高校应用数学学报
2024, 39(3): 321-330

模糊集范畴中的拉回

刘文俊[1], 周　鑫[1,2*]

(1. 伊犁师范大学 数学与统计学院, 新疆伊宁 835000;

2. 伊犁师范大学　应用数学研究所, 新疆伊宁 835000)

摘　要: 运用模糊理论的方法和原理, 首先给出了模糊集范畴Set(L)的定义, 并证明了范畴Set(L)中存在拉回. 其次研究了范畴Set(L)双拉回的性质和单态射的性质. 最后对于三类特殊的拉回进行了探讨.

关键词: 模糊集; 范畴; 拉回

中图分类号: O159

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)03-0321-10

§1　引　言

Zadeh[1]引入了模糊集的概念, 模糊集理论开始得到了人们的重视. Goguen[2]引入了L-模糊集的概念, 给出了范畴Set(L)的定义, 其中L是完全分配格. 当完全分配格L是单点集时, 范畴Set(L)就是集合范畴, 当完全分配格$L = [0, 1]$时, 范畴Set(L)的对象是模糊集. 一些学者也给出了模糊集范畴不同的定义, 例如Negoită[3]等人引入了几类模糊集范畴和模糊结构. 汪培庄[4]发表了关于模糊集范畴几种定义方式的综述文章. Walker[5]引入了一类模糊集范畴, 同时也给出了这类模糊集范畴中的乘积, 等值子的表示. 郑艳霞等人[6]定义了一类模糊集范畴, 证明了该模糊集范畴中的乘积, 等值子, 极限等存在, 并给出它们的结构. 王明璇[7]研究了一类模糊集范畴中的始对象, 终对象, 乘积, 等值子等方面的构造.

Eilenberg等人[8]引入了范畴的概念. Grothendieck发表了里程碑式的著作[9], 标志着范畴论在代数几何的公理化过程中得到了发展. 自此范畴论被广泛运用同调代数, 代数几何, 模型论, 不确定数学等数学分支. 拉回是范畴论的基本概念之一, 拉回在某些具体范畴上的研究已取得了很多重要的成果. Porselvi等人[10]在一类模糊集范畴中引入了拉回的概念, 并证明了其的存在性和唯一性. Liang[11]引入了L-模糊quantales范畴中拉回的定义, 研究了L-模糊quantales范畴中拉回的性质. 在模糊集范畴中的拉回的研究相对于乘积, 等值子较少, 不够完善.

本文将经典范畴的拉回推广到范畴Set(L)的拉回, 首先给出范畴Set(L)的拉回的定义, 得到范畴Set(L)中拉回的存在性, 唯一性定理. 其次讨论范畴Set(L)中拉回的单满, 双拉回性质. 最

收稿日期: 2023-07-01　　修回日期: 2024-03-17

*通讯作者, E-mail: zhoux566@nenu.edu.cn

基金项目: 新疆伊犁州科技计划(YZ2022Y010); 伊犁师范大学博士科研启动基金(2021YSBS011); 伊犁师范大学提升学科综合实力专项项目(2022XKZY08); 伊犁师范大学科研创新团队项目(CXZK2021014)

后给出范畴Set(L)中特殊情况拉回的例子, 为进一步讨论范畴Set(L)卡式闭等范畴性质做了有益的探索.

§2 预备知识

定义2.1[12] 若偏序集$(L,\leq)$的任意两个元素a,b既有最小上界$a\vee b$又有最大下界$a\wedge b$, 则称$(L,\leq,\wedge,\vee)$是一个格, 简记为L. 若格L的每一个子集S有最大元$\bigvee S$, 最小元$\bigwedge S$, 则称它是一个完备格. 其中$\bigvee S,\bigwedge S$分别表示S中所有元素的最小上界, 最大下界. 特别地, $\bigvee\varnothing$和$\bigwedge\varnothing$分别表示L的最小元0和最大元1.

定义2.2[2] 设是L一个完备格, Set是集合范畴, 则L-模糊集合范畴Set(L)定义如下.

(1) 对象: 序对(X,A), 其中$X\in Ob(\mathrm{Set})$, $A:X\to L$为集合X的L-模糊子集;

(2) 态射: 序对$(f,f^*):(X,A)\to(Y,B)$, 其中$f:X\to Y$是集合A到集合B的映射, $f^*:A\to B$由f诱导且满足$A\leq B\circ f$;

(3) 复合: 集合映射的复合诱导;

(4) 单位: 对任意对象(X,A), 有$1_{(X,A)}=(1_X,1_A^*)$.

定义2.3[13] 在范畴$\mathcal{C}$中, 若任意的对象X到对象T有且仅有唯一态射$u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,T)$, 则$T$为范畴$\mathcal{C}$的终对象.

例2.1 在范畴Set中, 任何单元素集合$\{*\}$都是一个终对象.

定义2.4[13] 在范畴$\mathcal{C}$中, 态射$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $\{f,g\}$的拉回是指一个对象$X\times_Z Y$和一对态射p_1, p_2, 记作$\{X\times_Z Y,p_1,p_2\}$, 简记为$X\times_Z Y$, 满足$f\circ p_1=g\circ p_2$, 且对任意的对象W及任意的$m_1\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, 任意的$m_2\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y)$, 当$f\circ m_1=g\circ m_2$时, 存在唯一的$u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X\times_Z Y)$使$p_1\circ u=m_1$, $p_2\circ u=m_2$, 如图1所示.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_1"'] & & \\
& X\times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

图1

定义2.5[13] 设$X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 若态射$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g,h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$, 当$f\circ g=f\circ h$ 时, 有$g=h$, 则f是单态射.

例2.2 设$X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, 若$X\bigcup Y$是$X$与$Y$的并, $X\bigcap Y$是X与Y的交, 则$X\xrightarrow{f}X\bigcup Y\xleftarrow{g}Y$存在拉回$X\bigcap Y$.

例2.3 设$X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, 若$T$是范畴Set的终对象, 则$X\xrightarrow{f}T\xleftarrow{g}Y$ 存在拉回$X\times Y$.

例2.4 设$X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, 态射$f\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X,Z)$. 若$Y$是$Z$的一个子集, $f^{-1}(Y)$是Y在f下的原像, $i\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y,Z)$, i是嵌入映射, 则$X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{i}Y$存在拉回$f^{-1}(Y)$.

定理2.1[14] 在范畴$\mathcal{C}$中, 态射$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, 对于$\{f,g\}$的拉回$\{X\times_Z Y,p_1,p_2\}$, 若$f$(或$g$)是单态射, 则$p_2$(或$p_1$)也是单态射, 如图2所示.

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

图2

定理2.2[14] 设$X, Y, Z, M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 态射$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$, 若$Y \xrightarrow{h} M \xleftarrow{f} Z$存在拉回$Y \times_M Z$, $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$存在拉回$X \times_Y (Y \times_M Z)$, 则$X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$存在拉回$X \times_Y (Y \times_M Z)$, 如图3所示.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y (Y \times_M Z) \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_M Z \arrow[r] \arrow[d, "p_4"] & Z \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] & M \end{tikzcd}$$

图3

定理2.3[14] 设$X, Y, Z, M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 态射$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$, 若$X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$存在拉回$X \times_Y (Y \times_M Z)$. 其中p_2是单态射, 则$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$存在拉回$X \times_Y (Y \times_M Z)$, 如图4所示.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y (Y \times_M Z) \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_M Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_4"] & Z \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] & M \end{tikzcd}$$

图4

§3 主要成果

定义3.1 在范畴Set(L)中, 态射$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X, A), (Z, C))$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y, B), (Z, C))$, $\{f, g\}$在模糊集范畴Set(L)中的拉回是指一个对象$(X \times_Z Y, D)$和一对态射p_1, p_2, 记作$\{(X \times_Z Y, D), p_1, p_2\}$, 简记为$(X \times_Z Y, D)$, 满足$f \circ p_1 = g \circ p_2$, 且对任意的对象$(W, E)$及任意的$m_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W, E), (X, A))$, 任意的$m_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W, E), (Y, B))$, 当$f \circ m_1 = g \circ m_2$时, 存在唯一的$u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D))$, 使$p_1 \circ u = m_1$, $p_2 \circ u = m_2$, 如图5所示.

$$\begin{tikzcd} (W, E) \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_1"'] & & \\ & (X \times_Z Y, D) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & (Y, B) \arrow[d, "g"] \\ & (X, A) \arrow[r, "f"] & (Z, C) \end{tikzcd}$$

图5

定理3.1 设$(X,A),(Y,B),(Z,C)\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, 态射$f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(Z,C)), g\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y,B),(Z,C))$, p_1, p_2分别是$X\times_Z Y$到X,Y上的投射. 若$(X,A)\xrightarrow{f}(Z,C)\xleftarrow{g}(Y,B)$存在拉回$(X\times_Z Y,D)$, 当且仅当

(1) $X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$存在拉回$X\times_Z Y$;

(2) $D(x,y)=A(x)\wedge B(y)$.

证 充分性 在范畴Set中, 由于

$$X\xrightarrow{f}Z\xleftarrow{g}Y$$

存在拉回$X\times_Z Y, \forall W\in Ob(\mathrm{Set})$, $m_1\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,X)$, $m_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,Y)$, 满足$f\circ m_1=g\circ m_2$, 则存在唯一的态射

$$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,X\times_Z Y)$$

使得$m_1=p_1\circ u, m_2=p_2\circ u$, 即图6可交换.

由D的定义可知, 任意$(x,y)\in X\times Y$有

$$D(x,y)=A(x)\wedge B(y)\le A(x)=A\circ p_1(x,y),$$
$$D(x,y)=A(x)\wedge B(y)\le B(y)=B\circ p_2(x,y),$$

得$p_1\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X\times_Z Y,D),(X,A))$, $p_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X\times_Z Y,D),(Y,B))$. 设$(W,E)\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, $m_1\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X,A))$, $m_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(Y,B))$, 满足: $f\circ m_1=g\circ m_2$, 作

$$u:W\to X\times_Z Y,\ w\to (m_1(w),m_2(w)).$$

下面证明$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D))$. 任意$w\in W$, 有$E(w)\le A\circ m_1(w)$, $E(w)\le B\circ m_2(w)$, 进而

$$E(w)\le A\circ m_1(w)\wedge B\circ m_2(w)=D\circ u(m_1(w),m_2(w)),$$

即$E(w)\le D\circ u(w)$, 因此$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D))$.

由图6中的u唯一可知, 图7中的u唯一, 故在范畴Set(L)中

$$(X,A)\xrightarrow{f}(Z,C)\xleftarrow{g}(Y,B)$$

存在拉回$(X\times_Z Y,D)$.

必要性 (1) 先证存在性: 在范畴Set(L)中, 由于

$$(X,A)\xrightarrow{f}(Z,C)\xleftarrow{g}(Y,B)$$

存在拉回$(X\times_Z Y,D)$, 任意$(W,E)\in Ob(\mathrm{Set}(L))$, $m_1\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X,A))$, $m_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(Y,B))$, 满足: $f\circ m_1=g\circ m_2$, 则存在唯一的态射

$$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D)),$$

使得$m_1=p_1\circ u$, $m_2=p_2\circ u$, 即图7可交换. 满足图7的态射显然满足图6, 即图6中$m_1=p_1\circ u$, $m_2=p_2\circ u$可交换.

再证唯一性: 若存在态射$u'\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}(W,X\times_Z Y)$, 满足$m_1=p_1\circ u'$, $m_2=p_2\circ u'$, 由于$m_1=p_1\circ u$, $m_2=p_2\circ u$, 故$p_1\circ u'=p_1\circ u$, $p_2\circ u'=p_2\circ u$, 因为在图7中p_1, p_2是投射, 所以$u'=u$, 图6中的u唯一.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_1"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

图6

$$\begin{tikzcd}
(W,E) \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_1"'] & & \\
& (X \times_Z Y, D) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & (Y,B) \arrow[d, "g"] \\
& (X,A) \arrow[r, "f"] & (Z,C)
\end{tikzcd}$$

图7

(2) 设$X \times_Z Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, $p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times_Z Y, X)$, $p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X \times_Z Y, Y)$, 令$D^*(x,y) = A(x) \wedge B(y)$, 对任意$(x,y) \in X \times Y$有

$$D^*(x,y) \leq A \circ p_1(x,y),\ D^*(x,y) \leq B \circ p_2(x,y),$$

所以

$$p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (X,A)), \quad p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (Y,B)).$$

由于

$$(X,A) \xrightarrow{f} (Z,C) \xleftarrow{g} (Y,B)$$

存在拉回$(X \times_Z Y, D)$, 则在图8存在唯一的态射

$$u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (X \times_Z Y, D)),$$

有$p_1 = p_1 \circ u$, $p_2 = p_2 \circ u$, 则有$p_1 \circ 1_{X \times_Z Y} = p_1 \circ u$, $p_2 \circ 1_{X \times_Z Y} = p_2 \circ u$. 因为$p_1$, p_2是投射, 所以$u = 1_{X \times_Z Y}$, $D^* \leq D \circ u = D \circ 1_{X \times_Z Y}$, 由

$$p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}((X \times_Z Y, D), (X,A)), \quad p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}((X \times_Z Y, D), (Y,B))$$

可得$D(x,y) \leq A \circ p_1(x,y)$, $D(x,y) \leq B \circ p_2(x,y)$, 即

$$D(x,y) \leq A \circ p_1(x,y) \wedge B \circ p_2(x,y) = D^*(x,y).$$

综上所述$D(x,y) = D^*(x,y)$.

$$\begin{tikzcd}
(X \times_Z Y, D^*) \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& (X \times_Z Y, D) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & (Y,B) \arrow[d, "g"] \\
& (X,A) \arrow[r, "f"] & (Z,C)
\end{tikzcd}$$

图8

定理3.2 设$(X,A), (Y,B), (Z,C), (M,F) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, 态射$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Z,C),(M,F))$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(Y,B))$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y,B),(M,F))$, 若

$$(Y,B) \xrightarrow{h} (M,F) \xleftarrow{f} (Z,C)$$

存在拉回$(Y \times_M Z, G)$,

$$(X,A) \xrightarrow{g} (Y,B) \xleftarrow{p_4} (Y \times_M Z, G)$$

存在拉回$(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 则

$$(X,A)\xrightarrow{h\circ g}(M,F)\xleftarrow{f}(Z,C)$$

存在拉回$(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$, 当且仅当

(1) $Y\xrightarrow{h}M\xleftarrow{f}Z$存在拉回$Y\times_M Z$, $X\xrightarrow{g}Y\xleftarrow{p_4}Y\times_M Z$存在拉回$X\times_Y(Y\times_M Z)$, 则$X\xrightarrow{h\circ g}M\xleftarrow{f}Z$存在拉回$X\times_Y(Y\times_M Z)$;

(2) $H(x,y,z)=A(x)\wedge B(y)\wedge C(z)$.

证 充分性 在图9中, 任意$W\in\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, $m_1\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,Z)$, $m_3\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,X)$, 则$f\circ m_1=h\circ g\circ m_3$. 令$m_2=g\circ m_3\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,Y)$, 则$h\circ m_2=h\circ g\circ m_3$, 可得$f\circ m_1=h\circ m_2$.

因为

$$Y\xrightarrow{h}M\xleftarrow{f}Z$$

存在拉回$(Y\times_M Z,G)$, 则存在唯一的态射

$$\varepsilon\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,Y\times_M Z),$$

使得$m_1=p_2\circ\varepsilon$, $m_2=p_4\circ\varepsilon$, 所以$p_4\circ\varepsilon=m_2=g\circ m_3$.

因为

$$X\xrightarrow{g}Y\xleftarrow{p_4}Y\times_M Z$$

存在拉回$X\times_Y(Y\times_M Z)$, 则存在唯一态射$u\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,X\times_Y(Y\times_M Z))$, 使得$\varepsilon=p_1\circ u$, $m_3=p_3\circ u$, 所以$m_1=p_2\circ\ \varepsilon=(p_2\circ\ p_1)\circ u$, 即图9交换. 满足图9的态射显然满足图10, 故图10中$m_1=p_2\circ\ \varepsilon=(p_2\circ\ p_1)\circ u$可交换.

由于

$$H(x,y,z)=A(x)\wedge B(y)\wedge C(z),$$

由定理3.1可得

$$(Y,B)\xrightarrow{h}(M,F)\xleftarrow{f}(Z,C),\ (X,A)\xrightarrow{g}(Y,B)\xleftarrow{p_4}(Y\times_M Z,G)$$

分别存在拉回$(Y\times_M Z,G)$, $(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$, 此处$G(y,z)=B(y)\wedge C(z)$. 从而得到

$$(X,A)\xrightarrow{h\circ g}(M,F)\xleftarrow{f}(Z,C)$$

存在拉回$(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[ddrr, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_3"'] \arrow[drrr, bend left, "m_1"] & & & \\
& X\times_Y(Y\times_M Z) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_3"] & Y\times_M Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_4"] & Z \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] & M
\end{tikzcd}$$

图9

$$\begin{tikzcd}
(W,E) \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[drrr, bend left, "m_1"] \arrow[ddrr, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_3"'] & & & \\
& (X\times_Y(Y\times_M Z),H) \arrow[r,"p_1"] \arrow[d,"p_3"'] & (Y\times_M Z,G) \arrow[r,"p_2"] \arrow[d,"p_4"'] & (Z,C) \arrow[d,"f"] \\
& (X,A) \arrow[r,"g"] & (Y,B) \arrow[r,"h"] & (M,F)
\end{tikzcd}$$

图10

必要性 由定理3.1可得.

定理3.3 设$(X,A),(Y,B),(Z,C),(M,F)\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, 态射 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Z,C),(M,F)), g\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(Y,B))$, $h\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y,B),(M,F))$, 若

$$(X,A)\xrightarrow{h\circ g}(M,F)\xleftarrow{f}(Z,C)$$

存在拉回$(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$, 其中$p_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y\times_M Z,G),(Z,C))$是单态射, 则

$$(X,A)\xrightarrow{g}(Y,B)\xleftarrow{p_4}(Y\times_M Z,G)$$

存在拉回$(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$, 当且仅当

(1) $X\xrightarrow{h\circ g}M\xleftarrow{f}Z$存在拉回$X\times_Y(Y\times_M Z)$, 其中$p_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Y\times_M Z,Z)$是单态射;

(2) $H(x,y,z)=A(x)\wedge B(y)\wedge C(z)$.

证 充分性 在范畴Set中, 任意$Z\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$, $\varepsilon\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,Y\times_M Z)$, $m_3\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(Z,X)$, 且$p_4\circ\varepsilon=g\circ m_3$, 令$m_1=p_2\circ\varepsilon$, 则

$$f\circ m_1=f\circ p_2\circ\varepsilon=h\circ p_4\circ\varepsilon=h\circ g\circ m_3.$$

因为

$$X\xrightarrow{h\circ g}M\xleftarrow{f}Z$$

存在拉回$X\times_Z(Y\times_M Z)$, 则存在唯一的态射

$$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(W,X\times_Y(Y\times_M Z))$$

使得$m_1=p_2\circ p_1\circ u$, $m_3=p_3\circ u$, 所以$p_2\circ\varepsilon=m_1=p_2\circ p_1\circ u$. 因为$p_2$是单态射, 可得$\varepsilon=p_1\circ u$, 即图11可交换, 因此

$$X\xrightarrow{g}Y\xleftarrow{p_4}Y\times_M Z$$

存在拉回$X\times_Y(Y\times_M Z)$. 满足图11的态射显然满足图12, 即图12中$\varepsilon=p_1\circ u$可交换.
由于

$$H(x,y,z)=A(x)\wedge B(y)\wedge C(z),$$

由定理3.1可得

$$(X,A)\xrightarrow{g}(Y,B)\xleftarrow{p_4}(Y\times_M Z,G)$$

存在拉回$(X\times_Y(Y\times_M Z),H)$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "\varepsilon"] \arrow[drrr, bend left, "m_1"] \arrow[ddrr, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_3"'] & & & \\
& X\times_Y(Y\times_M Z) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_3"'] & Y\times_M Z \arrow[r, hook, "p_2"] \arrow[d, "p_4"'] & Z \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r, "h"] & M
\end{tikzcd}$$

图11

$$\begin{tikzcd}
(W,E) \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "\varepsilon"] \arrow[drrr, bend left, "m_1"] \arrow[ddrr, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_3"'] & & & \\
& (X\times_Y(Y\times_M Z),H) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_3"'] & (Y\times_M Z,G) \arrow[r, hook, "p_2"] \arrow[d, "p_4"'] & (Z,C) \arrow[d, "f"] \\
& (X,A) \arrow[r, "g"] & (Y,B) \arrow[r, "h"] & (M,F)
\end{tikzcd}$$

图12

必要性 由定理3.1可得.

定理3.4 设$(X,A),(Y,B),(Z,C)\in$Ob(Set(L)), 态射$f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(Z,C))$, $g\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y,B),(Z,C))$. 若$(X,A)\xrightarrow{f}(Z,C)\xleftarrow{g}(Y,B)$存在拉回$(X\times_Z Y,D)$, p_1,p_2分别是$X\times_Z Y$到X,Y上的投射, f是单态射, p_2 是单态射, 当且仅当: f为单射.

证 *充分性* 在图13中, 若f不是单态射, 且存在$m,h\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((N,0),(X,A))$, 由$f\circ m=f\circ h$可能有$m\neq h$, 此时存在$n\in N$, 使得$m(n)\neq h(n)$, 又由于$f$ 是单射, 可知$f\circ m(n)\neq f\circ h(n)$, 即$f\circ m\neq f\circ h$, 因此$f$是Set($L$)中的单态射.

在图14中, 设$u_1,u_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D))$, 且$p_2\circ u_1=p_2\circ u_2$, 则

$$f\circ p_1\circ u_1=g\circ p_2\circ u_1=g\circ p_2\circ u_2=f\circ p_1\circ u_2.$$

因为是f单态射, 则$p_1\circ u_1=p_1\circ u_2$. 令$m_1=p_1\circ u_1$, $m_2=p_2\circ u_1$, 则

$$f\circ m_1=f\circ p_1\circ u_1=g\circ p_2\circ u_1=g\circ m_2.$$

存在唯一的态射

$$u\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D)),$$

使$m_1=p_1\circ u$, $m_2=p_2\circ u$.

因为

$$u_1,u_2\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((W,E),(X\times_Z Y,D)),$$

且$m_1=p_1\circ u_1=p_1\circ u_2=p_1\circ u$, $m_2=p_2\circ u_1=p_2\circ u_2=p_2\circ u$, 由唯一性得$u_1=u_2$, 所以$p_2$是单态射.

$$\begin{tikzcd}
(N,0) \arrow[r, shift left, "m"] \arrow[r, shift right, "h"'] & (X,A) \arrow[r, "f"] & (Z,C)
\end{tikzcd}$$

图13

$$\begin{tikzcd}
(W,E) \arrow[dr, bend right, "u_1"'] \arrow[dr, bend left, "u_2"] \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "m_2"] \arrow[ddr, bend right, "m_1"'] & & \\
& (X \times_Z Y, D) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & (Y,B) \arrow[d, "g"] \\
& (X,A) \arrow[r, "f"] & (Z,C)
\end{tikzcd}$$

图14

必要性 若f是$\mathrm{Set}(L)$中的单态射, 即由$f \circ m = f \circ h$可得$m = h$. 若f不是单射, 即存在$x, y \in X$, $x \neq y$, 但是$f(x) = f(y)$. 任意$n \in N$, 取$(N, 0) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$,

$$m : N \to X,\ n \mapsto x, \qquad h : N \to X,\ n \mapsto y,$$

取$0 : N \to L$, $n \mapsto 0$. 则

$$0(n) = 0 \leq A(m(n)), \quad 0(n) = 0 \leq A(h(n)).$$

因此$m \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((N,0),(X,A))$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((N,0),(X,A))$, 但是$m(n) \neq h(n)$, 而$f \circ m = f \circ h$, 因此f不是单态射, 矛盾, 因此f是单射.

定义3.2 在范畴$\mathrm{Set}(L)$中, 若任意的对象(X, A)到对象$(T, 1)$有且仅有唯一态射

$$u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(T,1)),$$

则$(T, 1)$为范畴$\mathrm{Set}(L)$的终对象.

性质3.1 设$(X,A),(Y,B),(Z,C) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, $(X \bigcup Y, C)$是(X, A)与(Y, B)的并, 其中当$t \in X \bigcup Y$时, 若$t \in X$, 有 $C(t) = A(t)$, 若$t \in Y$时, 有$C(t) = B(t)$. $(X \bigcap Y, D)$是(X, A)与(Y, B)的交, $D(t) = A(t) \wedge B(t)$, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (X \bigcup Y, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回$(X \bigcap Y, D)$.

证 由例2.2可知, $X \bigcup Y$是X和Y的并, $X \bigcap Y$是X和Y的交, 则$X \xrightarrow{f} X \bigcup Y \xleftarrow{g} Y$存在拉回$X \bigcap Y$. 再由定理3.1可得$(X, A) \xrightarrow{f} (X \bigcup Y, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$存在拉回$(X \bigcap Y, D)$.

性质3.2 设$(X,A),(Y,B),(T,1) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, 若$(T, 1)$是范畴$\mathrm{Set}(L)$的终对象, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (T, 1) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回$(X \times Y, D)$, 其中$D(x, y) = A(x) \wedge B(y)$.

证 由例2.3可知, 若T 是范畴Set的终对象, 则$X \xrightarrow{f} T \xleftarrow{g} Y$存在拉回$X \times Y$. 再由定理3.1可得$(X, A) \xrightarrow{f} (T, 1) \xleftarrow{g} (Y, B)$存在拉回$(X \times Y, D)$.

性质3.3 $(X,A),(Y,B),(Z,C) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(L))$, 态射$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((X,A),(Z,C))$, $i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(L)}((Y,B),(Z,C))$, i 是嵌入映射. 若Y是Z 的一个子集, $f^{-1}(Y)$是Y在f下的原像, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{i} (Y, B)$$

存在拉回$(f^{-1}(Y), D)$, 其中$D(x, y) = A(x)$.

证 由例2.4可知, 若Y是Z的一个子集, $f^{-1}(Y)$是Y在f下的原像, 则$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{i} Y$存在拉

回$f^{-1}(Y)$. 再由定理3.1可得$(X,A)\xrightarrow{f}(Z,C)\xleftarrow{i}(Y,B)$存在拉回
$$(f^{-1}(Y),D),\ D(x,y)=A(x)\wedge B(y)=A(x).$$

§4 结论

拉回是范畴论中的一个非常重要的概念, 它与极限理论, 完备性等密切相关. 本文给出了模糊集范畴Set(L)中拉回的定义, 并证明了拉回的存在性和唯一性定理. 讨论了一些特殊拉回的性质, 且例举了三类特殊的拉回. 通过拉回结构所具有的泛性质, 可以用来讨论等值子, 极限等范畴问题, 更进一步研究模糊集范畴中的完备性等相关性质。

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Goguen J A. L-fuzzy sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967, 18(1): 145-174.

[3] Negoită C V, Ralescu D A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis[M]. Basel: Birkhuser, 1975.

[4] 汪培庄. 模糊集与模糊集范畴[J]. 数学进展, 1982, 11: 1-18.

[5] Walker C L. Categories of fuzzy sets[J]. Soft Computing, 2004, 8: 299-304.

[6] 郑艳霞, 王明璇, 樊磊. 模糊集范畴的性质[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2011, 33(1): 7-10.

[7] 王明璇. 关于一种L-模糊集范畴的探讨和研究[D]. 北京: 中央民族大学, 2011.

[8] Eilenberg S, MacLane S. General theory of natural equivalences[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1945, 58: 231-294.

[9] Grothendieck A. Sur quelques points d′algèbre homologique[J]. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 1957, 9(2): 119-183.

[10] Porselvi Agnes A R, Sivaraj D, Tamizh Chelvam T. On a new category of fuzzy sets[J]. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2010, 2(4): 73-83.

[11] Liang S. The category of L-fuzzy quantales[J]. Studies in Mathematical Sciences, 2012, 4(2): 10-16.

[12] Birkhoff G. Lattice Theory[M]. Providence: American Mathematical Society, 1940.

[13] 李桃生. 范畴与同调代数基础[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988.

[14] 贺伟. 范畴论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

Pullbacks in the category of fuzzy Sets

LIU Wen-jun[1], ZHOU Xin[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China;
2. Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining 835000, China)

Abstract: Using the method and principle of fuzzy theories, firstly, the definition of fuzzy sets category Set(L) are given, and the existence of pullback in the category Set(L) are proved. Secondly, the properties of double pullback and monomorphism of category Set(L) are studied. Finally, three kinds of special pullbacks are discussed.

Keywords: fuzzy set; category; pullback

MR Subject Classification: 06A75; 18A30