_2^3(x_1-x_2)(x_1+x_2)^2$.

$\widetilde{Q_3}$中$x_1^5x_2^4$的系数与Q_3中$x_1^5x_2^4$的系数相同, 均为b, 对$\widetilde{Q_3}$用Matlab计算得$b=1$, 由组合零点定理知, 图G 存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ. 与图G是极小反例矛盾, 即断言3成立.

断言4 H中任意两个2-点不相邻.

若H中存在两个相邻的2-点u和v, 由断言3知, u和v均为好2-点, 与断言2(1)证明类似, 可推出图G存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ, 与图G是极小反例矛盾, 故H中任意两个2-点不相邻.

$\forall v\in V(H)$, 若$d_H(v)=3$, 则$d_G(v)=3$或4, 若$d_H(v)=d_G(v)=3$, 称v为好3-点, 否则称为坏3-点.

断言5 H中任一好3-点至多与两个2-点相邻.

假设断言5不成立, 即图H中存在好3-点v与三个2-点相邻. 则G包含与图5中G_6同构的子图. 令$G'=G-\{vv_1\}$, 图G'存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ', 重染vv_2, vv_3, v_1, v_2, v_3的颜色, 记vv_1, vv_2, vv_3, v_1, v_2, v_3. v所分配的颜色分别为x_1, x_2, $\cdots$, x_7. 由染色条件得多项式

$Q_4(x_1,x_2,\cdots,x_7)=\prod\limits_{i=1}^{3}(x_i-\phi'(u_iv_i))(x_{i+3}-\phi'(u_iv_i))(x_{i+3}-\phi'(u_i))(x_i-x_7)(x_i-x_{i+3})(x_{i+3}-x_7)(x_i+x_{i+3}+\phi'(u_iv_i)-g'(u_i))\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)(x_1+x_2+x_7-x_6-\phi'(u_3v_3))(x_2+x_3+x_7-x_4-\phi'(u_1v_1))(x_1+x_3+x_7-x_5-\phi'(u_2v_2))(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_1))(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_2))(x_1+x_2+x_3+x_7-g'(u_3))(x_1+x_4-x_2-x_5+\phi'(u_1v_1)-\phi'(u_2v_2))(x_1+x_4-x_3-x_6+\phi'(u_1v_1)-\phi'(u_3v_3))(x_2+x_5-x_3-x_6+\phi'(u_2v_2)-\phi'(u_3v_3))$.

去掉Q_4中的常数得多项式

$\widetilde{Q_4}(x_1,x_2,\cdots,x_7)=x_1x_2x_3x_4^2x_5^2x_6^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_7)(x_2-x_3)(x_2-x_5)(x_2-x_7)(x_3-x_6)(x_3-x_7)(x_4-x_7)(x_5-x_7)(x_6-x_7)(x_2+x_3+x_7-x_4)(x_1+x_3+x_7-x_5)(x_1+x_2+x_7-x_6)(x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6)(x_1+x_2+x_3+x_7)^3(x_1+x_4-x_2-x_5)(x_1+x_4-x_3-x_6)(x_2+x_5-x_3-x_6)$.

易知$C_{\widetilde{Q_4}}(x_1^5x_2^5x_3^5x_4^4x_5^4x_6^4x_7^6)=C_{Q_4}(x_1^5x_2^5x_3^5x_4^4x_5^4x_6^4x_7^6)=b$, 对$\widetilde{Q_4}$用Matlab计算得$b=-18$, 由组合零点定理知, G存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ, 与G是极小反例矛盾, 即断言5成立.

断言6 H中任一坏3-点至多与1个2-点相邻.

假设断言6不成立, 即图H中存在坏3-点v与至少两个2-点相邻. 则G包含与图6中G_7同构的子图, 令$G'=G-\{uv\}$, 图G'存在7-$D(2)$-点和可区别全染色ϕ'. 重染vv_1, vv_2, v_1, v_2, v的颜色, 记v_1, v_2, vv_1, vv_2, v, uv分配的颜色分别为x_1, x_2, $\cdots$, x_6, 由染色条件得多项式

$Q_5(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\prod\limits_{i=1}^{2}(x_i-\phi'(u_iv_i))(x_i-\phi'(u_i))(x_{i+2}-\phi'(u_iv_i))(x_{i+2}-\phi'(vw))(x_i-x_{i+2})(x_i-x_5)(x_i+x_{i+2}+\phi'(u_iv_i)-g'(u_i))(x_6-\phi'(vw))(x_5-\phi'(w))(x_5-\phi'(vw))\prod\limits_{3\le i<j\le 6}(x_i-x_j)(x_3+x_5+x_6-x_2+\phi'(vw)-\phi'(u_2v_2))(x_4+x_5+x_6-x_1+\phi'(vw)-\phi'(u_1v_1))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(vw)-g'(w))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(vw)-g'(u_1))(x_1+x_3+\phi'(u_1v_1)-g'(w))(x_1+x_3-x_2-x_4+\phi'(u_1v_1)-\phi'(u_2v_2))(x_3+x_4+x_5+x_6+\phi'(vw)-g'(u_2))(x_2+x_4+\phi'(u_2v_2)-g'(w))$.

去掉Q_5中的常数得多项式

$\widetilde{Q_5}(x_1,x_2,\cdots,x_6)=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6(x_1-x_3)(x_1-x_5)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_5-x_6)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_1+x_3)^2(x_4+x_5+x_6-x_1)(x_3+x_4+x_5+x_6)^3(x_3+x_5+x_6-x_2)(x_2+x_4)^2(x_1+x_3-x_2-x_4)$.

系数$C_{\widetilde{Q_5}}(x_1^6x_2^5x_3^5x_4^5x_5^5x_6^5)=C_{Q_5}(x_1^6x_2^5x_3^5x_4^5x_5^5x_6^5)=b$, 对$\widetilde{Q_5}$用Matlab计算得$b=-15$, 由组合零点定理知, 图$G$存在7-$D(2)$-点和可区别全染色$\phi$, 与$G$是极小反例矛盾. 即断言6成立.

由断言1, 断言3和断言4及$\varDelta(G)=4$, 可知$\varDelta(H)\geq 3$. (2-点不相邻, 2-点在G和H中都是2-点, 故2-点邻点需是3^+点, 故$\varDelta(H)\geq 3$.)

对$\forall v\in V(H)$, 定义初始权$ch(v)=d_H(v)-\frac{5}{2}$, 则图H中所有点的权和为

$$\sum_{v\in V(H)}(d_H(v)-\tfrac{5}{2})=|V(H)|\times(\mathrm{ad}(H)-\tfrac{5}{2})\leq|V(H)|\times(\mathrm{mad}(H)-\tfrac{5}{2})<0.$$

给定如下权转移规则.

(R2) H中任一3^+点向其相邻的2-点转移权$\frac{1}{4}$.

设$ch'(v)$是权转移之后点v的新权, 下面检查图H的点的新权. 对于$\forall v\in V(H)$, 有下列几种情形.

若$d_H(v)=2$, 由断言4知$ch'(v)=ch(v)+2\times\frac{1}{4}=d_H(v)-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=2-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=0$.

若$d_H(v)=3$, 由断言5, 断言6知$ch'(v)\geq ch(v)-2\times\frac{1}{4}=3-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=0$.

若$d_H(v)=4$, 由(R2)知$ch'(v)\geq ch(v)-4\times\frac{1}{4}=4-\frac{5}{2}-1=\frac{1}{2}>0$.

综合上述分析, $\sum\limits_{v\in V(H)}ch'(v)\geq 0$, 与$\sum\limits_{v\in V(H)}ch'(v)=\sum\limits_{v\in V(H)}ch(v)<0$产生矛盾, 说明图$H$不存在, 因此图$G$也不存在, 定理3.1结论成立.

定理3.2　设G是$\varDelta(G)\geq 5$的单圈图, 则$\chi''_{2-\varSigma}(G)\leq\varDelta(G)+2$.

证　令圈$C_g=v_1v_2\cdots v_gv_1$, $E(G)-E(C_g)$表示与$v_i(1\leq i\leq g)$关联的不在圈上的边, 由引理2.1知$\chi''_{2-\varSigma}(G)\geq\varDelta(G)+1=6$, 根据单圈图$G$悬挂点的邻点是否在圈$C_g$上进行分类讨论.

情形1　悬挂点的邻点在圈C_g上. 不妨设$d(v_1)=\varDelta(G)$, 先对$E(C)$进行染色, 记染法为φ.

$g\equiv 1(\mod 4)$时, 对边v_1v_2, v_2v_3, $\cdots$, $v_{g-1}v_g$用色$1,3,4,2$进行循环染色, $\varphi(v_gv_1)=4$, 对点v_2, v_3, $\cdots$, v_{g-1}用色$2,1,3,4$进行循环染色, $\varphi(v_g)=1$, $\varphi(v_1)=3$.

$g\equiv 2(\mod 4)$时, 对边v_1v_2, v_2v_3, $\cdots$, $v_{g-1}v_g$用$1,3,4,2$循环染, 对点v_2, v_3, $\cdots$, v_g采用$2,1,3,4$循环染色, $\varphi(v_gv_1)=5$, $\varphi(v_1)=3$.

$g\equiv 0(\mod 4)$或$g\equiv 3(\mod 4)$时, 对边v_1v_2, v_2v_3, $\cdots$, v_gv_1用色$1,3,4,2$进行循环染, 点v_2, v_3, $\cdots$, v_g, v_1用色$2,1,3,4$进行循环染.

再对悬挂边进行染色, 在色集合$\{1,2,\cdots,\varDelta+2\}\backslash\{\varphi(v_{i-1}v_i),\varphi(v_iv_{i+1}),\varphi(v_i)\}$中选色, 对点$v_i$的其余关联边进行正常边染色, 在染色$\varphi$下, $\forall i(1\leq i\leq g)$, 与点v_i在2距离之内相关联的点有v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, 需保证这5个点色数和满足$D(2)$-点和可区别. 若这5个点均为最大度点, $C_{\varDelta+2}^{\varDelta+1}=\varDelta+2$, 当$\varDelta\geq 5$时, $\varDelta+2\geq 7$, 故该染色可将v_i与其2距离内的点色数和可区别. 当$2\leq d(v_i)\leq\varDelta-1$时, $C_{\varDelta+2}^{d(v_i)+1}>\varDelta+2$, 结合引理2.3可知该染色可将$v_i$与其2距离内的点色数和可区别.

对于图G中的1-点, 每个1-点需要2种不同色, $C_{\varDelta+1}^2=\frac{\varDelta^2+\varDelta}{2}$, 其中和值最小为3. 和最大值为$2\varDelta+1$, 可能性为$(2\varDelta-1)$种, $2\varDelta-1\geq\varDelta$, 不难发现1-点易染, 可得$\chi''_{2-\varSigma}(G)\leq\varDelta(G)+2$.

情形2　图G悬挂点的邻点不在圈C_g上.

若$d(v)\geq 2$且$v\notin V(C)$, 称v为图G圈外的点, 设P是图G圈C外点的个数. 对于一个悬挂点x, 设$d(x,C_g)=\min\{d(x,u)|u\in V(C_g)\}$, 令$x_0$是满足$d(x_0,C_g)=\max\{d(x,C_g)\}$的一个悬挂点, 设$v$是$x_0$的邻点, 则$v$只有一个邻点$w$是非悬挂点. 令$d(v)=k$, $k\geq 2$. 设x_1, x_2, $\cdots$, x_{k-2}是v的除w和x_0的邻点. 有$d(x_0)=d(x_1)=\cdots=d(x_{k-2})=1$, 设$y_1$, y_2, $\cdots$, $y_{d(w)-1}$是w的除了v的邻点. 对数P进行归纳, 当$P=0$时, 由情形1知结论成立. 假设外点个数为$P-1$时结论成立, 设G有$P(P\geq 1)$个外点, 令$G'=G-\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-2}\}$, 其中$k\leq\varDelta$. 不妨设$y_1$在圈$C$到$x_0$的最

长路上, 由归纳假设知: $\chi''_{2-\Sigma}(G') \le \Delta(G')+2$. 记染法为$f'$, 设$f'(y_1w)=\Delta+1$, $f'(wv)=c_1$, $f'(wy_i)=c_i(2\le i\le d(w)-1)$, $f'(w)=\Delta+2$. 下面根据k分两种情形, 将f'延拓为图G的一个$D(2)$-点和可区别全染色f.

情形2.1 $k<\Delta$.

当$k<\Delta$时, 点v若想满足$D(2)$-点和可区别全染色, 则需保证正常全染色情况下, v点与点w, y_1, y_2, $\cdots$, $y_{d(w)-1}$的色数和可区别. 此时最坏的情况是$d(v)=d(y_1)=\cdots=d(y_{d(w)-1})=k$, 构造色集合$\{1,2,\cdots,\Delta+2\}$, 从中选取$k+1$个元素给$k$度点相关联的元素进行着色, 共有$C_{\Delta+2}^{k+1}$个集合, 其中和最小值为$\frac{(k+2)(k+1)}{2}$, 和值最大为$\frac{(2\Delta+4-k)(k+1)}{2}$, 出现的不同和值数为$\frac{(2\Delta+4-k)(k+1)}{2}-\frac{(k+2)(k+1)}{2}+1=\Delta k-k^2+\Delta+2$, 对于$k$度点的个数有以下三种情况.

①$d(w)=\Delta$, $d(v)=k<\Delta$, $k\ge 2$, 此时最多有Δ个k度点需达到和可区别. 如果$\Delta k-k^2+\Delta+2<\Delta$, 则$\Delta k-k^2+2<0$, $\Delta<\frac{k^2-2}{k}=k-\frac{2}{k}$, 与$\Delta>k\ge 2$矛盾, 即$\Delta k-k^2+\Delta+2\ge\Delta$.

②$d(w)=k$, $k\ge 2$, 此时最多有$k+1$个k度点需达到和可区别. 如果$\Delta k-k^2+\Delta+2<k+1$, 则$\Delta<\frac{k^2+k-1}{k+1}=k-\frac{1}{k+1}$, 与$k<\Delta$矛盾, 即$\Delta k-k^2+\Delta+2\ge k+1$.

③$d(w)<\Delta$且$d(w)\ne k$, 此时最多有$|d(w)|$个k度点需达到和可区别. $|d(w)|$为点ω度数的数值. 如果$\Delta k-k^2+\Delta+2<|d(w)|$, 由于$|d(w)|$是正整数, 故$|d(w)|$最大值为$\Delta-1$, 则$\Delta k-k^2+\Delta+2<\Delta-1$, $\Delta<\frac{k^2-3}{k}$, $\Delta<k-\frac{3}{k}$, 与$k<\Delta$矛盾, 即$\Delta k-k^2+\Delta+2\ge|d(w)|$.

在染色f'的基础上, 通过对点v及其关联边进行染色, 并重染与y_1, y_2, $\cdots$, $y_{d(w)-1}$关联元素来构造染色f. 根据①, ②, ③以及引理2.3知, 出现的和值数为$(\Delta k-k^2+\Delta+2)$, 足够对图G中元素染色, 使其达到$D(2)$-点和可区别全染色.

若点y_i与v, w不是同度点, 在对点y_i与v相关联元素重新染色时, 不同色集合中色数之和的个数大于$(\Delta k-k^2+\Delta+2)$, 但所需满足$D(2)$-点和可区别全染色的点的个数却并未改变, 故$\chi''_{2-\Sigma}(G)\le\Delta(G)+2$.

情形2.2 $k=\Delta$.

由归纳得, 色数和$g_{G'}(w)\ne g_{G'}(y_i)$, 现对点v的关联边vx_0, vx_1, $\cdots$, vx_{k-2}染色. 令$f(vx_i)=z_i(1\le i\le\Delta-2)$, $f(vx_0)=z_{i+1}$, 记S_i表示z_i的可用颜色集, 则$|S_1|=(\Delta+2)-2=\Delta$, $|S_2|=\Delta$, $\cdots$, $|S_{i+1}|=\Delta$. 由染色条件得多项式

$$Q(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1})=\prod_{1\le m<n\le i+1}(z_m-z_n)\Big(\sum_{s=1}^{i+1}z_s+f'(wv)+f'(v)-g_{G'}(w)\Big)\prod_{k=1}^{d(w)-1}\Big(\sum_{s=1}^{i+1}z_s+f'(wv)+f'(v)-g_{G'}(y_k)\Big).$$

去掉$Q(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1})$中的常数得$\widetilde{Q}(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1})=\prod_{1\le m<n\le i+1}(z_m-z_n)(\sum_{s=1}^{i+1}z_s)^{d(w)}$.

令$\widetilde{Q}_1(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1})=\widetilde{Q}(z_1,z_2,\cdots,z_{i+1})\prod_{1\le m<n\le i+1}(z_m-z_n)(\sum_{s=1}^{i+1}z_s)^{\theta}=\prod_{1\le m<n\le i+1}(z_m-z_n)^2(\sum_{s=1}^{i+1}z_s)^{i+1}$, 由引理2.5得, 多项式系数$C_{\widetilde{Q}_1}((z_1z_2\cdots z_{i+1})^{i+1})\ne 0$. 则存在$s_1\in S_1$, $s_2\in S_2$, $\cdots$, s_{i+1}, $\in S_{i+1}$, 满足$\widetilde{Q}_1(s_1,s_2,\cdots,s_{i+1})\ne 0$, $\widetilde{Q}$是$\widetilde{Q}_1$的因式, 故$\widetilde{Q}(s_1,s_2,\cdots,s_{i+1})\ne 0$, 故

$$\chi''_{2-\Sigma}(G)\le\Delta(G)+2.$$

结合引理2.1与定理3.2可得推论.

推论 设G是$\Delta(G)\ge 5$的单圈图, 若图G存在两个距离不超过2的最大度点, 则$\chi''_{2-\Sigma}(G)=\Delta(G)+2$.

注 对于$D(2)$-点和可区别染色的研究属于图论中较新的问题, 目前已有的研究成果较少. 本文基于单圈图的结构性质, 从单圈图的最大度, 树高, 围长入手, 应用组合零点定理及权转移方法, 讨论了单圈图的$D(2)$-点和可区别染色问题, 并得到了单圈图的$D(2)$-点和可区别全色数.

参考文献:

[1] 姚京京, 徐常青. 最大度为3或4的图的邻和可区别全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(2): 9-13.

[2] Yu Xiaowei , Wang Guanghui , Wu Jianliang, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of subcubic graphs[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2017, 33(2): 252-262.

[3] 陈祥恩, 赵飞虎, 胡志涛, 等. 图的$D(2)$-点可区别一般边染色[J]. 高校应用数学学报, 2013, 28(2): 211-221.

[4] Zhang Zhongfu, Li Jingwen, Chen Xiang'en, et al. $D(\beta)$-vertex distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A(Mathematics), 2006, 49(10): 1430-1440.

[5] Pilśniak M, Woźniak. On the total-neighbor-distinguishing index by sums[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(3) : 771-782.

[6] Dong Aijun, Wang Guanghui. Neighbor sum distinguishing coloring of some graphs[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2013, 4(4): 1-12.

[7] Yao Jingjing, Yu Xiaowei, Wang Guanghui, et al. Neighbor sum distinguishing total coloring of 2-degenerate graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 34(1): 1-7.

[8] Xu Changqing, Li Jianguo, Ge Shan. Neighbor sum distinguishing total chromatic number of planar graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 33(2): 189-196.

[9] 谭钧铭, 强会英, 王洪申. 单圈图的邻和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(2): 78-83+91.

[10] Qu Cunquan, Wang Guanghui, Yan Guiying, et al. Neighbor sum distinguishing total choosability of planar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 32: 906-916.

[11] 强会英, 姚丽. 无K_4-子式图的2-距离和可区别边染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(11): 83-86.

[12] 贾秀卿, 文飞, 李泽鹏, 等. 双圈图的$D(2)$-点可区别边染色[J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(2): 236-252.

$D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring of unicyclic graphs

QIANG Hui-ying[1], LIU Huan[1], WANG Hong-shen[2]

(1. School of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Let ϕ be a proper total coloring of graph G, for any $u,v\in V(G)$, if $d_G(u,v)\leq 2$ such that $g(u)\neq g(v)$, where $g(u)=\phi(u)+\sum_{u\omega\epsilon E(G)}\phi(u\omega)$, then ϕ is the 2-distance sum distinguishing total coloring of graph G. The $D(2)$-vertex sum distinguishing total chromatic numbers $\chi''_{2-\Sigma}(G)$ of graph G is the smallest integer k such that the graph G has a $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring. This paper fully characterizes the $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring of unicyclic graphs by using combinatorial nullstellsatz and discharging method, and obtain their the $D(2)$-vertex sum distinguishing total chromatic numbers.

Keywords: unicyclic graph; total-coloring; $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring; discharging method

MR Subject Classification: 05C15