

模糊集范畴中的拉回

刘文俊¹, 周鑫^{1,2*}

(1. 伊犁师范大学 数学与统计学院, 新疆伊宁 835000;

2. 伊犁师范大学 应用数学研究所, 新疆伊宁 835000)

摘要: 运用模糊理论的方法和原理, 首先给出了模糊集范畴 $\text{Set}(L)$ 的定义, 并证明了范畴 $\text{Set}(L)$ 中存在拉回. 其次研究了范畴 $\text{Set}(L)$ 双拉回的性质和单态射的性质. 最后对于三类特殊的拉回进行了探讨.

关键词: 模糊集; 范畴; 拉回

中图分类号: O159

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2024)03-0321-10

§1 引言

Zadeh^[1]引入了模糊集的概念, 模糊集理论开始得到了人们的重视. Goguen^[2]引入了 L -模糊集的概念, 给出了范畴 $\text{Set}(L)$ 的定义, 其中 L 是完全分配格. 当完全分配格 L 是单点集时, 范畴 $\text{Set}(L)$ 就是集合范畴, 当完全分配格 $L = [0, 1]$ 时, 范畴 $\text{Set}(L)$ 的对象是模糊集. 一些学者也给出了模糊集范畴不同的定义, 例如Negoiță^[3]等人引入了几类模糊集范畴和模糊结构. 汪培庄^[4]发表了关于模糊集范畴几种定义方式的综述文章. Walker^[5]引入了一类模糊集范畴, 同时也给出了这类模糊集范畴中的乘积, 等值子的表示. 郑艳霞等人^[6]定义了一类模糊集范畴, 证明了该模糊集范畴中的乘积, 等值子, 极限等存在, 并给出它们的结构. 王明璇^[7]研究了一类模糊集范畴中的始对象, 终对象, 乘积, 等值子等方面的构造.

Eilenberg等人^[8]引入了范畴的概念. Grothendieck发表了里程碑式的著作^[9], 标志着范畴论在代数几何的公理化过程中得到了发展. 自此范畴论被广泛运用同调代数, 代数几何, 模型论, 不确定数学等数学分支. 拉回是范畴论的基本概念之一, 拉回在某些具体范畴上的研究已取得了很多重要的成果. Porselvi等人^[10]在一类模糊集范畴中引入了拉回的概念, 并证明了其的存在性和唯一性. Liang^[11]引入了 L -模糊quantales范畴中拉回的定义, 研究了 L -模糊quantales范畴中拉回的性质. 在模糊集范畴中的拉回的研究相对于乘积, 等值子较少, 不够完善.

本文将经典范畴的拉回推广到范畴 $\text{Set}(L)$ 的拉回, 首先给出范畴 $\text{Set}(L)$ 的拉回的定义, 得到范畴 $\text{Set}(L)$ 中拉回的存在性, 唯一性定理. 其次讨论范畴 $\text{Set}(L)$ 中拉回的单满, 双拉回性质. 最

收稿日期: 2023-07-01 修回日期: 2024-03-17

*通讯作者, E-mail: zhoux566@nenu.edu.cn

基金项目: 新疆伊犁州科技计划(YZ2022Y010); 伊犁师范大学博士科研启动基金(2021YSBS011); 伊犁师范大学提升学科综合实力专项项目(2022XKZY08); 伊犁师范大学科研创新团队项目(CXZK2021014)

后给出范畴 $\text{Set}(L)$ 中特殊情况拉回的例子, 为进一步讨论范畴 $\text{Set}(L)$ 卡式闭等范畴性质做了有益的探索.

§2 预备知识

定义2.1^[12] 若偏序集 $(L, \leq)$ 的任意两个元素 a, b 既有最小上界 $a \vee b$ 又有最大下界 $a \wedge b$, 则称 $(L, \leq, \wedge, \vee)$ 是一个格, 简记为 L . 若格 L 的每一个子集 S 有最大元 $\bigvee S$, 最小元 $\bigwedge S$, 则称它是一个完备格. 其中 $\bigvee S, \bigwedge S$ 分别表示 S 中所有元素的最小上界, 最大下界. 特别地, $\bigvee \emptyset$ 和 $\bigwedge \emptyset$ 分别表示 L 的最小元0和最大元1.

定义2.2^[2] 设 L 是一个完备格, Set 是集合范畴, 则 L -模糊集合范畴 $\text{Set}(L)$ 定义如下.

- (1) 对象: 序对 (X, A) , 其中 $X \in \text{Ob}(\text{Set})$, $A: X \rightarrow L$ 为集合 X 的 L -模糊子集;
- (2) 态射: 序对 $(f, f^*): (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 其中 $f: X \rightarrow Y$ 是集合 A 到集合 B 的映射, $f^*: A \rightarrow B$ 由 f 诱导且满足 $A \leq B \circ f$;
- (3) 复合: 集合映射的复合诱导;
- (4) 单位: 对任意对象 (X, A) , 有 $1_{(X, A)} = (1_X, 1_A^*)$.

定义2.3^[13] 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 若任意的对象 X 到对象 T 有且仅有唯一态射 $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$, 则 T 为范畴 $\mathcal{C}$ 的终对象.

例2.1 在范畴 Set 中, 任何单元素集合 $\{*\}$ 都是一个终对象.

定义2.4^[13] 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $\{f, g\}$ 的拉回是指一个对象 $X \times_Z Y$ 和一对态射 p_1, p_2 , 记作 $\{X \times_Z Y, p_1, p_2\}$, 简记为 $X \times_Z Y$, 满足 $f \circ p_1 = g \circ p_2$, 且对任意的对象 W 及任意的 $m_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, 任意的 $m_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$, 当 $f \circ m_1 = g \circ m_2$ 时, 存在唯一的 $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X \times_Z Y)$ 使 $p_1 \circ u = m_1$, $p_2 \circ u = m_2$, 如图1所示.

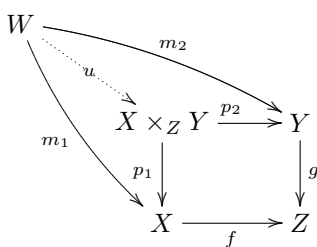


图1

定义2.5^[13] 设 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 若态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, 当 $f \circ g = f \circ h$ 时, 有 $g = h$, 则 f 是单态射.

例2.2 设 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\text{Set})$, 若 $X \cup Y$ 是 X 与 Y 的并, $X \cap Y$ 是 X 与 Y 的交, 则 $X \xrightarrow{f} X \cup Y \xleftarrow{g} Y$ 存在拉回 $X \cap Y$.

例2.3 设 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\text{Set})$, 若 T 是范畴 Set 的终对象, 则 $X \xrightarrow{f} T \xleftarrow{g} Y$ 存在拉回 $X \times Y$.

例2.4 设 $X, Y, Z \in \text{Ob}(\text{Set})$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X, Z)$. 若 Y 是 Z 的一个子集, $f^{-1}(Y)$ 是 Y 在 f 下的原像, $i \in \text{Hom}_{\text{Set}}(Y, Z)$, i 是嵌入映射, 则 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{i} Y$ 存在拉回 $f^{-1}(Y)$.

定理2.1^[14] 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, 对于 $\{f, g\}$ 的拉回 $\{X \times_Z Y, p_1, p_2\}$, 若 f (或 g)是单态射, 则 p_2 (或 p_1)也是单态射, 如图2所示.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Z Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow g \\
 X & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

图2

定理2.2^[14] 设 $X, Y, Z, M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$, 若 $Y \xrightarrow{h} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $Y \times_M Z$, $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 则 $X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 如图3所示.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y (Y \times_M Z) & \longrightarrow & Y \times_M Z & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow p_4 & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & M
 \end{array}$$

图3

定理2.3^[14] 设 $X, Y, Z, M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M)$, 若 $X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$. 其中 p_2 是单态射, 则 $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 如图4所示.

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y (Y \times_M Z) & \longrightarrow & Y \times_M Z & \xrightarrow{p_2} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow p_4 & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & M
 \end{array}$$

图4

§3 主要成果

定义3.1 在范畴 $\text{Set}(L)$ 中, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Z, C))$, $g \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (Z, C))$, $\{f, g\}$ 在模糊集范畴 $\text{Set}(L)$ 中的拉回是指一个对象 $(X \times_Z Y, D)$ 和一对态射 p_1, p_2 , 记作 $\{(X \times_Z Y, D), p_1, p_2\}$, 简记为 $(X \times_Z Y, D)$, 满足 $f \circ p_1 = g \circ p_2$, 且对任意的对象 (W, E) 及任意的 $m_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X, A))$, 任意的 $m_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (Y, B))$, 当 $f \circ m_1 = g \circ m_2$ 时, 存在唯一的 $u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D))$, 使 $p_1 \circ u = m_1$, $p_2 \circ u = m_2$, 如图5所示.

$$\begin{array}{ccccc}
 (W, E) & & & & \\
 \downarrow m_1 & \searrow m_2 & & & \\
 & (X \times_Z Y, D) & \xrightarrow{p_2} & (Y, B) & \\
 & \downarrow p_1 & & \downarrow g & \\
 & (X, A) & \xrightarrow{f} & (Z, C) &
 \end{array}$$

图5

定理3.1 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Z, C)), g \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (Z, C))$, p_1, p_2 分别是 $X \times_Z Y$ 到 X, Y 上的投射. 若 $(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$ 存在拉回 $(X \times_Z Y, D)$, 当且仅当

(1) $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ 存在拉回 $X \times_Z Y$;

(2) $D(x, y) = A(x) \wedge B(y)$.

证 充分性 在范畴 Set 中, 由于

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

存在拉回 $X \times_Z Y, \forall W \in \text{Ob}(\text{Set}), m_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, X), m_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, Y)$, 满足 $f \circ m_1 = g \circ m_2$, 则存在唯一的态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, X \times_Z Y)$$

使得 $m_1 = p_1 \circ u, m_2 = p_2 \circ u$, 即图6可交换.

由 D 的定义可知, 任意 $(x, y) \in X \times Y$ 有

$$D(x, y) = A(x) \wedge B(y) \leq A(x) = A \circ p_1(x, y),$$

$$D(x, y) = A(x) \wedge B(y) \leq B(y) = B \circ p_2(x, y),$$

得 $p_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X \times_Z Y, D), (X, A)), p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X \times_Z Y, D), (Y, B))$. 设 $(W, E) \in \text{Ob}(\text{Set}(L)), m_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X, A)), m_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (Y, B))$, 满足: $f \circ m_1 = g \circ m_2$, 作

$$u : W \rightarrow X \times_Z Y, w \rightarrow (m_1(w), m_2(w)).$$

下面证明 $u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D))$. 任意 $w \in W$, 有 $E(w) \leq A \circ m_1(w), E(w) \leq B \circ m_2(w)$, 进而

$$E(w) \leq A \circ m_1(w) \wedge B \circ m_2(w) = D \circ u(m_1(w), m_2(w)),$$

即 $E(w) \leq D \circ u(w)$, 因此 $u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D))$.

由图6中的 u 唯一可知, 图7中的 u 唯一, 故在范畴 $\text{Set}(L)$ 中

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回 $(X \times_Z Y, D)$.

必要性 (1) 先证存在性: 在范畴 $\text{Set}(L)$ 中, 由于

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回 $(X \times_Z Y, D)$, 任意 $(W, E) \in \text{Ob}(\text{Set}(L)), m_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X, A)), m_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (Y, B))$, 满足: $f \circ m_1 = g \circ m_2$, 则存在唯一的态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D)),$$

使得 $m_1 = p_1 \circ u, m_2 = p_2 \circ u$, 即图7可交换. 满足图7的态射显然满足图6, 即图6中 $m_1 = p_1 \circ u, m_2 = p_2 \circ u$ 可交换.

再证唯一性: 若存在态射 $u' \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}(W, X \times_Z Y)$, 满足 $m_1 = p_1 \circ u', m_2 = p_2 \circ u'$, 由于 $m_1 = p_1 \circ u, m_2 = p_2 \circ u$, 故 $p_1 \circ u' = p_1 \circ u, p_2 \circ u' = p_2 \circ u$, 因为在图7中 p_1, p_2 是投射, 所以 $u' = u$, 图6中的 u 唯一.

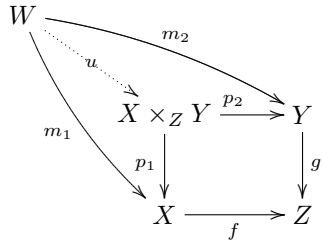


图6

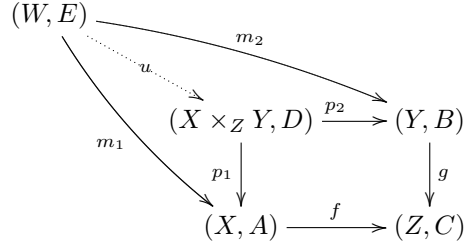


图7

(2) 设 $X \times_Z Y \in \text{Ob}(\text{Set})$, $p_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X \times_Z Y, X)$, $p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X \times_Z Y, Y)$, 令 $D^*(x, y) = A(x) \wedge B(y)$, 对任意 $(x, y) \in X \times Y$ 有

$$D^*(x, y) \leq A \circ p_1(x, y), D^*(x, y) \leq B \circ p_2(x, y),$$

所以

$$p_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (X, A)), \quad p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (Y, B)).$$

由于

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回 $(X \times_Z Y, D)$, 则在图8存在唯一的态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X \times_Z Y, D^*), (X \times_Z Y, D)),$$

有 $p_1 = p_1 \circ u$, $p_2 = p_2 \circ u$, 则有 $p_1 \circ 1_{X \times_Z Y} = p_1 \circ u$, $p_2 \circ 1_{X \times_Z Y} = p_2 \circ u$. 因为 p_1, p_2 是投射, 所以 $u = 1_{X \times_Z Y}$, $D^* \leq D \circ u = D \circ 1_{X \times_Z Y}$, 由

$$p_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}}((X \times_Z Y, D), (X, A)), \quad p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}}((X \times_Z Y, D), (Y, B))$$

可得 $D(x, y) \leq A \circ p_1(x, y)$, $D(x, y) \leq B \circ p_2(x, y)$, 即

$$D(x, y) \leq A \circ p_1(x, y) \wedge B \circ p_2(x, y) = D^*(x, y).$$

综上所述 $D(x, y) = D^*(x, y)$.

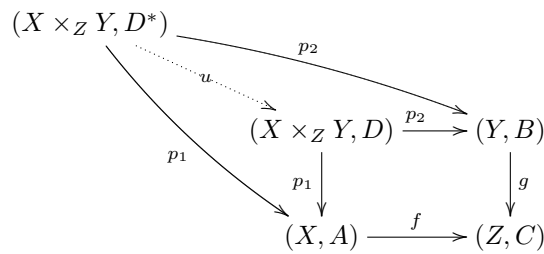


图8

定理3.2 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C), (M, F) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Z, C), (M, F))$, $g \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Y, B))$, $h \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (M, F))$, 若

$$(Y, B) \xrightarrow{h} (M, F) \xleftarrow{f} (Z, C)$$

存在拉回 $(Y \times_M Z, G)$,

$$(X, A) \xrightarrow{g} (Y, B) \xleftarrow{p_4} (Y \times_M Z, G)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 则

$$(X, A) \xrightarrow{h \circ g} (M, F) \xleftarrow{f} (Z, C)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 当且仅当

(1) $Y \xrightarrow{h} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $Y \times_M Z$, $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 则 $X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$;

(2) $H(x, y, z) = A(x) \wedge B(y) \wedge C(z)$.

证 充分性 在图9中, 任意 $W \in \text{Ob}(\text{Set})$, $m_1 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, Z)$, $m_3 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, X)$, 则 $f \circ m_1 = h \circ g \circ m_3$. 令 $m_2 = g \circ m_3 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, Y)$, 则 $h \circ m_2 = h \circ g \circ m_3$, 可得 $f \circ m_1 = h \circ m_2$.

因为

$$Y \xrightarrow{h} M \xleftarrow{f} Z$$

存在拉回 $(Y \times_M Z, G)$, 则存在唯一的态射

$$\varepsilon \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, Y \times_M Z),$$

使得 $m_1 = p_2 \circ \varepsilon$, $m_2 = p_4 \circ \varepsilon$, 所以 $p_4 \circ \varepsilon = m_2 = g \circ m_3$.

因为

$$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$$

存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 则存在唯一态射 $u \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, X \times_Y (Y \times_M Z))$, 使得 $\varepsilon = p_1 \circ u$, $m_3 = p_3 \circ u$, 所以 $m_1 = p_2 \circ \varepsilon = (p_2 \circ p_1) \circ u$, 即图9交换. 满足图9的态射显然满足图10, 故图10中 $m_1 = p_2 \circ \varepsilon = (p_2 \circ p_1) \circ u$ 可交换.

由于

$$H(x, y, z) = A(x) \wedge B(y) \wedge C(z),$$

由定理3.1可得

$$(Y, B) \xrightarrow{h} (M, F) \xleftarrow{f} (Z, C), (X, A) \xrightarrow{g} (Y, B) \xleftarrow{p_4} (Y \times_M Z, G)$$

分别存在拉回 $(Y \times_M Z, G)$, $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 此处 $G(y, z) = B(y) \wedge C(z)$. 从而得到

$$(X, A) \xrightarrow{h \circ g} (M, F) \xleftarrow{f} (Z, C)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$.

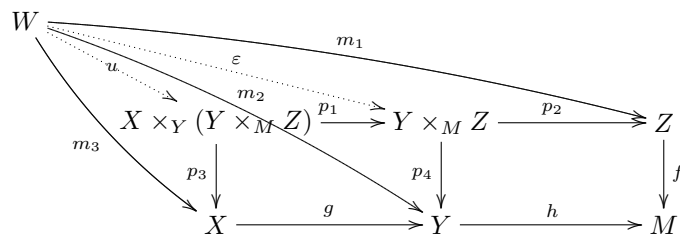


图9

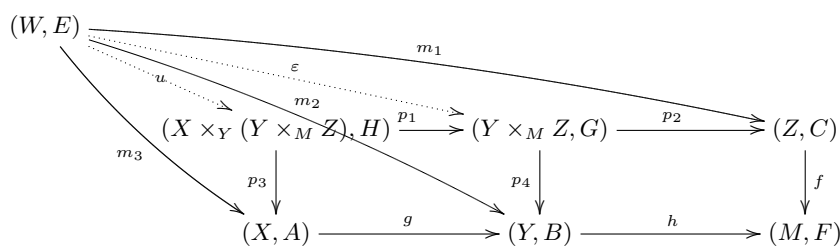


图10

必要性 由定理3.1可得.

定理3.3 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C), (M, F) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Z, C), (M, F)), g \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Y, B)), h \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (M, F))$, 若

$$(X, A) \xrightarrow{h \circ g} (M, F) \xleftarrow{f} (Z, C)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 其中 $p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y \times_M Z, G), (Z, C))$ 是单态射, 则

$$(X, A) \xrightarrow{g} (Y, B) \xleftarrow{p_4} (Y \times_M Z, G)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$, 当且仅当

- (1) $X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$ 存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$, 其中 $p_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(Y \times_M Z, Z)$ 是单态射;
- (2) $H(x, y, z) = A(x) \wedge B(y) \wedge C(z)$.

证 充分性 在范畴 Set 中, 任意 $Z \in \text{Ob}(\text{Set}), \varepsilon \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, Y \times_M Z), m_3 \in \text{Hom}_{\text{Set}}(Z, X)$, 且 $p_4 \circ \varepsilon = g \circ m_3$, 令 $m_1 = p_2 \circ \varepsilon$, 则

$$f \circ m_1 = f \circ p_2 \circ \varepsilon = h \circ p_4 \circ \varepsilon = h \circ g \circ m_3.$$

因为

$$X \xrightarrow{h \circ g} M \xleftarrow{f} Z$$

存在拉回 $X \times_Z (Y \times_M Z)$, 则存在唯一的态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}}(W, X \times_Y (Y \times_M Z))$$

使得 $m_1 = p_2 \circ p_1 \circ u, m_3 = p_3 \circ u$, 所以 $p_2 \circ \varepsilon = m_1 = p_2 \circ p_1 \circ u$. 因为 p_2 是单态射, 可得 $\varepsilon = p_1 \circ u$, 即图11可交换, 因此

$$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{p_4} Y \times_M Z$$

存在拉回 $X \times_Y (Y \times_M Z)$. 满足图11的态射显然满足图12, 即图12中 $\varepsilon = p_1 \circ u$ 可交换.

由于

$$H(x, y, z) = A(x) \wedge B(y) \wedge C(z),$$

由定理3.1可得

$$(X, A) \xrightarrow{g} (Y, B) \xleftarrow{p_4} (Y \times_M Z, G)$$

存在拉回 $(X \times_Y (Y \times_M Z), H)$.

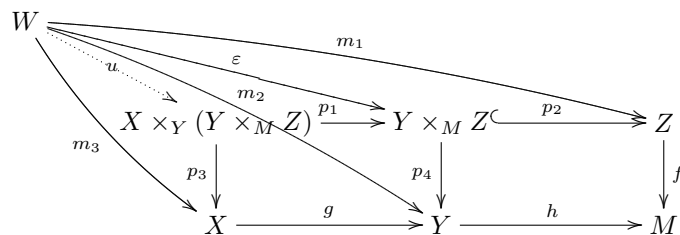


图11

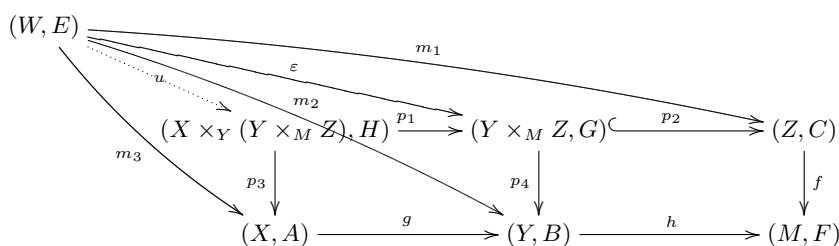


图12

必要性 由定理3.1可得.

定理3.4 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Z, C))$, $g \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (Z, C))$. 若 $(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$ 存在拉回 $(X \times_Z Y, D)$, p_1, p_2 分别是 $X \times_Z Y$ 到 X, Y 上的投射, f 是单态射, p_2 是单态射, 当且仅当: f 为单射.

证 充分性 在图13中, 若 f 不是单态射, 且存在 $m, h \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((N, 0), (X, A))$, 由 $f \circ m = f \circ h$ 可能有 $m \neq h$, 此时存在 $n \in N$, 使得 $m(n) \neq h(n)$, 又由于 f 是单射, 可知 $f \circ m(n) \neq f \circ h(n)$, 即 $f \circ m \neq f \circ h$, 因此 f 是 $\text{Set}(L)$ 中的单态射.

在图14中, 设 $u_1, u_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D))$, 且 $p_2 \circ u_1 = p_2 \circ u_2$, 则

$$f \circ p_1 \circ u_1 = g \circ p_2 \circ u_1 = g \circ p_2 \circ u_2 = f \circ p_1 \circ u_2.$$

因为是 f 单态射, 则 $p_1 \circ u_1 = p_1 \circ u_2$. 令 $m_1 = p_1 \circ u_1$, $m_2 = p_2 \circ u_1$, 则

$$f \circ m_1 = f \circ p_1 \circ u_1 = g \circ p_2 \circ u_1 = g \circ m_2.$$

存在唯一的态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D)),$$

使 $m_1 = p_1 \circ u$, $m_2 = p_2 \circ u$.

因为

$$u_1, u_2 \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((W, E), (X \times_Z Y, D)),$$

且 $m_1 = p_1 \circ u_1 = p_1 \circ u_2 = p_1 \circ u$, $m_2 = p_2 \circ u_1 = p_2 \circ u_2 = p_2 \circ u$, 由唯一性得 $u_1 = u_2$, 所以 p_2 是单态射.

$$(N, 0) \xrightarrow[h]{m} (X, A) \xrightarrow{f} (Z, C)$$

图13

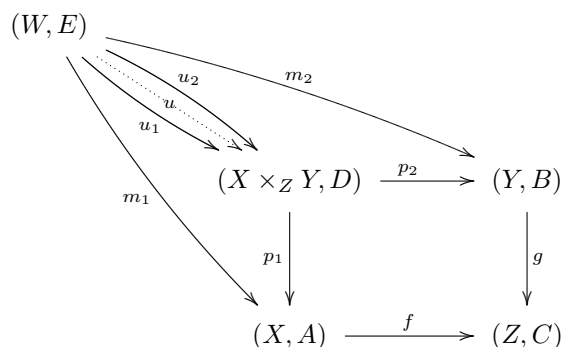


图14

必要性 若 f 是 $\text{Set}(L)$ 中的单态射, 即由 $f \circ m = f \circ h$ 可得 $m = h$. 若 f 不是单射, 即存在 $x, y \in X, x \neq y$, 但是 $f(x) = f(y)$. 任意 $n \in N$, 取 $(N, 0) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$,

$$m : N \rightarrow X, n \mapsto x, \quad h : N \rightarrow X, n \mapsto y,$$

取 $0 : N \rightarrow L, n \mapsto 0$. 则

$$0(n) = 0 \leq A(m(n)), \quad 0(n) = 0 \leq A(h(n)).$$

因此 $m \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((N, 0), (X, A)), h \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((N, 0), (X, A))$, 但是 $m(n) \neq h(n)$, 而 $f \circ m = f \circ h$, 因此 f 不是单态射, 矛盾, 因此 f 是单射.

定义3.2 在范畴 $\text{Set}(L)$ 中, 若任意的对象 (X, A) 到对象 $(T, 1)$ 有且仅有唯一态射

$$u \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (T, 1)),$$

则 $(T, 1)$ 为范畴 $\text{Set}(L)$ 的终对象.

性质3.1 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, $(X \cup Y, C)$ 是 (X, A) 与 (Y, B) 的并, 其中当 $t \in X \cup Y$ 时, 若 $t \in X$, 有 $C(t) = A(t)$, 若 $t \in Y$ 时, 有 $C(t) = B(t)$. $(X \cap Y, D)$ 是 (X, A) 与 (Y, B) 的交, $D(t) = A(t) \wedge B(t)$, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (X \cup Y, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回 $(X \cap Y, D)$.

证 由例2.2可知, $X \cup Y$ 是 X 和 Y 的并, $X \cap Y$ 是 X 和 Y 的交, 则 $X \xrightarrow{f} X \cup Y \xleftarrow{g} Y$ 存在拉回 $X \cap Y$. 再由定理3.1可得 $(X, A) \xrightarrow{f} (X \cup Y, C) \xleftarrow{g} (Y, B)$ 存在拉回 $(X \cap Y, D)$.

性质3.2 设 $(X, A), (Y, B), (T, 1) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 若 $(T, 1)$ 是范畴 $\text{Set}(L)$ 的终对象, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (T, 1) \xleftarrow{g} (Y, B)$$

存在拉回 $(X \times Y, D)$, 其中 $D(x, y) = A(x) \wedge B(y)$.

证 由例2.3可知, 若 T 是范畴 Set 的终对象, 则 $X \xrightarrow{f} T \xleftarrow{g} Y$ 存在拉回 $X \times Y$. 再由定理3.1可得 $(X, A) \xrightarrow{f} (T, 1) \xleftarrow{g} (Y, B)$ 存在拉回 $(X \times Y, D)$.

性质3.3 $(X, A), (Y, B), (Z, C) \in \text{Ob}(\text{Set}(L))$, 态射 $f \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((X, A), (Z, C)), i \in \text{Hom}_{\text{Set}(L)}((Y, B), (Z, C))$, i 是嵌入映射. 若 Y 是 Z 的一个子集, $f^{-1}(Y)$ 是 Y 在 f 下的原像, 则

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{i} (Y, B)$$

存在拉回 $(f^{-1}(Y), D)$, 其中 $D(x, y) = A(x)$.

证 由例2.4可知, 若 Y 是 Z 的一个子集, $f^{-1}(Y)$ 是 Y 在 f 下的原像, 则 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{i} Y$ 存在拉

回 $f^{-1}(Y)$. 再由定理3.1可得 $(X, A) \xrightarrow{f} (Z, C) \xleftarrow{i} (Y, B)$ 存在拉回
 $(f^{-1}(Y), D), D(x, y) = A(x) \wedge B(y) = A(x)$.

§4 结论

拉回是范畴论中的一个非常重要的概念, 它与极限理论, 完备性等密切相关. 本文给出了模糊集范畴 $\text{Set}(L)$ 中拉回的定义, 并证明了拉回的存在性和唯一性定理. 讨论了一些特殊拉回的性质, 且例举了三类特殊的拉回. 通过拉回结构所具有的泛性质, 可以用来讨论等值子, 极限等范畴问题, 更进一步研究模糊集范畴中的完备性等相关性质.

参考文献:

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Goguen J A. L -fuzzy sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967, 18(1): 145-174.
- [3] Negoitã C V, Ralescu D A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis[M]. Basel: Birkhuser, 1975.
- [4] 汪培庄. 模糊集与模糊集范畴[J]. 数学进展, 1982, 11: 1-18.
- [5] Walker C L. Categories of fuzzy sets[J]. Soft Computing, 2004, 8: 299-304.
- [6] 郑艳霞, 王明璇, 樊磊. 模糊集范畴的性质[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2011, 33(1): 7-10.
- [7] 王明璇. 关于一种 L -模糊集范畴的探讨和研究[D]. 北京: 中央民族大学, 2011.
- [8] Eilenberg S, MacLane S. General theory of natural equivalences[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1945, 58: 231-294.
- [9] Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique[J]. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 1957, 9(2): 119-183.
- [10] Porselvi Agnes A R, Sivaraj D, Tamizh Chelvam T. On a new category of fuzzy sets[J]. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2010, 2(4): 73-83.
- [11] Liang S. The category of L -fuzzy quantales[J]. Studies in Mathematical Sciences, 2012, 4(2): 10-16.
- [12] Birkhoff G. Lattice Theory[M]. Providence: American Mathematical Society, 1940.
- [13] 李桃生. 范畴与同调代数基础[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988.
- [14] 贺伟. 范畴论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

Pullbacks in the category of fuzzy Sets

LIU Wen-jun¹, ZHOU Xin^{1,2}

- (1. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China;
2. Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining 835000, China)

Abstract: Using the method and principle of fuzzy theories, firstly, the definition of fuzzy sets category $\text{Set}(L)$ are given, and the existence of pullback in the category $\text{Set}(L)$ are proved. Secondly, the properties of double pullback and monomorphism of category $\text{Set}(L)$ are studied. Finally, three kinds of special pullbacks are discussed.

Keywords: fuzzy set; category; pullback

MR Subject Classification: 06A75; 18A30