高校应用数学学报
2024, 39(3): 314-320

拓扑空间中的理想下极限收敛

王　武[1]，张　舜[2]

(1. 天津理工大学 中环信息学院, 天津 300380;

2. 天津仁爱学院, 天津 301636)

摘　要: 为了研究拓扑空间的收敛性质, 引入了拓扑空间中网的理想下极限收敛和广义理想下极限收敛的概念, 同时研究了这两类极限与C-空间和局部强紧空间之间的关系. 特别的, 借助交连续空间给出了C-空间的等价刻画.

关键词: 拓扑空间; 网; 理想下极限; C-空间

中图分类号: O153.1; O189.1

文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)03-0314-07

§1　引　言

偏序集理论作为重要的数学分支, 旨在为计算机程序设计语言提供数学模型, 受到了计算机科学和数学领域诸多学者的关注, 并取得了很多有价值的结论和模型[1-2]. 随着计算机理论的发展, 偏序集理论不断向信息科学, 逻辑学, 理论计算机及各种应用学科渗透[3]. 将偏序集理论推广到拓扑空间是序结构理论的重要研究方向之一, 如徐晓泉等研究了拓扑空间中的下极限收敛, 并给出了C-空间的等价刻画[4]. 本文利用定向集的理想定义了网的理想下极限和广义理想下极限, 并研究了它们与C-空间和局部强紧空间的关系.

§2　预备知识

设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x,y\in X$, 定义偏序关系: $x\le y \Leftrightarrow x\in cl_\tau\{y\}$, 其中$cl_\tau\{y\}$为单点集$\{y\}$在拓扑$\tau$中的闭包[5]. 在本文中$T_0$拓扑空间上的序关系总是由拓扑$\tau$按上述方式生成. 类似一般的偏序集, 可以定义$\uparrow A$, $\downarrow A$, $\uparrow a$, $\downarrow a$以及定向集. 设(X,τ)是拓扑空间, J是定向集, 称映射$x: J\to X$为X上的一个网, 并简记为$(x_j)_{j\in J}$. 任给$x\in X$, 如果网$(x_j)_{j\in J}$终在x的任意开邻域U中, 即存在$j_0\in J$使得当$j\ge j_0$时, $x_j\in U$, 则称网$(x_j)_{j\in J}$关于拓扑τ收敛到x, 记为$(x_j)_{j\in J}\to_\tau x$. 拓扑空间(X,τ)的每个定向子集D都可看成一个网, 指标集就是它自己. 若D收敛到x, 即x的任意开邻域交D非空, 记为$D\to_\tau x$. 易知$x\le y\Leftrightarrow \{y\}\to_\tau x$(参见[6]).

收稿日期: 2023-02-27　　修回日期: 2023-12-15

基金项目: 天津市教委科研计划(2023KJ281); 2021年高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20210115)

设(X,τ)是拓扑空间, $x\in X$. 如果任意$U\in\tau$, $x\in U$蕴含存在$y\in X$使得$x\in \mathrm{int}_\tau\uparrow y\subseteq\uparrow y\subseteq U$, 其中$\mathrm{int}_\tau\uparrow y$表示$\uparrow y$在拓扑$\tau$中的内部, 则称$(X,\tau)$为C-空间[4]. 设$(X,\tau)$是$T_0$拓扑空间, $U\subseteq X$, 如果任意定向集$D\subseteq X$且$D\to_\tau x$, $x\in U$蕴含存在$d\in D$使得$d\in U$, 即$D\cap U\neq\varnothing$, 则称U为定向开集. 所有定向开集的集合记为$d(X)$, 显然所有开集都是定向开集, 即$\tau\subseteq d(X)$. 如果$\tau=d(X)$, 则称(X,τ)为定向空间. 在定向空间中, 显然有如下结论: (1) T_0拓扑空间(X,τ)的所有定向开集可以构成X上的拓扑, 称为定向拓扑, 仍记为$d(X)$; (2) 偏序集上赋予Scott拓扑是定向空间, 从而带有特殊化序的定向空间是比偏序集更一般的数学模型; (3) 每个定向开集都是上集; (4) 任意$x\in X$, $X\backslash\downarrow x\in\tau$.[7-8]

定义2.1(见[9, p758])　设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x,y\in X$. 若任意定向集$D\subseteq X$, $D\to_\tau y$蕴含$D\cap\uparrow x\neq\varnothing$, 则称$x$逼近$y$, 记为$x\ll y$.

易知逼近关系有如下性质: (1)如果$x\ll y$, 则$x\le y$; (2)如果$z\le x\ll y\le s$, 则$z\ll s$. 对任意$x\in X$, 记$\Downarrow x=\{y\in X: y\ll x\}$, $\Uparrow x=\{y\in X: x\ll y\}$.

命题2.1(见[9,引理2.6])　设(X,τ)是C-空间, 则下列各条成立.

(1) 任给$x,y\in X$, $x\ll y\Leftrightarrow y\in\mathrm{int}_\tau\uparrow x$;

(2) $\{\Uparrow x: x\in X\}$是(X,τ)的一组基;

(3) 任给$x,y\in X$, $x\ll y\Rightarrow\exists z\in X$, $x\ll z\ll y$.

命题2.2(见[9,引理2.7])　设(X,τ)是T_0拓扑空间, 则下述三条等价.

(1) (X,τ)是C-空间;

(2) (X,τ)是定向空间且任意$x\in X$, $\Downarrow x$是定向集且$\Downarrow x\to_\tau x$;

(3) (X,τ)是定向空间且任意$x\in X$, 存在定向集$D\subseteq\Downarrow x$且$D\to_\tau x$.

设(X,τ)是T_0拓扑空间, G,H为X的两个非空子集, D为X的定向子集. 如果$D\to_\tau h\in H$蕴含$D\cap\uparrow G\neq\varnothing$, 则$G\ll H$. 特别的, $\{y\}\ll H$简记为$y\ll H$, $G\ll\{x\}$简记为$G\ll x$. 显然, $G\ll H\Leftrightarrow\forall h\in H, G\ll h$. 记$X^{(<w)}$为$X$的所有非空有限子集的集合. 设集族$\mathcal{F}\subseteq X^{(<w)}$, 如果任意的$F_1,F_2\in\mathcal{F}$, 存在$F\in\mathcal{F}$使得$\uparrow F\subseteq\uparrow F_1\cap\uparrow F_2$, 则称集族$\mathcal{F}$是定向的. 设$(X,\tau)$是$T_0$拓扑空间, $x\in X$, 如果任意$U\in\tau$, $x\in U$蕴含存在$F\in\mathcal{F}$使得$\uparrow F\subseteq U$, 则称$\mathcal{F}$收敛到x, 记为$\mathcal{F}\to_\tau x$. 任意$x\in X$, 记$fin(x)=\{F\in X^{(<w)}: F\ll x\}$. 如果$(X,\tau)$是定向空间且$fin(x)$是定向集族并收敛到$x$, 则称$(X,\tau)$是拟连续空间[10].

设(X,τ)是T_0拓扑空间, 任意$F\in X^{(<w)}$, 记$\Uparrow F=\{x\in X: F\ll x\}$.

命题2.3(见[10,定理3.9])　设(X,τ)是拟连续空间. 则

(1) 任给$F\in X^{(<w)}$, $\mathrm{int}_\tau\uparrow F=\Uparrow F$;

(2) 任给开集$U\in\tau$, $x\in X$. 若$x\in U$, 则存在$F\in X^{(<w)}$使得$x\in\Uparrow F\subseteq\uparrow F\subseteq U$. 因此$\{\Uparrow F: F\in X^{(<w)}\}$是$(X,\tau)$的一组基.

设(X,τ)是T_0拓扑空间, 任给开集$U\in\tau$, $x\in X$. 若$x\in U$蕴含存在$F\in X^{(<w)}$使得$x\in\mathrm{int}_\tau(\uparrow F)\subseteq\uparrow F\subseteq U$, 则称$(X,\tau)$ 为局部强紧空间[10].

命题2.4(见[10,定理3.11])　设(X,τ)是T_0拓扑空间, 则有下述三条等价.

(1) (X,τ)是拟连续空间;

(2) 任意的$x\in X$, 存在定向集族$\mathcal{D}\subseteq fin(x)$且$\mathcal{D}\to_\tau x$;

(3) (X,τ)是局部强紧空间.

设偏序集J是一个定向集, 如果它的子集族$\mathcal{I}$满足: (1) $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$蕴含$B \in \mathcal{I}$; (2) $A, B \in \mathcal{I}$蕴含$A \cup B \in \mathcal{I}$, 则称$\mathcal{I}$是J的理想. 如果$J \notin \mathcal{I}$, 则称$\mathcal{I}$是J的非平凡理想. 任意$j \in J$, 令$M_j = \{j' \in J : j' \geq j\}$, 如果任意$j \in J$, $J \backslash M_j \in \mathcal{I}$, 则称$\mathcal{I}$是$J$的相容理想. 显然$\mathcal{I}_0(J) = \{A : \exists j \in J, A \subseteq J \backslash M_j\}$是$J$的非平凡相容理想[11].

命题2.5 设(X, τ)是T_0拓扑空间, $(x_j)_{j \in J} \subseteq X$是一个网, $A \subseteq X$非空. 如果$\{j \in J : x_j \notin \uparrow A\} \in \mathcal{I}_0(J)$, 则$(x_j)_{j \in J}$终在$\uparrow A$中, 即存在$j_0 \in J$, 当$j \geq j_0$时, $x_j \in \uparrow A$.

证 设$\{j \in J : x_j \notin \uparrow A\} \in \mathcal{I}_0(J)$, 则存在$j_0 \in J$使得$\{j \in J : x_j \notin \uparrow A\} \subseteq J \backslash M_{j_0}$. 故$M_{j_0} \subseteq \{j \in J : x_j \in \uparrow A\}$, 从而当$j \geq j_0$时, $x_j \in \uparrow A$.

定义2.2(见[11, 定义1.1]) 设(X, τ)是拓扑空间, $(x_j)_{j \in J} \subseteq X$是一个网, $\mathcal{I}$是J的一个理想, $x \in X$. 如果x的任意开邻域U蕴含$\{j \in J : x_j \notin U\} \in \mathcal{I}$, 则称网$(x_j)_{j \in J}$是关于理想$\mathcal{I}$收敛到$x$的, 简称$(x_j)_{j \in J}$是$\mathcal{I}$-收敛到$x$, 记为$(x_j)_{j \in J} \to_{\mathcal{I}} x$.

设(X, τ)是拓扑空间, 则$(x_j)_{j \in J} \to_\tau x \Leftrightarrow (x_j)_{j \in J} \to_{\mathcal{I}_0(J)} x$. 从而拓扑空间中网的收敛是理想收敛的特殊情况, 也就是说理想收敛确实是网收敛的推广.

定义2.3(见[11, 定义3.15]) 设L是偏序集, $\mathcal{C} = \{((x_j)_{j \in J}, \mathcal{I}, x)\}$是一个收敛类, 如果存在$L$上的拓扑$\varsigma$, 使得$((x_j)_{j \in J}, \mathcal{I}, x) \in \mathcal{C}$当且仅当$(x_j)_{j \in J} \to_{\mathcal{I}} x$关于拓扑$\varsigma$成立, 则称收敛类$\mathcal{C}$是拓扑的.

§3 拓扑空间中的理想下极限收敛

设(X, τ)是T_0拓扑空间, $x \in X$, $(x_j)_{j \in J}$是X中的一个网, $\mathcal{I}$是指标集J的非平凡理想, 令$Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j \in J}) = \{a \in X : \{j \in J : x_j \notin \uparrow a\} \in \mathcal{I}\}$.

定义3.1 设(X, τ)是T_0拓扑空间, $x \in X$, $(x_j)_{j \in J}$是X中的一个网, $\mathcal{I}$是指标集J的非平凡理想.

(1) 如果存在定向集$D \subseteq Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j \in J})$使得$D \to_\tau x$且任意$a \in Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j \in J})$, $a \leq x$, 则称x是$(x_j)_{j \in J}$的理想下极限, 记作$x =_{\mathcal{I}} \underline{\lim} x_j$;

(2) 如果$x =_{\mathcal{I}} \underline{\lim} x_j$且如果任意的$I \in \mathcal{I}$, 存在$j \in J \backslash I$使得$z \leq x_j$, 有$z \leq x$, 则称网$(x_j)_{j \in J}$是理想下极限收敛到$x$的, 记作$x =_{\mathcal{I}\mathcal{L}} \lim x_j$.

命题3.1 设(X, τ)是T_0拓扑空间, $x \in X$, 定向集$D \subseteq \downarrow x$且$D \to_\tau x$, 则$x =_{\mathcal{I}_0(D)\mathcal{L}} \lim D$.

证 因为$\mathcal{I}_0(D)$是D的相容理想, 则$\forall d \in D$, $\{d' \in D : d' \notin \uparrow d\} = D \backslash \{d' \in D : d' \in \uparrow d\} \in \mathcal{I}_0(D)$. 设$a \in Ielb_{\mathcal{I}_0(D)}(D)$, 则$\{d \in D : d \notin \uparrow a\} \in \mathcal{I}_0(D)$. 因为$\mathcal{I}_0(D)$是$D$的平凡理想, 则存在$d_0 \in D$使得$d_0 \in \uparrow a$. 由$D \subseteq \downarrow x$知$a \leq d_0 \leq x$. 从而由定义3.1知, $x =_{\mathcal{I}_0(D)} \underline{\lim} D$. 如果任意的$I \in \mathcal{I}_0(D)$, 存在$d \in D \backslash I$使得$z \leq d$, 显然$z \leq x$. 综上可知$x =_{\mathcal{I}_0(D)\mathcal{L}} \lim D$.

定义3.2 设(X, τ)是T_0拓扑空间, 令$\mathcal{L} = \{((x_j)_{j \in J}, \mathcal{I}, x) : x =_{\mathcal{I}\mathcal{L}} \lim x_j\}$, 则$\mathcal{O}(\mathcal{L}) = \{U \subseteq X : ((x_j)_{j \in J}, \mathcal{I}, x) \in \mathcal{L}, x \in U \Rightarrow \{j \in J : x_j \notin U\} \in \mathcal{I}\}$是$X$上的一个拓扑, 称为理想下极限拓扑.

命题3.2 设(X, τ)是T_0拓扑空间, $x \in X$, $(x_j)_{j \in J}$是X中的一个网, $\mathcal{I}$是指标集J的非平凡理想, 则$x =_{\mathcal{I}\mathcal{L}} \lim x_j \Rightarrow (x_j)_{j \in J} \to_{\mathcal{I}} x$关于拓扑$\mathcal{O}(\mathcal{L})$成立.

设(X, τ)是T_0拓扑空间, 由$X \backslash \uparrow x$为子基元生成的拓扑称为下拓扑, 记作$\omega(X)$. 称$\lambda(X) = \tau \vee \omega(X)$为$X$上的Lawson拓扑.

命题3.3 设(X, τ)是T_0拓扑空间, 则$\lambda(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L})$.

证　先证$\tau \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L})$. 设$U \in \tau$, $((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x) \in \mathcal{L}$, $x \in U$. 因为$x =_{\mathcal{I}} \underline{\lim} x_j$, 则存在定向集$D \subseteq Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$使得$D \to_\tau x$且任意$a \in Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$, $a \leq x$. 因为$D \to_\tau x$且$x \in U \in \tau$, 存在$d \in D \cap U$. 故$\{j \in J : x_j \notin U\} \subseteq \{j \in J : x_j \notin \uparrow d\} \in \mathcal{I}$. 则由理想的定义知

$$\{j \in J : x_j \notin U\} \in \mathcal{I},\ \tau \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L}).$$

再证$\omega(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L})$. 只需证任意的$y \in X$, $X\setminus \uparrow y \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$. 设$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x) \in \mathcal{L}$, $x \in V = X\setminus \uparrow y$, 假设$\{j \in J : x_j \notin V\} \notin \mathcal{I}$, 则任意的$I \in \mathcal{I}$, 存在$j \in J\setminus I$使得$x_j \notin V$, 故$x_j \geq y$. 由$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x) \in \mathcal{L}$知$y \leq x$, 与$x \in V = X\setminus \uparrow y$矛盾, 则

$$\{j \in J : x_j \notin V\} \notin \mathcal{I},\ X\setminus \uparrow y \in \mathcal{O}(\mathcal{L}).$$

综上可知$\lambda(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L})$.

接下来给出WC-空间的定义, 并且证明当T_0拓扑空间(X,τ)是WC-空间时, 收敛类$\mathcal{L}$是拓扑的.

定义3.3(见[4,定义4.5])　设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x,y \in X$. 如果任意定向集$D \subseteq \downarrow y$, $D \to_\tau y$ 蕴含$D \cap \uparrow x \neq \varnothing$, 则称$x$理想逼近$y$, 记为$x \ll_i y$. 记

$$\Downarrow_i x = \{y \in X : y \ll_i x\},\ \Uparrow_i x = \{y \in X : x \ll_i y\}.$$

显然理想逼近是逼近关系的推广, 且$x \ll y$蕴含$x \ll_i y$.

命题3.4　设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x,y,s,t \in X$. 则

(1) $x \ll_i y \Rightarrow x \leq y$;

(2) $s \leq x \ll_i y \leq t \Rightarrow s \ll_i t$;

(3) 如果$y \in \mathrm{int}_{\mathcal{O}(\mathcal{L})} \uparrow x$, 则$x \ll_i y$.

证　(1), (2)显然, 只需证明(3). 设定向集$D \subseteq \downarrow y$, $D \to_\tau y$, 则由命题3.1知$(D,\mathcal{I}_0(D),y) \in \mathcal{L}$. 因为$y \in \mathrm{int}_{\mathcal{O}(\mathcal{L})} \uparrow x \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$, 则

$$\{d \in D : d \notin \mathrm{int}_{\mathcal{O}(\mathcal{L})} \uparrow x\} \in \mathcal{I}_0(D).$$

由于$\mathcal{I}_0(D)$是非平凡理想, 则存在$d_0 \in D$使得$d_0 \in \mathrm{int}_{\mathcal{O}(\mathcal{L})} \uparrow x$, 即$D \cap \uparrow x \neq \varnothing$, $x \ll_i y$.

命题3.5　设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x,y \in X$. 则$x \ll_i y$当且仅当任意$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},y) \in \mathcal{L}$, $\{j \in J : x_j \notin \uparrow x\} \in \mathcal{I}$.

证　设$x \ll_i y$且$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},y) \in \mathcal{L}$. 因为$y =_{\mathcal{I}} \underline{\lim} x_j$, 则存在定向集$D \subseteq Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$使得$D \to_\tau y$且任意$a \in Ielb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$, $a \leq y$, 从而$D \subseteq \downarrow y$. 由于$x \ll_i y$, $D \cap \uparrow x \neq \varnothing$. 令$d \in D \cap \uparrow x$, $\{j \in J : x_j \notin \uparrow x\} \subseteq \{j \in J : x_j \notin \uparrow d\} \in \mathcal{I}$. 由理想的定义知$\{j \in J : x_j \notin \uparrow x\} \in \mathcal{I}$. 反之, 设定向集$D \subseteq \downarrow y$, $D \to_\tau y$. 由命题3.1知$(D,\mathcal{I}_0(D),y) \in \mathcal{L}$, 故$\{d \in D : d \notin \uparrow x\} \in \mathcal{I}_0(D)$. 由于$\mathcal{I}_0(D)$是非平凡理想, 则存在$d_0 \in D$使得$d_0 \geq x$, 即$D \cap \uparrow x \neq \varnothing$. 从而$x \ll_i y$.

定义3.4(见[4, 定义4.8])　设(X,τ)是T_0拓扑空间.

(1) 如果任意$x \in X$, $\Downarrow_i x$是定向集且$\Downarrow_i x \to_\tau x$, 则称$X$是预连续空间;

(2) 如果X是弱连续空间且$\Uparrow_i x \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$, 则称$X$是WC-空间.

命题3.6　设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x \in X$. 则$\Downarrow_i x$是定向集且$\Downarrow_i x \to_\tau x$当且仅当存在定向集$D \subseteq \Downarrow_i x$, $D \to_\tau x$.

证　只需证明必要性. 设存在定向集$D \subseteq \Downarrow_i x$, $D \to_\tau x$, 显然$\Downarrow_i x \to_\tau x$. 如果$a,b \in \Downarrow_i x$, 由理想逼近的定义知存在$d_a, d_b \in D$使得$a \leq d_a$, $b \leq d_b$. 因为D是定向集, 则存在$d \in D$使得$a,b \leq d \ll_i x$, 即$\Downarrow_i x$是定向集.

定理3.1 设(X,τ)是T_0拓扑空间. 如果X是WC-空间, 则$\mathcal{L}$关于$\mathcal{O}(\mathcal{L})$是拓扑的, 即
$$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x)\in\mathcal{L}\Leftrightarrow(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}}x$$
关于$\mathcal{O}(\mathcal{L})$成立.

证 显然$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x)\in\mathcal{L}\Rightarrow(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}}x$. 设$(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}}x$. 因为$X$是WC-空间, 则任意的$z\in\ \Downarrow_i x$有$x\in\ \Uparrow_i z\in\mathcal{O}(\mathcal{L})$. 因为$(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}}x$, $\{j\in J:x_j\notin\ \Uparrow_i z\}\in\mathcal{I}$. 故由$\{j\in J:x_j\notin\uparrow z\}\subseteq\{j\in J:x_j\notin\ \Uparrow_i z\}$可知$\{j\in J:x_j\notin\uparrow z\}\in\mathcal{I}$.

设$\{j\in J:x_j\notin\uparrow y\}\in\mathcal{I}$且$y\not\leq x$, 则$x\in X\setminus\uparrow y\in\lambda(X)\subseteq\mathcal{O}(\mathcal{L})$. 故
$$\{j\in J:x_j\notin X\setminus\uparrow y\}\in\mathcal{I}.$$
从而$J=\{j\in J:x_j\notin X\setminus\uparrow y\}\cup\{j\in J:x_j\notin\uparrow y\}\in\mathcal{I}$, 矛盾. 因此$y\leq x$.

设$I\in\mathcal{I}$, 存在$j\in J\backslash I$使得$z\leq x_j$. 如果$z\not\leq x$, 则
$$x\in X\setminus\uparrow z\in\lambda(X)\subseteq\mathcal{O}(\mathcal{L})\ 且\{j\in J:x_j\notin X\setminus\uparrow z\}\in\mathcal{I}.$$
从而
$$J\backslash\{j\in J:x_j\notin X\setminus\uparrow z\}=\{j\in J:x_j\in X\setminus\uparrow z\}.$$
任意$j\in J\backslash\{j\in J:x_j\notin X\setminus\uparrow z\}$, $x_j\not\geq z$, 矛盾. 从而$z\leq x$.

综上可知$\mathcal{L}$关于$\mathcal{O}(\mathcal{L})$是拓扑的.

定理3.2 设(X,τ)是T_0拓扑空间. 如果$\mathcal{L}$关于$\mathcal{O}(\mathcal{L})$是拓扑的, 即
$$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I},x)\in\mathcal{L}\Leftrightarrow(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}}x$$
关于$\mathcal{O}(\mathcal{L})$成立, 则X是预连续空间.

证 令$\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(x)$为$x$在拓扑$\mathcal{O}(\mathcal{L})$中的开邻域, $J=\{(U,a):U\in\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(x),a\in U\}$. 在$J$上定义如下序关系: $(U,a)\leq(V,b)\Leftrightarrow V\subseteq U$, 则$J$是个定向集. 任意$(U,a)\in J$, 令$x_{(U,a)}=a$, 则$(x_j)_{j\in J}$是$X$中的一个网且$(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{O}(\mathcal{L})}x$. 从而$(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}_0(J)}x$, 故$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I}_0(J),x)\in\mathcal{L}$. 则存在定向集$D\subseteq Ielb_{\mathcal{I}_0(J)}((x_j)_{j\in J})$使得$D\to_\tau x$. 由命题2.5知$(x_j)_{j\in J}$终在$\uparrow d$, 即存在$j_0=(U_0,a_0)\in J$, 当$j=(U,a)\geq j_0$ 时, $x_j\geq d$. 从而任意的(U_0,w), $w\in\uparrow d$, 即$U_0\subseteq\uparrow d$. 因此$x\in\mathrm{int}_{\mathcal{O}(\mathcal{L})}(\uparrow d)$, 由命题3.4(3)知$d\ll_i x$. 再由命题3.6知$X$是预连续空间.

定理3.3 设(X,τ)是C-空间, 则X是WC-空间且$\lambda(X)=\mathcal{O}(\mathcal{L})$.

证 要证明X是WC-空间, 只需证明$x\ll_i y$蕴含$x\ll y$. 设$x\ll_i y$, 因为$\Downarrow y\subseteq\downarrow y$是定向集且$\Downarrow y\to_\tau y$, 则存在$z\in\ \Downarrow y$使得$x\leq z\ll y$, 即$x\ll y$. 由此可知如果$(X,\tau)$是C-空间, 则$X$是WC-空间.

要证$\lambda(X)=\mathcal{O}(\mathcal{L})$, 只需证明$\mathcal{O}(\mathcal{L})\subseteq\lambda(X)$. 设存在$U\in\mathcal{O}(\mathcal{L})$且$U\notin\lambda(X)$, 则$X\backslash U$不是Lawson闭集, 即存在网$(x_j)_{j\in J}\subseteq X\backslash U$使得$(x_j)_{j\in J}\to_{\lambda(X)}x$且$x\in U$. 故$(x_j)_{j\in J}\to_{\mathcal{I}_0(J)}x$关于$\lambda(X)$成立. 由定理3.1知$((x_j)_{j\in J},\mathcal{I}_0(J),x)\in\mathcal{L}$. 由$x\in U$知
$$\{j\in J:x_j\notin U\}\in\mathcal{I}_0(J).$$
而$\mathcal{I}_0(J)$是非平凡理想, 则存在$j\in J$使得$x_j\in U$, 矛盾, 则$\mathcal{O}(\mathcal{L})\subseteq\lambda(X)$.

§4 拓扑空间中的广义理想下极限收敛

设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x\in X$, $(x_j)_{j\in J}$是X中的一个网, $\mathcal{I}$是指标集J的非平凡理想, 令
$$GIelb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})=\{F\in X^{(<w)}:\{j\in J:x_j\notin\uparrow F\}\in\mathcal{I}\}.$$

定义4.1 设(X,τ)是T_0拓扑空间, $x\in X$, $(x_j)_{j\in J}$是X中的一个网, $\mathcal{I}$是指标集J的非平凡理想.

(1) 如果存在定向集族$\mathcal{F} \subseteq GIelb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$使得$\mathcal{F} \to_{\tau} x$且任意$F \in GIelb_{\mathcal{I}}((x_j)_{j\in J})$, 有$x \in \uparrow F$, 则称$x$是$(x_j)_{j\in J}$的广义理想下极限, 记作$x =_{\mathcal{GI}} \underline{\lim} x_j$;

(2) 如果$x =_{\mathcal{GI}} \underline{\lim} x_j$且如果任意的$I \in \mathcal{I}$, $F \in X^{(<w)}$, 存在$j \in J \backslash I$使得$x_j \in \uparrow F$, 有$x \in \uparrow F$, 则称网$(x_j)_{j\in J}$ 是广义理想下极限收敛到x的, 记作$x =_{\mathcal{GIL}} \lim x_j$.

定义4.2　设(X,τ)是T_0拓扑空间, 令$\mathcal{GL} = \{((x_j)_{j\in J}, \mathcal{I}, x) : x =_{\mathcal{GIL}} \lim x_j\}$, 则$\mathcal{O}(\mathcal{GL}) = \{U \subseteq X : ((x_j)_{j\in J}, \mathcal{I}, x) \in \mathcal{GL}, x \in U \Rightarrow \{j \in J : x_j \notin U\} \in \mathcal{I}\}$是$X$上的一个拓扑, 称为广义理想下极限拓扑.

与命题3.3类似, 有如下命题.

命题4.1　设(X,τ)是T_0拓扑空间, 则$\lambda(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{GL}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{L})$.

设(X,τ)是定向空间, 如果任意的$x \in X$和定向集$D \to_{\tau} x$蕴含$x \in cl_{\tau}(\downarrow D \cap \downarrow x)$, 则称$(X,\tau)$为交连续空间. 交连续空间的等价刻画是任意$x \in X$和$U \in \tau$, $\uparrow (U \cap \downarrow x) \in \tau$[10]. 参考文献[10]的定理4.11证明了拓扑空间是C-空间当且仅当其为交连续的拟连续空间. 下面给出本文的主要结果.

命题4.2　设(X,τ)是交连续空间, $U \in \lambda(X)$, 则$\uparrow U \in \tau$.

证　设(X,τ)是交连续空间, $U \in \lambda(X)$. 令$y \in \uparrow U$, 则存在$x \in U$且$x \le y$. 故存在$V \in \tau$和$F \in X^{(<w)}$使得$x \in V \backslash \uparrow F \subseteq U$. 而

$$\uparrow (V \cap \downarrow x) \subseteq \uparrow V \backslash \uparrow F \subseteq \uparrow U.$$

因为$\uparrow (V \cap \downarrow x) \in \tau$, 则$y \in \mathrm{int}_{\tau}(\uparrow U)$. 由$y$的任意性知$\uparrow U \in \tau$.

定理4.1　设(X,τ)是交连续空间, 则下列等价.

(1) (X,τ)是C-空间;

(2) $\mathcal{L}$关于$\lambda(X)$是拓扑的, 即$((x_j)_{j\in J}, \mathcal{I}, x) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (x_j)_{j\in J} \to_{\mathcal{I}} x$关于$\lambda(X)$成立;

(3) $\mathcal{GL}$关于$\lambda(X)$是拓扑的, 即$((x_j)_{j\in J}, \mathcal{I}, x) \in \mathcal{GL} \Leftrightarrow (x_j)_{j\in J} \to_{\mathcal{I}} x$关于$\lambda(X)$成立.

证　(1) $\Rightarrow$ (2) 由定理3.1和定理3.3可得.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由(2)和命题4.1可得.

(3) $\Rightarrow$ (1) 令$\mathcal{N}_{\lambda(X)}(x)$为$x$在拓扑$\lambda(X)$中的开邻域系,

$$J = \{(U,n,a) : U \in \mathcal{N}_{\lambda(X)}(x), n \in \mathbf{N}^+, a \in U\}.$$

在J上定义序关系

$$(U,n,a) \le (V,m,b) \Leftrightarrow V \subseteq U,\ V \ne U\text{或}U = V,\ n \le m,$$

则J是个定向集. 任意$(U,n,a) \in J$, 令$x_{(U,n,a)} = a$, 则$(x_j)_{j\in J}$是X中的一个网且

$$(x_j)_{j\in J} \to_{\lambda(X)} x.$$

从而$(x_j)_{j\in J} \to_{\mathcal{I}_0(J)} x$, 故

$$((x_j)_{j\in J}, \mathcal{I}_0(J), x) \in \mathcal{GL}.$$

则存在定向集族$\mathcal{F} \subseteq GIelb_{\mathcal{I}_0(J)}((x_j)_{j\in J})$使得$\mathcal{F} \to_{\tau} x$. 任意$F \in \mathcal{F}$, 由命题2.5知$(x_j)_{j\in J}$终在$\uparrow F$, 即存在$j_0 = (U_0, n_0, a_0) \in J$, 当$j = (U,n,a) \ge j_0$时, $x_j \in \uparrow F$. 从而任意的(U_0, n_0, w), $w \in \uparrow F$, 即$U_0 \subseteq \uparrow F$. 因为$U_0 \in \lambda(X)$, $x \in U_0$, 存在$V \in \tau$和$E \in X^{(<w)}$使得$x \in V \backslash \uparrow E \subseteq U_0$. 因为$V \backslash \uparrow E \in \lambda(X)$, 由命题4.2知

$$x \in \uparrow (V \backslash \uparrow E) \in \tau.$$

故$x \in \mathrm{int}_{\tau}(\uparrow F)$. 任意$x \in W \in \tau$, 由$\mathcal{F} \to_{\tau} x$知存在$F \in \mathcal{F}$使得

$$x \in \mathrm{int}_{\tau}(\uparrow F) \subseteq \uparrow F \subseteq W,$$

故(X,τ)是拟连续空间, 从而(X,τ)是C-空间.

参考文献:

[1] Chen Yuxu, Kou Hui. Core compactness of ordered topological spaces[J]. AIMS Mathematics, 2022, 8(2): 4862-4874.

[2] Shen Ao, Lu Jing, Li Qingguo. Characterization of posets for liminf convergence being topological[J]. Topol Appl, 2021, 291: 107615.

[3] 王武, 张舜, 谭彬. 偏序集上的MS-收敛[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2023(1): 7-11.

[4] Zhang Wenfeng, Bao Bingjia, Xu Xiaoquan. Characterization of T_0 spaces for liminf convergence being topological[J]. Topol Appl, 2022, 322: 108268.

[5] Xu Xiaoquan, Shen Chong, Xi Xiaoyong, et al. On T_0 spaces determined by well-fifiltered spaces[J]. Topol Appl, 2020, 282: 107323.

[6] Andradi H, HO W K. A topological Scott convergence theorem[J]. Log Methods Comput Sci, 2019, 15-29.

[7] 王武, 张国丽, 王颖. 定向空间的way below基[J]. 系统科学与数学, 2022, 42(4): 1060-1066.

[8] Xie Xiaolin, Kou Hui. The Cartesian closedness of c-spaces[J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(9): 16315-16327.

[9] 车铭静, 寇辉. C-空间范畴的一个Cartesian闭满子范畴[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2020, 43(6): 756-762.

[10] 冯华容, 寇辉. T_0拓扑空间的拟连续性与交连续性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2017, 54(5): 905-910.

[11] Georgiou D N, Megaritis A C, Naidoo I, et al. A study of convergences in partially ordered sets[J]. Topol Appl, 2019: 106994.

Ideal lower limit convergence in topological space

WANG Wu[1], ZHANG Shun[2]

(1. Zhonghuan Information College Tianjin University of Technology, Tianjin 300380, China;
2. Tianjin Ren'ai College, Tianjin 301636, China)

Abstract: In order to deeply study the convergence property of topological space, the concepts of ideal lower limit convergence and generalized ideal lower limit convergence of nets in topological space are introduced, and the relationship between the two kinds of limits and C-space and locally strongly compact space is also studied. In particular, the equivalent characterization of C-spaces is given by meet continuous spaces.

Keywords: topological space; net; ideal lower limit convergence; C-space

MR Subject Classification: 06B35; 54A20