高校应用数学学报
2024, 39(2): 231-247

有界Heyting代数的扩张理想和稳定理想

刘春辉

(赤峰学院 教育科学学院, 内蒙古赤峰 024001)

摘　要: 运用泛代数的方法和原理深入研究有界Heyting代数的理想问题. 在有界Heyting代数$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$中引入了理想$I$关于$H$的子集的扩张理想和稳定理想概念, 获得了它们的若干基本性质. 系统讨论了由两类特殊扩张理想构成集合的格论特征, 证明了: (1) 有界Heyting代数$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$的一个给定理想$I$关于$H$的所有子集的扩张理想全体之集$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$在一定条件下构成一个分配完备格, 进一步构成一个Stone格和完备Heyting代数; (2) 有界Heyting代数$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$的关于一个给定子集$A\subseteq H$的稳定理想全体之集$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$构成一个完备Heyting代数. 最后考察了商有界Heyting代数和乘积有界Heyting代数的扩张理想性质.

关键词: 有界Heyting代数; 理想; 扩张理想; 稳定理想; Stone格; 完备Heyting代数
中图分类号: O141.1; O153.1
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2024)02-0231-17

§1　引　言

非经典数理逻辑是一门涉及数学与计算机科学的交叉科学, 对与各种不同形式的非经典数理逻辑推理系统相匹配的非经典数理逻辑代数系统的研究是该理论体系中一个十分重要的研究方向[1-2]. 以荷兰数学家Arend Heyting的名字命名的Heyting代数是一类在直觉模糊逻辑中起着关键性作用的非经典数理逻辑代数系统, 逻辑的排中律在Heyting代数中一般不必成立. 从逻辑层面来看, Heyting代数是经典二值逻辑命题演算推理系统的一种基础性推广, 经典二值逻辑的命题演算推理系统是Heyting代数的一个最简单且最重要的例子. 从代数层面来看, Heyting代数是对Boole代数作一般化处理而得到的一类偏序集, 完备Heyting代数(也称Frame)是无点化拓扑研究领域的一个中心主体概念[2]. 同时Heyting代数又与FI代数, MV代数, BL代数, MTL代数和格蕴涵代数等著名非经典数理逻辑代数系统有着密切的联系. 迄今为止, 对Heyting代数系统性质和结构的研究已经非常深入, 研究成果在众多领域得到了十分成功的应用[3-11].

偏序结构被布尔巴基学派冠名为三大数学母结构之一, 滤子和理想最早是作为偏序集的两类相互对偶的特殊子集而被提出的概念. 在非经典数理逻辑理论研究中, 滤子和理想又被作为

收稿日期: 2022-12-22　　修回日期: 2023-07-09
基金项目: 内蒙古自治区高等学校科学研究项目(NJZY21138; NJZY22146); 内蒙古自治区残疾人联合会研究项目(2023KTYJ19); 赤峰学院2022年教育教学研究重点项目(JYJXZ202204)

研究非经典数理逻辑代数及与它们相对应的逻辑推理系统完备性的两个重要工具而进行了扩充和推广[12-23]. 文献[23]指出, Heyting代数的滤子不但可以用格论(一类特殊的偏序集)语言加以定义, 而且可以用逻辑语言加以定义. 更值得关注的是, 两种不同形式的定义是相互等价的, 这表明滤子概念在揭示Heyting代数系统结构特征过程中发挥着不可替代的重要作用. 研究表明, 在否定运算满足对合(正则)性质的非经典逻辑代数系统中, 各种理想的性质都可借助于与之相对偶的滤子性质直接获得. 所以, 对理想理论的研究必须在否定运算不满足对合性质的代数系统框架下进行才具有真正的意义. Heyting代数恰好是这类代数系统的一个典型代表, 然而, 作为格结构的Heyting代数可以没有最小元0, 从而无界, 这直接导致人们忽略了在Heyting代数中引入理想概念的思考. 为了弥补这一研究空白, 探索借助于理想概念揭示Heyting代数及直觉主义命题逻辑推理系统的新途径和新方法, 笔者在文献[24-26]中对有界Heyting代数及其理想问题做了深入研究, 初步奠定了有界Heyting代数理想理论的研究基础. 作为这一重要工作的继续, 以此为基础, 本文对有界Heyting代数的理想理论作进一步研究, 引入有界Heyting代数的扩张理想和稳定理想概念并深入考察它们的性质特征, 获得了一些有趣且有意义的结果. 进一步丰富和完善了有界Heyting代数理想问题的理论体系.

§2 预备知识

定义2.1[11-12] 设$(H,\leqslant,\wedge,\vee)$是一个格, 若存在$H$上的二元运算$\to$: $H\times H\to H$使
$$c\leqslant(a\to b)\Longleftrightarrow c\wedge a\leqslant b,\forall a,b,c\in H, \tag{2.1}$$
则称$(H,\leqslant,\to)$是一个Heyting代数.

注2.1[11-12] (i) 任一Heyting代数$(H,\leqslant,\to)$都是有最大元1的分配格, 但不一定有最小元0. 特别地, 称具有最小元0的Heyting代数$(H,\leqslant,\to,0,1)$为有界Heyting代数.

(ii) 格$(H,\leqslant,\wedge,\vee)$是Heyting代数当且仅当$\forall a,b\in H$, $\max\{x\in H|a\wedge x\leqslant b\}$存在, 且满足
$$\max\{x\in H|a\wedge x\leqslant b\}=a\to b. \tag{2.2}$$
特别地, 若$(H,\leqslant,\wedge,\vee)$是有限格, 则$(H,\leqslant,\to)$是Heyting代数当且仅当$(H,\leqslant,\wedge,\vee)$是分配格.

引理2.1[11-12] 设$(H,\leqslant,\wedge,\vee)$是一个格, $\to$: $H\times H\to H$是H上的二元运算, 则$(H,\leqslant,\to)$是Heyting代数当且仅当下列各条件(H1)-(H4)成立.

(H1) $(\forall a\in H)(a\to a=1)$;

(H2) $(\forall a,b,c\in H)(a\to(b\wedge c)=(a\to b)\wedge(a\to c))$;

(H3) $(\forall a,b\in H)(a\wedge(a\to b)=a\wedge b)$;

(H4) $(\forall a,b\in H)(b\wedge(a\to b)=b)$.

引理2.2[11-12, 23] 设$(H,\leqslant,\to)$是Heyting代数, 则下列各结论成立.

(H5) $(\forall a\in H)(a\to 1=1, 1\to a=a)$;

(H6) $(\forall a,b\in H)(a\leqslant b\Leftrightarrow a\to b=1)$;

(H7) $(\forall a,b,c\in H)(a\to(b\to c)=b\to(a\to c)=(a\wedge b)\to c)$;

(H8) $(\forall a,b,c\in H)((a\vee b)\to c=(a\to c)\wedge(b\to c))$;

(H9) $(\forall a,b,c\in H)(a\to b\leqslant(c\to a)\to(c\to b))$;

(H10) $(\forall a,b,c\in H)(a\to b\leqslant(b\to c)\to(a\to c))$;

(H11) $(\forall a,b,c\in H)(a\to(b\to c)=(a\to b)\to(a\to c))$;

(H12) $(\forall a,b,c\in H)(a\leqslant b\Rightarrow(c\to a\leqslant c\to b$ 且 $b\to c\leqslant a\to c))$.

定义2.2[11-12] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, H上的一元运算$\neg: H\rightarrow H$定义为

$$\neg a=a\rightarrow 0,\forall a\in H. \tag{2.3}$$

引理2.3[11-12, 23-24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, 则下列各结论成立.

(H13) $\neg 0=1,\neg 1=0$;

(H14) $(\forall a\in H)(\neg a\wedge a=0)$;

(H15) $(\forall a\in H)(a\leqslant\neg\neg a,\neg a=\neg\neg\neg a)$;

(H16) $(\forall a,b\in H)(\neg(a\vee b)=\neg b\wedge\neg a)$;

(H17) $(\forall a,b\in H)(\neg a\vee\neg b\leqslant\neg(a\wedge b))$;

(H18) $(\forall a,b\in H)(a\leqslant b\Rightarrow\neg b\leqslant\neg a)$;

(H19) $(\forall a,b\in H)(a\rightarrow b\leqslant\neg b\rightarrow\neg a)$;

(H20) $(\forall a,b\in H)(a\wedge b=0\Leftrightarrow a\leqslant\neg b)$;

(H21) $(\forall a,b\in H)(\neg\neg(a\rightarrow\neg b)=a\rightarrow\neg b)$;

(H22) $(\forall a,b\in H)(\neg\neg(a\rightarrow\neg\neg b)=a\rightarrow\neg\neg b)$;

(H23) $(\forall a,b\in H)(\neg\neg a\rightarrow\neg\neg b=a\rightarrow\neg\neg b=\neg b\rightarrow\neg a)$;

(H24) $(\forall a,b\in H)(a\rightarrow\neg b=b\rightarrow\neg a=\neg\neg a\rightarrow\neg b=\neg(a\wedge b))$.

定义2.3[24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, H上二元运算$\oplus: H\times H\rightarrow H$定义为

$$a\oplus b=\neg a\rightarrow b,\forall a,b\in H. \tag{2.4}$$

引理2.3[24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, 则下列各结论成立.

(H25) $(\forall a\in H)(a\oplus\neg a=1)$;

(H26) $(\forall a,b\in H)(b\leqslant a\oplus(\neg a\wedge b))$;

(H27) $(\forall a,b\in H)(a\leqslant b\oplus\neg(a\rightarrow b))$;

(H28) $(\forall a,b\in H)(a\vee b\leqslant a\oplus b\leqslant\neg(\neg a\wedge\neg b))$;

(H29) $(\forall a,b,c\in H)((a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c))$;

(H30) $(\forall a,b,c\in H)(a\oplus(b\wedge c)=(a\oplus b)\wedge(a\oplus c))$;

(H31) $(\forall a,b,c\in H)((a\wedge b)\oplus c=(a\oplus c)\wedge(b\oplus c))$;

(H32) $(\forall a,b,c\in H)(a\wedge(b\oplus c)\leqslant(a\wedge b)\oplus(a\wedge c))$;

(H33) $(\forall a,b,c\in H)(a\leqslant b\Rightarrow(c\oplus a\leqslant c\oplus b$ 且 $a\leqslant b\Rightarrow a\oplus c\leqslant b\oplus c))$.

注2.2[24] 在有界Heyting代数$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$中, 运算$\oplus$一般不满足交换律. 事实上, 因为$H$一般不具对合性, 即$\exists a\in H$, $a\neq\neg\neg a$, 故

$$a\oplus 0=\neg a\rightarrow 0=\neg\neg a\neq a=1\rightarrow a=\neg 0\rightarrow a=0\oplus a.$$

定义2.4[24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $\varnothing\neq I\subseteq H$. 若$I$满足

(Id1) $0\in I$;

(Id2) $(\forall a,b\in H)((a\in I$且$\neg(\neg a\rightarrow\neg b)\in I)\Rightarrow b\in I)$,

则称I是H的一个理想. 由H的全体理想构成的集合记为$\mathbf{Id}(H)$.

注2.3[24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数.

(1) 显然$\{0\}\in\mathbf{Id}(H)$且$H\in\mathbf{Id}(H)$;

(2) 对任意的$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathbf{Id}(H)$都有$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\in\mathbf{Id}(H)$, 即$\mathbf{Id}(H)$对任意交封闭.

引理2.4[24] 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $\varnothing\neq I\subseteq H$. 则$I\in\mathbf{Id}(H)\Longleftrightarrow I$满足

(Id3) $(\forall a, b \in H)((a \leqslant b$且$b \in I) \Rightarrow a \in I)$;

(Id4) $(\forall a, b \in H)((a \in I$且$b \in I) \Rightarrow a \oplus b \in I)$.

定义2.5[24] 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $\varnothing \neq A \subseteq H$. 称$H$的包含$A$的最小理想为$H$的由$A$生成的理想, 记为$\langle A\rangle$, 即$\langle A\rangle = \bigcap\limits_{A \subseteq I \in \mathbf{Id}(H)} I$. 特别地, 当$A = \{a\}$时, 简记$\langle\{a\}\rangle = \langle a\rangle$.

引理2.5[24] 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, 则下列各结论成立.

(1) $(\forall \varnothing \neq A, B \subseteq H)(A \subseteq B \Rightarrow \langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle)$;

(2) $(\forall I \in \mathbf{Id}(H))(\langle I\rangle = I)$;

(3) $(\forall a, b \in H)(a \leqslant b \Rightarrow \langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle)$;

(4) $(\forall a \in H)(\forall I \in \mathbf{Id}(H))(\langle a\rangle \subseteq I \Leftrightarrow a \in I)$.

引理2.5[24] 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $\varnothing \neq A \subseteq H$, 则下列各结论成立.

(1) $\langle A\rangle = \{a \in H | \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \text{ s.t. } \neg a_1 \rightarrow (\neg a_2 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\neg a_n \rightarrow \neg a) \cdots)) = 1\}$;

(2) $\langle A\rangle = \{a \in H | \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \text{ s.t. } \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \cdots \wedge \neg a_n \leqslant \neg a\}$;

(3) $\langle A\rangle = \{a \in H | \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \text{ s.t. } a \leqslant a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n\}$.

定义2.5[26] 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数且$I \in \mathbf{Id}(H)$.

(i) 如果$I \neq H$, 则称I是H的真理想;

(ii) 如果H的真理想P满足

$$(\forall a, b \in H)(a \wedge b \in P \Rightarrow (a \in P\text{或}b \in P)), \tag{2.5}$$

则称P是H的一个素理想.

定义2.6[26] 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数且$M$是$H$的真理想. 如果$\forall I \in \mathbf{Id}(H)$, 当$M \subseteq I$时, 必有$I = M$或$I = H$, 即$M$不真包含于$H$的任一真理想中, 则称$M$是$H$的极大理想.

§3 扩张理想和稳定理想的定义及基本性质

本节在有界Heyting中引入扩张理想和稳定理想概念并考察它们的基本性质.

问题的引入 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I \in \mathbf{Id}(H)$且$A \subseteq H$, 则由(Id3)显然可知$\forall u \in A$, $a \in I \Rightarrow a \wedge u \in I$. 反之, 定义集合

$$E_I(A) = \{a \in H | a \wedge u \in I, \forall u \in A\}, \tag{3.1}$$

那么$E_I(A)$与I之间关系如何? 其本身又具有什么特性? 为了寻找问题的答案, 展开如下讨论.

定理3.1 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I \in \mathbf{Id}(H)$且$A \subseteq H$. 则$E_I(A) \in \mathbf{Id}(H)$且$I \subseteq E_I(A)$.

证 因为$\forall u \in A, 0 \wedge u = 0 \in I \in \mathbf{Id}(H)$, 所以$0 \in E_I(A)$, 即$E_I(A)$满足(Id1). 任取$a, b \in H$, 设$a \in E_I(A)$且$\neg(\neg a \rightarrow \neg b) \in E_I(A)$, 则由(3.1)得$\forall u \in A$, $a \wedge u \in I$且$\neg(\neg a \rightarrow \neg b) \wedge u \in I$, 从而由$I \in \mathbf{Id}(H)$和(Id4)得$(a \wedge u) \oplus (\neg(\neg a \rightarrow \neg b) \wedge u) \in I$. 又因为

$$\begin{aligned}
(a \wedge u) \oplus (\neg(\neg a \rightarrow \neg b) \wedge u) &\geqslant u \wedge (a \oplus \neg(\neg a \rightarrow \neg b)) && [\text{由(H32)}]\\
&= u \wedge (\neg a \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow 0)) && [\text{由(2.3)和(2.4)}]\\
&= u \wedge \neg(\neg a \wedge (\neg a \rightarrow \neg b)) && [\text{由(H7)和(2.3)}]\\
&= u \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b) && [\text{由(H3)}]\\
&= u \wedge \neg\neg(a \vee b) \geqslant u \wedge (a \vee b) \geqslant u \wedge b, && [\text{由(H16)和(H15)}]
\end{aligned}$$

所以由(Id3)得$u\wedge b\in I$, 从而$b\in E_I(A)$, 故$E_I(A)$亦满足(Id2). 因此由定义2.4得$E_I(A)\in\mathbf{Id}(H)$.

下证$I\subseteq E_I(A)$. 事实上, 任取$a\in I\in\mathbf{Id}(H)$, 因为对任意的$u\in A, a\wedge u\leqslant a$, 所以由(Id3)得$a\wedge u\in I$, 从而$a\in E_I(A)$. 因此$I\subseteq E_I(A)$, 定理得证.

注3.1 定理3.1表明: 在有界Heyting代数$(H,\leqslant,\to,0,1)$中, 对$I\in\mathbf{Id}(H)$和$A\subseteq H$而言, 按照(3.1)的方式定义的集合$E_I(A)$是H的一个包含理想I的理想. 为此引入定义3.1.

定义3.1 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$且$A\subseteq H$. 称按照(3.1)的方式定义的集合$E_I(A)$为H的理想I的关于子集A的扩张理想, 简称为I的关于A的扩张理想.

注3.2 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是有界Heyting代数且$I\in\mathbf{Id}(H)$. 为叙述简洁起见, 当$A=\{u\}\subseteq H$时, 将$E_I(A)=E_I(\{u\})$简记为$E_I(u)$. 即

$$E_I(u)=\{a\in H|a\wedge u\in I\}. \tag{3.2}$$

例3.1 设格$H=\{0,a,b,c,1\}$且其Hasse图如图1. 定义H上的二元运算$\to$如下表.

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

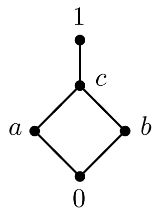

图1 格L的Hasse图

则$(H,\leqslant,\to,0,1)$是一个有界Heyting代数. 可以验证

$$\mathbf{Id}(H)=\{I_1=\{0\},I_2=\{0,a\},I_3=\{0,b\},I_4=H\}.$$

令$A=\{a\}$, 则由定义3.1得$E_{I_1}(A)=\{0,b\}=I_3$且$E_{I_2}(A)=\{0,a,b,c,1\}=I_4=H$.

定理3.2 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是有界Heyting代数. 则下列各结论成立.

(1) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A,B\subseteq H)(A\subseteq B\Rightarrow E_I(B)\subseteq E_I(A))$;

(2) $(\forall I,J\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(I\subseteq J\Rightarrow E_I(A)\subseteq E_J(A))$;

(3) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(E_I(A)=H\Leftrightarrow A\subseteq I)$;

(4) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(E_I(I)=E_I(0)=E_I(E_I(A)\cap A)=H)$;

(5) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(A\subseteq E_I(E_I(A)))$;

(6) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(E_I(A)=E_I(E_I(E_I(A))))$;

(7) $(\forall I,J\in\mathbf{Id}(H))(I\subseteq J\Rightarrow E_I(J)\cap J=I)$;

(8) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(E_I(E_I(A))\cap E_I(A)=I)$;

(9) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(E_I(A)=E_I(\langle A\rangle))$;

(10) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A,B\subseteq H)(E_{E_I(A)}(B)=E_{E_I(B)}(A))$;

(11) $(\forall I\in\mathbf{Id}(H))(\forall A\subseteq H)(I\subseteq A\Rightarrow\langle A\rangle\cap E_I(\langle A\rangle)=I)$.

证 (1) 设$I\in\mathbf{Id}(H)$且$A\subseteq B\subseteq H$, 如果$a\in E_I(B)$, 则对任意的$u\in B, a\wedge u\in I$. 故对任意的$v\in A\subseteq B, a\wedge v\in I$, 从而$a\in E_I(A)$. 因此$E_I(B)\subseteq E_I(A)$.

(2) 设$I,J\in\mathbf{Id}(H)$且$I\subseteq J$, 如果$a\in E_I(A)$, 则对任意的$u\in A, a\wedge u\in I\subseteq J$, 从而$a\in E_J(A)$. 故$E_I(A)\subseteq E_J(A)$.

(3) 设$E_I(A)=H$, 如果$a\in A$, 则$a\in A\subseteq H=E_I(A)$, 从而$a=a\wedge a\in I$, 故$A\subseteq I$. 反之, 设$A\subseteq I$. 任取$a\in H$, 因为对任意的$u\in A\subseteq I$, $a\wedge u\leqslant u$, 所以由$I\in\mathbf{Id}(H)$和(Id3)得$a\wedge u\in I$,

从而$a \in E_I(A)$, 故$H \subseteq E_I(A)$. 因此$E_I(A) = H$.

(4) 设$I \in \mathbf{Id}(H)$且$a \in E_I(A) \cap A$, 则$a \in A$且$a \in E_I(A)$, 从而$a = a \wedge a \in I$, 故$E_I(A) \cap A \subseteq I$. 又因为显然$\{0\} \subseteq I$且$I \subseteq I$, 所以由(3)便得$E_I(I) = E_I(0) = E_I(E_I(A) \cap A) = H$.

(5) 设$I \in \mathbf{Id}(H)$且$a \in A$, 则对任意的$u \in E_I(A)$, $u \wedge a = a \wedge u \in I$, 故$a \in E_I(E_I(A))$, 因此$A \subseteq E_I(E_I(A))$.

(6) $I \in \mathbf{Id}(H)$, 一方面, 若$a \in E_I(A)$, 则对任意的$u \in E_I(E_I(A))$, $u \wedge a = a \wedge u \in I$, 从而$a \in E_I(E_I(E_I(A)))$, 故$E_I(A) \subseteq E_I(E_I(E_I(A)))$. 另一方面, 因为由(5)可得$A \subseteq E_I(E_I(A))$, 所以由(1)又可得$E_I(E_I(E_I(A))) \subseteq E_I(A)$. 综合两方面便得$E_I(A) = E_I(E_I(E_I(A)))$.

(7) 设$I, J \in \mathbf{Id}(H)$且$I \subseteq J$. 一方面, 因为由定理3.1知$I \subseteq E_I(J)$, 所以$I \subseteq E_I(J) \cap J$. 另一方面, 设$a \in E_I(J) \cap J$, 则$a \in E_I(J)$且$a \in J$, 所以由(3.1)得$a = a \wedge a \in I$, 从而又得$E_I(J) \cap J \subseteq I$. 因此综合两方面便得$E_I(J) \cap J = I$.

(8) 因为由定理3.1知$I \subseteq E_I(A) \in \mathbf{Id}(H)$, 所以由(7)得$E_I(E_I(A)) \cap E_I(A) = I$.

(9) 设$I \in \mathbf{Id}(H)$且$A \subseteq H$. 一方面, 因为$A \subseteq \langle A\rangle$, 所以由(1)得$E_I(\langle A\rangle) \subseteq E_I(A)$. 另一方面, 设$a \in E_I(A)$, 则对任意的$u \in A$, $a \wedge u \in I$. 任取$v \in \langle A\rangle$, 则由引理2.5(3)知, 存在$a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$使$v \leqslant a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n$, 从而由(H32)得

$$a \wedge v \leqslant a \wedge (a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \leqslant (a \wedge a_1) \oplus (a \wedge a_2) \oplus \cdots \oplus (a \wedge a_n).$$

注意到$a \wedge a_i \in I, i = 1, 2, \cdots, n$, 由$I \in \mathbf{Id}(H)$及(Id3)便得$a \wedge v \in I$, 从而$a \in E_I(\langle A\rangle)$, 进而$E_I(A) \subseteq E_I(\langle A\rangle)$. 因此综合两方面便得$E_I(A) = E_I(\langle A\rangle)$.

(10) 设$a \in E_{E_I(A)}(B)$, 则对任意的$v \in B, a \wedge v \in E_I(A)$, 从而对任意的$u \in A, (a \wedge u) \wedge v = (a \wedge v) \wedge u \in I$. 故由$v \in B$的任意性得$a \wedge u \in E_I(B)$, 从而$a \in E_{E_I(B)}(A)$. 因此$E_{E_I(A)}(B) \subseteq E_{E_I(B)}(A)$. 类似可证$E_{E_I(B)}(A) \subseteq E_{E_I(A)}(B)$, 因此$E_{E_I(A)}(B) = E_{E_I(B)}(A)$.

(11) 设$I \in \mathbf{Id}(H)$且$I \subseteq A \subseteq H$, 则$I \subseteq A \subseteq \langle A\rangle$, 故由(7)得$\langle A\rangle \cap E_I(\langle A\rangle) = I$.

定理3.3 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbf{Id}(H)$且$A \subseteq H$. 则

(1) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) = E_{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$;

(2) 当$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是链且$A$为有限集时, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) = E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$.

证 (1) 因为由(3.1)式得

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) \quad & \text{当且仅当} \quad (\forall\lambda \in \Lambda)(a \in E_{I_\lambda}(A)) \\ & \text{当且仅当} \quad (\forall\lambda \in \Lambda)(\forall u \in A)(a \wedge u \in I_\lambda) \\ & \text{当且仅当} \quad (\forall u \in A)\left(a \wedge u \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \\ & \text{当且仅当} \quad a \in E_{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A), \end{aligned}$$

所以$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) = E_{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$.

(2) 设$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是链且$A$为有限集, 则易知$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \in \mathbf{Id}(H)$. 设$a \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A)$, 则存在$\lambda_0 \in \Lambda$使$a \in E_{I_{\lambda_0}}(A)$, 从而对任意的$u \in A, a \wedge u \in I_{\lambda_0}$, 进而对任意的$u \in A, a \wedge u \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 故$a \in E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$. 因此$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) \subseteq E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$. 反之, 设$a \in E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$, 则对任意的$u \in$

$A, a \wedge u \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. 因为$A$为有限集且$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbf{Id}(H)$是链, 所以存在$\mu \in \Lambda$使得对任意的$u \in A, a \wedge u \in I_\mu$, 故$a \in E_{I_\mu}(A)$, 进而$a \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A)$. 因此$E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A) \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A)$. 综合便得$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A) = E_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}(A)$.

定义3.2 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I \in \mathbf{Id}(H)$且$A \subseteq H$. 如果$E_I(A) = I$, 则称I是H的关于A的稳定理想.

例3.2 设格$H = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$且其Hasse图如图2. 定义$H$上的二元运算$\rightarrow$如下表.

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	f	1	f	f	1	1	f	1
b	e	e	1	e	1	e	1	1
c	d	d	d	1	d	1	1	1
d	c	e	f	c	1	e	f	1
e	b	d	b	f	d	1	f	1
f	a	a	d	e	d	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

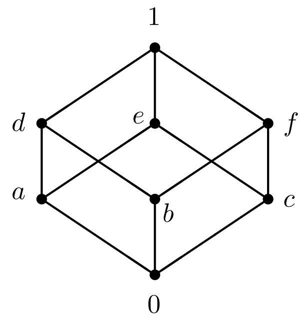

图2 格H的Hasse图

则$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是一个有界Heyting代数. 可以验证$\mathbf{Id}(H)$是一个8个元素集, 具体为

$$\{\{0\}, I_1 = \{0, a\}, I_2 = \{0, b\}, I_3 = \{0, c\}, I_4 = \{0, a, b, d\}, I_5 = \{0, a, c, e\}, I_6 = \{0, b, c, f\}, H\}.$$

令$A = \{a, b\}$, 则$E_{I_j}(A) = I_j, j = 3, 5, 6$, 故由定理3.2知$I_j, j = 3, 5, 6$都是$H$关于$A$的稳定理想. 但因为$E_{\{0\}}(A) = \{0, c\} = I_3 \neq \{0\}$, $E_{I_1}(A) = I_5 \neq I_1$, $E_{I_2}(A) = I_6 \neq I_2$, $E_{I_4}(A) = H \neq I_4$, 所以$\{0\}$和$I_k, k = 1, 2, 4$均不是关于A的稳定理想. 显然H是关于任一子集$M \subseteq H$的稳定理想.

定理3.4 设$(H, \leqslant, \rightarrow, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I \in \mathbf{Id}(H)$且$A, B \subseteq H$.

(1) 若$A = \varnothing$, 则I是H的关于A的稳定理想;

(2) 若$1 \in A$, 则I是H的关于A的稳定理想;

(3) 若I为H的素理想且$E_I(A) \neq H$, 则I是H的关于A的稳定理想;

(4) 若I为H的极大理想且$E_I(A) \neq H$, 则I是H的关于A的稳定理想;

(5) 若$A \subseteq B$且I是H的关于A的稳定理想, 则I是H的关于B的稳定理想.

证 (1) 平凡的.

(2) 设$1 \in A$, 则对任意的$a \in E_I(A)$, $a = 1 \wedge a \in I$, 故$E_I(A) \subseteq I$. 又因为由定理3.1得$I \subseteq E_I(A)$, 所以$E_I(A) = I$. 因此I是H的关于A的稳定理想.

(3) 设I为H的素理想且$E_I(A) \neq H$. 假设I不是H的关于A的稳定理想, 则$E_I(A) \neq I$, 故由定理3.1知存在$a \in E_I(A)$使$a \notin I$. 而由$a \in E_I(A)$又得对任意的$u \in A$, $a \wedge u \in I$, 故由I为H的素理想得$u \in I$, 从而$A \subseteq I$. 所以由定理3.2(3)得$E_I(A) = H$, 这与$E_I(A) \neq H$矛盾! 因此I是H的关于A的稳定理想.

(4) 设I为H的极大理想且$E_I(A) \neq H$. 因为由定理3.1得$I \subseteq E_I(A)$, 所以由定义2.6便得$E_I(A) = I$, 因此I是H的关于A的稳定理想.

(5) 设I是H的关于A的稳定理想, 则$E_I(A) = I$. 又因为$A \subseteq B$, 所以由定理3.2(1)可得$E_I(B) \subseteq E_I(A) = I$. 而由定理3.1又得$I \subseteq E_I(B)$, 故$E_I(B) = I$, 因此$I$是$H$的关于$B$的稳定

理想.

定理3.5 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$且$A\subseteq H$. 则下列各陈述等价.

(1) I是H的关于A的稳定理想;

(2) I是H的关于$\langle A\rangle$的稳定理想;

(3) $E_I(E_I(A))=H$.

证 (1)$\Rightarrow$(2): 设I是H的关于A的稳定理想, 则$E_I(A)=I$. 从而由定理3.2(9)得$E_I(\langle A\rangle)=E_I(A)=I$, 因此$I$是$H$的关于$\langle A\rangle$的稳定理想.

(2)$\Rightarrow$(3): 设I是H的关于$\langle A\rangle$的稳定理想, 则$E_I(\langle A\rangle)=I$. 故由定理3.2(9)得$E_I(A)=E_I(\langle A\rangle)=I$, 因此再由定理3.2(3)便得$E_I(E_I(A))=H$.

(3)$\Rightarrow$(1): 设$E_I(E_I(A))=H$, 则对任意的$a\in E_I(A)\subseteq H$, $a=a\wedge a\in I$, 故$E_I(A)\subseteq I$. 又因为由定理3.1得$I\subseteq E_I(A)$, 所以$E_I(A)=I$. 因此I是H的关于A的稳定理想.

§4 两类扩张理想集合的格结构特征

文献[24]研究了有界Heyting代数中全体理想之集的格结构特征, 证明了如下结论.

引理4.1 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, 则$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\Longrightarrow,\{0\},H)$是一个完备Heyting代数. 其中格的交运算$\sqcap$和并运算$\sqcup$以及与交运算伴随的蕴涵算子$\Longrightarrow$分别定义为

$$I\sqcap J=I\cap J, I\sqcup J=\langle I\cup J\rangle, I\Longrightarrow J=\{a\in H|\forall b\in I, a\wedge b\in J\}, \forall I,J\in\mathbf{Id}(H).$$

$$\bigsqcap_{\lambda\in\varLambda}I_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\varLambda}I_\lambda, \bigsqcup_{\lambda\in\varLambda}I_\lambda=\left\langle\bigcup_{\lambda\in\varLambda}I_\lambda\right\rangle, \forall\{I_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}\subseteq\mathbf{Id}(H).$$

本节考察一个有界Heyting代数$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$的两类特殊扩张理想所构成的$\mathbf{Id}(H)$的子集之格结构特征. 为此引入定义4.1.

定义4.1 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$. 定义集合

$$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))=\{E_I(A)|\forall A\in\mathscr{P}(H)\}, \tag{4.1}$$

即集合$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$表示$H$的一个给定理想$I$关于$H$的所有子集之扩张理想全体构成的集合. 由定理3.1显然可知$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))\subseteq\mathbf{Id}(H)$.

关于集合$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$格结构特征, 有如下定理4.1.

定理4.1 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$. 如果对任意的$A,B\in\mathscr{P}(H)$), $E_I(A\cap B)\subseteq E_I(A)\cup E_I(B)$, 则$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\{0\},H)$的一个有界分配完备子格.

证 证明过程分如下四步完成.

第1步: 证明$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup)$构成格. 为此证明对任意的$E_I(A),E_I(B)\in\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$有

(i) $E_I(A)\sqcap E_I(B)=E_I(A)\cap E_I(B)=E_I(A\cup B)$;

(ii) $E_I(A)\sqcup E_I(B)=E_I(A)\cup E_I(B)=E_I(A\cap B)$.

(i) 因为$A\subseteq A\cup B$且$B\subseteq A\cup B$, 所以由定理3.2(1)得$E_I(A\cup B)\subseteq E_I(A)$且$E_I(A\cup B)\subseteq E_I(B)$, 这表明$E_I(A\cup B)$是$E_I(A)$与$E_I(B)$在$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$中的下界. 假设$E_I(D)$是$E_I(A)$与$E_I(B)$在$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$中的任一下界且$E_I(D)\neq E_I(A\cup B)$, 则$E_I(D)\subseteq E_I(A)$且$E_I(D)\subseteq E_I(B)$. 下证$E_I(D)\subseteq E_I(A\cup B)$. 事实上, 设$a\in E_I(D)$, 则$a\in E_I(A)$且$a\in E_I(B)$, 从而对任意的$u\in A, a\wedge u\in I$且对任意的$v\in B, a\wedge v\in I$, 进而对任意的$w\in A\cup B, a\wedge w\in I$, 故$a\in E_I(A\cup B)$.

因此$E_I(A\cup B)$是$E_I(A)$与$E_I(B)$在$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$中的最大下界. 即

$$E_I(A)\sqcap E_I(B)=E_I(A)\cap E_I(B)=E_I(A\cup B).$$

(ii) 因为$A\cap B\subseteq A$且$A\cap B\subseteq B$, 所以由定理3.2(1)得$E_I(A)\subseteq E_I(A\cap B)$且$E_I(B)\subseteq E_I(A\cap B)$, 这表明$E_I(A\cap B)$是$E_I(A)$与$E_I(B)$在$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$中的上界. 故$E_I(A)\sqcup E_I(B)\subseteq E_(A\cap B)$. 又因为由假设知$E_I(A\cap B)\subseteq E_I(A)\cup E_I(B)$, 所以$E_I(A\cap B)\subseteq\langle E_I(A)\cup E_I(B)\rangle=E_I(A)\sqcup E_I(B)$. 故$E_I(A)\sqcup E_I(B)=E_I(A)\cup E_I(B)=E_I(A\cap B)$.

因此$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup)$是一个格且是$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap)$的子格.

第2步：证明格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup)$有界. 事实上, 因为对任意的$A\in\mathscr{P}(H)$都有

$$E_I(1)=I\subseteq E_I(A)\subseteq H=E_I(0),$$

所以$E_I(1)$和$E_I(0)$分别为格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup)$中关于集合包含运算$\subseteq$的最小元与最大元. 因此$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\{0\},H)$的有界子格.

第3步：证明有界格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是完备格. 对任一族$\{E_I(A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$, 类似(i)的证明可得

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)=E_I\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right).$$

这表明有界格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$的任一子集族都一定有下确界, 因此有界格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是完备格.

第4步：证明完备格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$满足分配律. 这只需在格$(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup)$中证明满足: 对任意的$E_I(A),E_I(B),E_I(C)\in\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$,

$$E_I(C)\sqcup(E_I(A)\sqcap E_I(B))=(E_I(C)\sqcup E_I(A))\sqcap(E_I(C)\sqcup E_I(B)).$$

事实上, 由第1步中(i)和(ii)得

$$\begin{aligned}E_I(C)\sqcup(E_I(A)\sqcap E_I(B))&=E_I(C)\sqcup E_I(A\cup B)\\&=E_I(C\cap(A\cup B))\\&=E_I((C\cap A)\cup(C\cap B))\\&=E_I(C\cap A)\sqcap E_I(C\cap B)\\&=(E_I(C)\sqcup E_I(A))\sqcap(E_I(C)\sqcup E_I(B)).\end{aligned}$$

综上得$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\{0\},H)$的有界分配完备子格.

为获得完备分配格$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$的进一步性质, 给出定义4.2.

定义4.2[7] 设$(L,\wedge,\vee,0)$是一个有零元的格, 元素$a^*\in L$称为$a\in L$的伪补, 若$a\wedge a^*=0$且$a\wedge x=0\Rightarrow x\leqslant a^*$. 称有界格$(L,\wedge,\vee,0,1)$是伪补格, 若$\forall a\in L$在$L$中都有伪补. 称有界伪补分配格$(L,\wedge,\vee,0,1)$是Stone格, 若$\forall a\in L,a^*\vee a^{**}=1$.

引理4.2[7] 有界伪补分配格$(L,\wedge,\vee,0,1)$是Stone格当且仅当$\forall a,b\in L,(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$.

定理4.2 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$. 如果对任意的$A,B\in\mathscr{P}(H))$, $E_I(A\cap B)\subseteq E_I(A)\cup E_I(B)$, 则$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是一个Stone格.

证 证明过程分如下两步完成.

第1步：证明$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是一个伪补格. 为此断言

$$(E_I(A))^*=E_I(E_I(A)),\forall E_I(A)\in\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)).$$

事实上, 一方面, 由定理3.2(8)得$E_I(A)\sqcap E_I(E_I(A))=E_I(A)\cap E_I(E_I(A))=I=E_I(1)$. 另一方面, 设$E_I(A)\sqcap E_I(B)=E_I(1)=I$, 任取$a\in E_I(B)$, 则对任意的$b\in E_I(A)$, 由$a\wedge b\leqslant a$且$a\wedge b\leqslant b$及(Id3)得$a\wedge b\in E_I(A)\cap E_I(B)=E_I(A)\sqcap E_I(B)=I$, 所以$a\in E_I(E_I(A))$, 故$E_I(B)\subseteq E_I(E_I(A))$. 因此由定义4.2得$(E_I(A))^*=E_I(E_I(A))$.

第2步: 证明$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,E_I(1),E_I(0))$是Stone格. 由定理4.2和(i)知, 只需证明

$$(E_I(A)\sqcap E_I(B))^*=(E_I(A))^*\sqcup(E_I(B))^*,\forall E_I(A),E_I(B)\in\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)).$$

事实上

$$\begin{aligned}&(E_I(A)\sqcap E_I(B))^*=(E_I(A\cup B))^*=E_I(E_I(A\cup B))\\ =&E_I(E_I(A)\sqcap E_I(B))=E_I(E_I(A)\cap E_I(B))\\ =&E_I(E_I(A))\sqcup E_I(E_I(B)=(E_I(A))^*\sqcup(E_I(B))^*.\end{aligned}$$

定理得证.

定理4.3 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$. 如果$\forall\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathscr{P}(H)$恒有

$$E_I\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda),$$

则$(\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H)),\subseteq,\sqcap,\sqcup,\Longrightarrow,E_I(1),E_I(0))$是$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\Longrightarrow,\{0\},H)$的完备子Heyting代数.

证 由定理4.3和引理4.1知, 为完成定理证明, 只需证: $\forall A\subseteq H$, $\forall\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathscr{P}(H)$,

$$E_I(A)\sqcap\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)\right)=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}\left(E_I(A)\sqcap E_I(A_\lambda)\right).$$

事实上, 因为对任意的$\lambda\in\Lambda$, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subseteq A_\lambda$, 所以由定理3.2(1)得$E_I(A_\lambda)\subseteq E_I\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right),\forall\lambda\in\Lambda$, 从而$E_I\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)$是$\{E_I(A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$的一个上界, 故$\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)\subseteq E_I\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)$. 又因为由假设知$E_I\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)$, 所以引理2.5(11)和引理4.1得

$$E_I\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)=\left\langle E_I\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\right\rangle\subseteq\left\langle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)\right\rangle=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda).$$

因此$\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)=E_I\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)$. 于是

$$\begin{aligned}&E_I(A)\sqcap\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A_\lambda)\right)=E_I(A)\sqcap E_I\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)=E_I\left(A\cup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\right)\\ =&E_I\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup A_\lambda)\right)=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}E_I(A\cup A_\lambda)=\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}\left(E_I(A)\sqcap E_I(A_\lambda)\right).\end{aligned}$$

定理得证.

定义4.3 设$(H,\leqslant,\rightarrow,0,1)$是有界Heyting代数, $A\subseteq H$. 定义集合

$$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)=\{I\in\mathbf{Id}(H)|E_I(A)=I\},\tag{4.2}$$

即集合$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$表示$H$的关于给定子集$A\subseteq H$的稳定理想全体构成的集合. 由(4.2)式显然可知

$$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)\subseteq\mathbf{Id}(H).$$

为了考察集合$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$格结构特征, 首先证明命题4.1.

命题4.1 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是一个有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$且$A\subseteq H$, 则

$$E_I(A)=\langle A\rangle\Longrightarrow I.$$

证 由引理4.1知, $\langle A\rangle\Longrightarrow I=\{a\in H|\forall u\in\langle A\rangle, a\wedge u\in I\}$. 设$a\in E_I(A)$, 对任意的$u\in\langle A\rangle$, 因为由引理2.5(3)知存在$u_1,u_2,\cdots,u_n\in A$使得$u\leqslant u_1\oplus u_2\oplus\cdots\oplus u_n$且由$a\in E_I(A)$知$a\wedge u_i\in I, i=1,2,\cdots,n$, 所以由(H32)和(Id3)得

$$a\wedge u\leqslant a\wedge(u_1\oplus u_2\oplus\cdots\oplus u_n)\leqslant(a\wedge u_1)\oplus(a\wedge u_2)\oplus\cdots\oplus(a\wedge u_n)\in I,$$

故由(Id4)得$a\wedge u\in I$. 因此$a\in\langle A\rangle\Longrightarrow I$, 即$E_I(A)\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow I$.

反之, 设$a\in\langle A\rangle\Longrightarrow I$, 对任意的$u\in A$, 因为$A\subseteq\langle A\rangle$, 所以$u\in\langle A\rangle$, 从而$a\wedge u\in I$. 因此$a\in E_I(A)$, 即$\langle A\rangle\Longrightarrow I\subseteq E_I(A)$.

综合便得$E_I(A)=\langle A\rangle\Longrightarrow I$.

注4.1 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是一个有界Heyting代数, $I\in\mathbf{Id}(H)$且$A,B\subseteq H$. 则由引理4.1中完备Heyting代数$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\Longrightarrow,\{0\},H)$的性质和命题4.1可得

$$E_{E_I(A)}(B)=\langle B\rangle\Longrightarrow(\langle A\rangle\Longrightarrow I)=\langle A\rangle\Longrightarrow(\langle B\rangle\Longrightarrow I)=\langle A\rangle\cap\langle B\rangle\Longrightarrow I=E_I(\langle A\rangle\cap\langle B\rangle).$$

所以再由定理3.2(10)便得

$$E_{E_I(B)}(A)=E_{E_I(A)}(B)=E_I(\langle A\rangle\cap\langle B\rangle).\tag{4.3}$$

同时注意到在完备Heyting代数$(H,\leqslant,\wedge,\vee,\to,0,1)$中对任意的$a\in H$和$\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq H$恒有

$$a\to\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a\to a_\lambda),$$

可知在$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\Longrightarrow,\{0\},H)$中, 对任意的$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathbf{Id}(H)$必有

$$\langle A\rangle\Longrightarrow\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\right)=\prod_{\lambda\in\Lambda}(\langle A\rangle\Longrightarrow I_\lambda).$$

命题4.2 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是一个有界Heyting代数且$A\subseteq H$, 则

$$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)=\{\langle A\rangle\Longrightarrow I|I\in\mathbf{Id}(H)\}.$$

证 一方面, 证明对任意的$I\in\mathbf{Id}(H)$, $\langle A\rangle\Longrightarrow I\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$, 即$E_{\langle A\rangle\Longrightarrow I}(A)=\langle A\rangle\Longrightarrow I$. 事实上, 因为$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcup,\sqcap,\Longrightarrow,\{0\},H)$是Heyting代数, 所以由命题4.1得

$$E_{\langle A\rangle\Longrightarrow I}(A)=\langle A\rangle\Longrightarrow(\langle A\rangle\Longrightarrow I)=\langle A\rangle\sqcap\langle A\rangle\Longrightarrow I=\langle A\rangle\Longrightarrow I.$$

另一方面, 证明对任意的$I\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$, $I=\langle A\rangle\Longrightarrow I$. 事实上, 设$I\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$, 则$E_I(A)=I$, 故再由命题4.1便得$I=\langle A\rangle\Longrightarrow I$. 命题得证.

定理4.4 设$(H,\leqslant,\to,0,1)$是有界Heyting代数且$A\subseteq H$, 则$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是一个完备Heyting代数. 其中对任意的$\langle A\rangle\Longrightarrow I,\langle A\rangle\Longrightarrow J\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$,

$$(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\Cap(\langle A\rangle\Longrightarrow J)=\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcap J,$$

$$(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\uplus(\langle A\rangle\Longrightarrow J)=\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcup J.$$

证 证明过程分如下三步完成.

第1步: 证明$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是一个有界格.

首先因为$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcap,\sqcup,\Longrightarrow,\{0\},H)$是Heyting代数, 所以由(H2)得

$$\langle A\rangle\Longrightarrow(I\sqcap J)=(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\sqcap(\langle A\rangle\Longrightarrow J),$$

故$(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\Cap(\langle A\rangle\Longrightarrow J)=(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\sqcap(\langle A\rangle\Longrightarrow J)$为$\langle A\rangle\Longrightarrow I$与$\langle A\rangle\Longrightarrow J$在$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中的下确界.

其次$(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\uplus(\langle A\rangle\Longrightarrow J)=\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcup J$为$\langle A\rangle\Longrightarrow I$与$\langle A\rangle\Longrightarrow J$在$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中的上确界. 事实上, 因为$I\subseteq I\sqcup J$且$J\subseteq I\sqcup J$, 所以由(H12)得

$$\langle A\rangle\Longrightarrow I\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcup J \text{ 且 } \langle A\rangle\Longrightarrow J\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcup J,$$

故$\langle A\rangle\Longrightarrow I\sqcup J$为$\langle A\rangle\Longrightarrow I$与$\langle A\rangle\Longrightarrow J$在$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中的一个上界. 假设$\langle A\rangle\Longrightarrow K\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$为$\langle A\rangle\Longrightarrow I$与$\langle A\rangle\Longrightarrow J$在$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中的任一上界, 则$\langle A\rangle\Longrightarrow I\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow K$且$\langle A\rangle\Longrightarrow J\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow K$, 从而由$(\mathbf{Id}(H),\subseteq,\sqcap,\sqcup,\Longrightarrow,\{0\},H)$是Heyting代数和(2.1)式得

$$\langle A\rangle\sqcap(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\subseteq K \text{ 且 } \langle A\rangle\Cap(\langle A\rangle\Longrightarrow J)\subseteq K,$$

进而再由(H3)得$\langle A\rangle\sqcap I\subseteq K$且$\langle A\rangle\sqcap J\subseteq K$. 又因为任一Heyting代数都是分配格, 所以

$$\langle A\rangle\sqcap(I\sqcup J)=(\langle A\rangle\sqcap I)\sqcup(\langle A\rangle\sqcap J)\subseteq K,$$

故再由(2.1)式可得$I\sqcup J\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow K$. 于是由(H12)和(H7)得

$$\langle A\rangle\Longrightarrow(I\sqcup J)\subseteq\langle A\rangle\Longrightarrow(\langle A\rangle\Longrightarrow K)=\langle A\rangle\sqcap\langle A\rangle\Longrightarrow K=\langle A\rangle\Longrightarrow K.$$

因此$\langle A\rangle\Longrightarrow(I\sqcup J)$为$\langle A\rangle\Longrightarrow I$与$\langle A\rangle\Longrightarrow J$在$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中的上确界.

最后显然$\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\}$与$H$分别为$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$中元素关于集合包含序$\subseteq$的最小元与最大元, 因此$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是一个有界格.

第2步: 证明有界格$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是一个完备格.

事实上, 因为$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是有界格且由第1步证明知$\Cap=\sqcap$, 所以由注4.1知$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$有

$$\langle A\rangle\Longrightarrow\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\right)=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(\langle A\rangle\Longrightarrow I_\lambda).$$

因此$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是一个完备格.

第3步: 证明完备格$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),\subseteq,\uplus,\Cap,\langle A\rangle\Longrightarrow\{0\},H)$是Heyting代数. 为此只需证明

(i) 对任意的$U,V\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),U\Longrightarrow V\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$;

(ii) 对任意的$U,V,W\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A),U\Cap V\subseteq W\Leftrightarrow U\subseteq(V\Longrightarrow W)$.

事实上, 设$U,V,W\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$, 则存在$I,J,K\in\mathbf{Id}(H)$使

$$U=\langle A\rangle\Longrightarrow I,\ V=\langle A\rangle\Longrightarrow J,\ W=\langle A\rangle\Longrightarrow K.$$

(i)的证明过程: 注意到$\Cap=\sqcap$可得

$$\begin{aligned}U\Longrightarrow V&=((\langle A\rangle\Longrightarrow I)\Longrightarrow(\langle A\rangle\Longrightarrow J)) && [\text{由已知条件}]\\&=\langle A\rangle\sqcap(\langle A\rangle\Longrightarrow I)\Longrightarrow J && [\text{由(H7)}]\\&=\langle A\rangle\sqcap I\Longrightarrow J && [\text{由(H3)}]\\&=\langle A\rangle\Longrightarrow(I\Longrightarrow J)\in\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A). && [\text{由(H7)和命题4.2}]\end{aligned}$$

(ii)的证明过程: 注意到$\Cap = \sqcap$可得

$$
\begin{aligned}
U \Cap V \subseteq W \ & \text{当且仅当}\ (\langle A\rangle \Longrightarrow I) \sqcap (\langle A\rangle \Longrightarrow J) \subseteq (\langle A\rangle \Longrightarrow K) && [\text{由已知条件}]\\
& \text{当且仅当}\ (\langle A\rangle \Longrightarrow I \sqcap J) \subseteq (\langle A\rangle \Longrightarrow K) && [\text{由(H2)}]\\
& \text{当且仅当}\ \langle A\rangle \sqcap (\langle A\rangle \Longrightarrow I \sqcap J) \subseteq K && [\text{由伴随性质(2.1)}]\\
& \text{当且仅当}\ \langle A\rangle \sqcap (I \sqcap J) \subseteq K && [\text{由(H3)}]\\
& \text{当且仅当}\ (\langle A\rangle \sqcap I) \sqcap J \subseteq K && [\text{由结合律}]\\
& \text{当且仅当}\ \langle A\rangle \sqcap I \subseteq (J \Longrightarrow K) && [\text{由伴随性质(2.1)}]\\
& \text{当且仅当}\ \langle A\rangle \sqcap (\langle A\rangle \Longrightarrow I) \subseteq (J \Longrightarrow K) && [\text{由(H3)}]\\
& \text{当且仅当}\ (\langle A\rangle \Longrightarrow I) \subseteq (\langle A\rangle \Longrightarrow (J \Longrightarrow K)) && [\text{由伴随性质(2.1)}]\\
& \text{当且仅当}\ (\langle A\rangle \Longrightarrow I) \subseteq (\langle A\rangle \Longrightarrow J) \Longrightarrow (\langle A\rangle \Longrightarrow K) && [\text{由(H11)}]\\
& \text{当且仅当}\ U \subseteq (V \Longrightarrow W). && [\text{由已知条件}]
\end{aligned}
$$

综合便得$(\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A), \subseteq, \uplus, \Cap, \langle A\rangle \Longrightarrow \{0\}, H)$是一个完备Heyting代数.

§5 商与乘积有界Heyting代数的扩张理想

本节讨论商有界Heyting代数与乘积有界Heyting代数上扩张理想的性质特征.

定义5.1[25] 设$(H, \leqslant, \to, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I \in \mathbf{Id}(H)$. 在H上定义二元关系$\equiv_I$使

$$a \equiv_I b \ \text{当且仅当}\ \neg(a \to b) \in I\text{且}\neg(b \to b) \in I, \forall a, b \in H.$$

则$\equiv_I$是H上的一个同余关系. 记

$$[a]_I = \{b \in H | a \equiv_I b\}, H/I = \{[a]_I | a \in H\}.$$

则显然$[0]_I = I$且$[1]_I = \{a \in H | \neg a \in I\}$. 在$H/I$上定义二元运算$\barwedge, \triangledown$和$\rightrightarrows$如下: $\forall [a]_I, [b]_I \in H/I$,

$$[a]_I \triangledown [b]_I = [a \vee b]_I, [a]_I \barwedge [b]_I = [a \wedge b]_I, [a]_I \rightrightarrows [b]_I = [a \to b]_I.$$

定义H/I上二元关系$\sqsubseteq$满足$\forall [a]_I, [b]_I \in H/I$,

$$[a]_I \sqsubseteq [b]_I \ \text{当且仅当}\ [a]_I \rightrightarrows [b]_I = [1]_I,$$

则$(H/I, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \rightrightarrows, [0]_I, [1]_I)$是有界Heyting代数, 称为$H$的由$I$诱导的商代数.

定义5.2[13] 设$(H, \leqslant, \to, 0, 1)$和$(M, \leqslant, \to, 0, 1)$是两个有界Heyting代数, $f: H \to M$是一个映射. 如果$f(0) = 0$且对任意的$a, b \in H$和$\circledast \in \{\wedge, \vee, \to\}$,

$$f(a \circledast b) = f(a) \circledast f(b),$$

则称f是一个从H到M的Heyting代数同态, 简称为H到M的H-同态. 如果H-同态f是单射(满射), 则称f是单(满)H-同态; 如果H-同态f是双射, 则称f是H-同构.

引理5.1[25] 设$(H, \leqslant, \to, 0, 1)$和$(M, \leqslant, \to, 0, 1)$是两个有界Heyting代数, $f: H \to M$是一个满H-同态. 则$H/\mathbf{Ker}(f) \cong M$. 其中$\mathbf{Ker}(f) = \{a \in H | f(a) = 0\}$.

定理5.1 设$(H, \leqslant, \to, 0, 1)$是有界Heyting代数, $I, J \in \mathbf{Id}(H)$. 则对任意的$A \subseteq H$, 则

$$H/E_{I \cap J}(A) = H/E_I(A) \overline{\overline{\sqcap}} H/E_J(A).$$

其中$H/E_I(A) \overline{\overline{\sqcap}} H/E_J(A) = \{[a]_{E_I(A)} \barwedge [b]_{E_J(A)} | [a]_{E_I(A)} \barwedge [b]_{E_J(A)} \neq \varnothing\}$.

证 设$[a]_{E_{I\cap J}}(A)\in H/E_{I\cap J}(A)$, 则由定义5.1和定理3.3得

$$\begin{aligned}[a]_{E_{I\cap J}}(A)&=\{b\in H|a\equiv_{E_{I\cap J}(A)} b\}\\&=\{b\in H|\neg(a\to b)\in E_{I\cap J}(A)\text{且}\neg(b\to a)\in E_{I\cap J}(A)\}\\&=\{b\in H|\neg(a\to b)\in E_I(A)\cap E_J(A)\text{且}\neg(b\to a)\in E_I(A)\cap E_J(A)\}\\&=\{b\in H|\neg(a\to b)\in E_I(A)\text{且}\neg(b\to a)\in E_I(A)\}\\&\qquad\qquad\cap\{b\in H|\neg(a\to b)\in E_J(A)\text{且}\neg(b\to a)\in E_J(A)\}\\&=[a]_{E_I(A)}\barwedge[b]_{E_J(A}\in H/E_I(A)\overline{\overline{\cap}}H/E_J(A).\end{aligned}$$

故$H/E_{I\cap J}(A)\subseteq H/E_I(A)\overline{\overline{\cap}}H/E_J(A)$.

反之设$[a]_{E_I(A)}\barwedge[b]_{E_J(A)}\in H/E_I(A)\overline{\overline{\cap}}H/E_J(A)$, 则$[a]_{E_I(A)}\barwedge[b]_{E_J(A)}\neq\varnothing$. 故存在$c\in[a]_{E_I(A)}\barwedge[b]_{E_J(A)}$使$[c]_{E_I(A)}=[a]_{E_I(A)}$且$[c]_{E_J(A)}=[b]_{E_J(A)}$, 从而

$$[a]_{E_I(A)}\barwedge[b]_{E_J(A)}=[c]_{E_I(A)}\barwedge[c]_{E_J(A)}=[c]_{E_{I\cap J}(A)}\in H/E_{I\cap J}(A),$$

因此亦有$H/E_I(A)\overline{\overline{\cap}}H/E_J(A)\subseteq H/E_{I\cap J}(A)$.

综合便得$H/E_{I\cap J}(A)=H/E_I(A)\overline{\overline{\cap}}H/E_J(A)$.

定义5.3 设$(H_\lambda,\leqslant_\lambda,\vee_\lambda,\wedge_\lambda,\to_\lambda,0_\lambda,1_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$是一族有界Heyting代数, 其中$\Lambda$为指标集. 定义

$$H=\prod_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda=\left\{f|f:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda,\ \text{s.t.},\ \forall\lambda\in\Lambda,f(\lambda)\in H_\lambda\right\}.\tag{5.1}$$

对任意的$f,g\in H$和$\lambda\in\Lambda$, 在H上定义三个二元运算$\circledcirc\in\{\wedge,\vee,\to\}$满足

$$(f\circledcirc g)(\lambda)=f(\lambda)\circledcirc_\lambda g(\lambda),$$

且$0(\lambda)=0_\lambda,1(\lambda)=1_\lambda$, 此时

$$f\leqslant g\Leftrightarrow f(\lambda)\leqslant_\lambda g(\lambda),$$

$$(\neg f)(\lambda)=(f\to 0)(\lambda)=f(\lambda)\to_\lambda 0(\lambda)=f(\lambda)\to_\lambda 0_\lambda=\neg_\lambda f(\lambda),$$

则可以验证$(H,\leqslant,\to,0,1)$构成一个有界Heyting代数, 称之为$\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的乘积有界Heyting代数. 特别地, 若$|\Lambda|=2$, 则$H=H_1\times H_2$为$H_1$与$H_2$的乘积有界Heyting代数.

引理5.2[25] 设$(H_\lambda,\leqslant_\lambda,\vee_\lambda,\wedge_\lambda,\to_\lambda,0_\lambda,1_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$是一族有界Heyting代数且$I_\lambda\in\mathbf{Id}(H_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$. 则$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\in\mathbf{Id}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\right)$.

命题5.1 设$(H_\lambda,\leqslant_\lambda,\vee_\lambda,\wedge_\lambda,\to_\lambda,0_\lambda,1_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$是一族有界Heyting代数且$\{A_\lambda\subseteq H_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$. 则$\left\langle\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right\rangle=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle A_\lambda\rangle$.

证 设$f\in\left\langle\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right\rangle$, 则存在$g_1,g_2,\cdots,g_n\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$使$f\leqslant g_1\oplus g_2\oplus\cdots\oplus g_n$. 即对任意的$\lambda\in\Lambda$, $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\cdots,g_n(\lambda)\in A_\lambda$且

$$f(\lambda)\leqslant(g_1\oplus g_2\oplus\cdots\oplus g_n)(\lambda)=g_1(\lambda)\oplus_\lambda g_2(\lambda)\oplus_\lambda\cdots\oplus_\lambda g_n(\lambda).$$

故对任意的$\lambda\in\Lambda,f(\lambda)\in\langle A_\lambda\rangle$, 因此$f\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle A_\lambda\rangle$. 这表明$\left\langle\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right\rangle\subseteq\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle A_\lambda\rangle$.

反之设$f\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\langle A_\lambda\rangle$, 则$\forall\lambda\in\Lambda$, $f(\lambda)\in\langle A_\lambda\rangle$. 故对任意的$\lambda\in\Lambda$, 存在$g_1^{(\lambda)},g_2^{(\lambda)},\cdots,g_n^{(\lambda)}\in A_\lambda$使$f(\lambda)\leqslant g_1^{(\lambda)}\oplus_\lambda g_2^{(\lambda)}\oplus_\lambda\cdots\oplus_\lambda g_n^{(\lambda)}$. 而由选择公理又得$\exists g_1,g_2,\cdots,g_n\in\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$满足$g_1(\lambda)=$

$g_1^{(\lambda)}, g_2(\lambda) = g_2^{(\lambda)}, \cdots, g_n(\lambda) = g_n^{(\lambda)}$, 因此, 对任意的$\lambda \in \lambda$,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \leqslant g_1^{(\lambda)} \oplus_\lambda g_2^{(\lambda)} \oplus_\lambda \cdots \oplus_\lambda g_n^{(\lambda)} \\ &= g_1(\lambda) \oplus_\lambda g_2(\lambda) \oplus_\lambda \cdots \oplus_\lambda g_n(\lambda) = (g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \oplus g_n)(\lambda). \end{aligned}$$

从而$f \leqslant g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots \oplus g_n$, 进而$f \in \left\langle \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right\rangle$. 这又表明$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle A_\lambda \rangle \subseteq \left\langle \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right\rangle$. 综合便得$\left\langle \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right\rangle = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \langle A_\lambda \rangle$.

定理5.2 设$(H_\lambda, \leqslant_\lambda, \vee_\lambda, \wedge_\lambda, \rightarrow_\lambda, 0_\lambda, 1_\lambda)(\lambda \in \Lambda)$一族有界Heyting代数, $\{I_\lambda \in \mathbf{Id}(H_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$且$\{A_\lambda \subseteq H_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$. 则$E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda)$.

证 设$f \in E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. 对任意的$\lambda \in \Lambda$, 任取$u_\lambda \in A_\lambda$, 则由选择公理知, 存在$u \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$使$u(\lambda) = u_\lambda$. 故由假设得$f \wedge u \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. 这表明对任意的$u_\lambda \in A_\lambda$,

$$f(\lambda) \wedge_\lambda u_\lambda = f(\lambda) \wedge_\lambda u(\lambda) = (f \wedge u)(\lambda) \in I_\lambda,$$

从而对任意的$\lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in E_{I_\lambda}(A_\lambda)$, 因此$f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda)$. 于是可得

$$E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda).$$

反之设$f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda)$. 任取$u \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 则$\forall \lambda \in \Lambda, u(\lambda) \in A_\lambda$且$f(\lambda) \in E_{I_\lambda}(A_\lambda)$. 所以$(f \wedge u)(\lambda) = f(\lambda) \wedge_\lambda u(\lambda) \in I_\lambda$, 从而$f \wedge u \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 故$f \in E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. 于是又可得

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda) \subseteq E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right).$$

综合便得$E_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda}\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda)$.

定理5.3 设$(H_\lambda, \leqslant_\lambda, \vee_\lambda, \wedge_\lambda, \rightarrow_\lambda, 0_\lambda, 1_\lambda)(\lambda \in \Lambda)$是一族有界Heyting代数, $\{I_\lambda \in \mathbf{Id}(H_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$且$\{A_\lambda \subseteq H_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$. 则$\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\right) / \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda) \cong \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (H_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda))$.

证 定义映射

$$\phi : \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} (H_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda)),$$

使得

$$(\phi(f))(\lambda) = f(\lambda)/E_{I_\lambda}(A_\lambda), \forall f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda.$$

显然ϕ是一个H-同态. 下证ϕ为满射且$\mathbf{Ker}(\phi) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E_{I_\lambda}(A_\lambda)$.

(i) ϕ为满射: 事实上, 任取$g \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (H_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda))$, 则对任意的$\lambda \in \Lambda$, $g(\lambda) \in H_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda)$, 从而存在$f_\lambda \in H_\lambda$使$g(\lambda) = f_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda)$, 而由选择公理又得$\exists f \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$使$f(\lambda) = f_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$, 故$(\phi(f))(\lambda) = f(\lambda)/E_{I_\lambda}(A_\lambda) = f_\lambda / E_{I_\lambda}(A_\lambda) = g(\lambda)$, 即$\phi(f) = g$. 因此$\phi$为满射.

(ii) $\mathbf{Ker}(\phi)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}E_{I_\lambda}(A_\lambda)$: 事实上因为

$$\begin{aligned} f\in\mathbf{Ker}(\phi)\ \text{当且仅当}\ &\phi(f)=0\\ \text{当且仅当}\ &(\phi(f))(\lambda)=0_\lambda/E_{I_\lambda}(A_\lambda),\forall\lambda\in\Lambda\\ \text{当且仅当}\ &f_\lambda/E_{I_\lambda}(A_\lambda)=0_\lambda/E_{I_\lambda}(A_\lambda),\forall\lambda\in\Lambda\\ \text{当且仅当}\ &f(\lambda)\in E_{I_\lambda}(A_\lambda),\forall\lambda\in\Lambda\\ \text{当且仅当}\ &f\in\prod_{\lambda\in\Lambda}E_{I_\lambda}(A_\lambda),\forall\lambda\in\Lambda, \end{aligned}$$

所以$\mathbf{Ker}(\phi)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}E_{I_\lambda}(A_\lambda)$.

综上所证, 由引理5.1得$\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda\right)/\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}E_{I_\lambda}(A_\lambda)\cong\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(H_\lambda/E_{I_\lambda}(A_\lambda))$.

§6 结束语

研究表明, 在考察非经典数理逻辑代数和基于相应代数的逻辑推理系统的结构特征时, 理想概念扮演着重要的角色. 本文综合运用有界Heyting代数的性质和格理论的方法及原理对有界Heyting代数$(H,\leqslant,\wedge,\vee,\rightarrow,0,1)$的理想概念做进一步深入研究. 主要工作表现在如下几方面: (1) 引入了有界Heyting代数中理想I关于子集$A\subseteq H$的扩张理想和稳定理想的概念并考察了它们的基本性质. (2) 深入讨论了H的一个给定理想I关于H的所有子集的扩张理想全体构成的集合$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$和$H$的关于一个给定子集的稳定理想全体之集$\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$的格结构特征, 证明了$\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$在一定条件下构成一个分配完备格, 进一步构成一个Stone格和完备Heyting代数; $\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$在适当定义了格的交, 并运算和蕴涵运算后, 也构成一个完备Heyting代数的结论. (3) 获得了商和乘积有界Heyting代数上扩张理想的特性.

这些工作不但使有界Heyting代数的理想理论之研究内容得以进一步充实和丰富, 为基于理想概念研究有界Heyting代数以及直觉模糊逻辑系统的结构特征提供技术支持和方法借鉴.

参考文献:

[1] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[2] Wang Guojun, Zhou Hongjun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2009.

[3] Vickers S. Topology Via Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[4] 王国俊. Heyting代数成为Boole代数的条件及其特征[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 1991, 19(4): 1-6.

[5] 贺伟. Heyting代数的谱空间[J]. 数学进展, 1998, 27(2): 44-47.

[6] 徐晓泉, 熊华平, 杨金波. 近性Heyting代数[J]. 数学年刊: A辑, 2000, 21(2): 165-174.

[7] 李志伟, 郑崇友. Heyting代数与Fuzzy蕴涵代数[J]. 数学杂志, 2002, 22(2): 237-240.

[8] 王习娟, 贺伟. 关于topos中的内蕴Heyting代数对象[J]. 数学杂志, 2011, 31(6): 979-998.

[9] 吴洪博, 石慧君. Heyting系统及其H-Locale化形式[J]. 数学学报, 2012, 55(6): 1119-1130.

[10] 吴洪博, 石慧君. Heyting系统及其H-空间化表示形式[J]. 电子学报, 2012, 50(5): 995-999.

[11] 郑崇友, 樊磊, 崔宏斌. Frame与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 2000.

[12] 方进明. 剩余格与模糊集[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[13] Michior K, Wieslaw D. Filter theory of BL-algebras[J]. Soft Computing, 2008, 12(5): 419-423.

[14] Liu Lianzhen, Li Kaitai. Boolean filters and positive implicative filters of residuated lattices[J]. Information Sciences, 2007, 177(24): 5725-5738.

[15] Zhu Yiquan, Xu Yang. On filter theory of residuated lattices[J]. Information Sciences, 2010, 180(19): 3614-3632.

[16] Van G, Deschrijver G, Cornelis C, et al. Filters of residuated lattices and triangle algebras[J]. Information Sciences, 2010, 180(16): 3006-3020.

[17] Dumitru B, Dana P. Some types of filters on residuated lattices[J]. Soft Computing, 2014, 18(12): 825-837.

[18] Zhang Xioahong, Qin keyun, Dudek W. Ultra LI-ideals in lattice implication algebras and MTL-algebras[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2007, 57(6): 591-605.

[19] Lele C, Nganou J B. MV-algebras derived from ideals in BL-algebras[J] Fuzzy Sets and Systems, 2013, 218(5): 103-113.

[20] 刘春辉. 否定非对合剩余格的LI-理想理论[J]. 高校应用数学学报, 2015, 30(4): 445-456.

[21] Liu Yi, Qin Yao, Qin Xiaoyan, et al. Ideals and fuzzy ideals on residuated lattices[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 239-253.

[22] 刘春辉. 非对合剩余格的模糊理想理论[J]. 高校应用数学学报, 2021, 36(4): 463-480.

[23] 姚卫. Heyting代数中的滤子、同构定理及其范畴Heyt[D]. 陕西: 陕西师范大学, 2005.

[24] 刘春辉. 有界Heyting代数及其理想理论[J]. 模糊系统与数学, 2022, 36(5): 54-68.

[25] 刘春辉. 有界Heyting代数上基于理想的一致拓扑空间[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(11): 10-20.

[26] 刘春辉. 有界Heyting代数的素理想及其谱空间[J]. 模糊系统与数学, 2024, 38(1): 15-32.

[27] Blyth T S, Varlet J C. Ockham Algebras[M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.

Expand ideals and stable ideals in bounded Heyting algebras

LIU Chun-hui

(Department of Education Science, Chifeng University, Chifeng 024001, China)

Abstract: In this paper, the problem of ideals is studied in bounded Heyting algebras by using the principle and method of universal algebra. The notions of expand ideals and stable ideals of an ideal I associated to a subset A of bounded heyting algebra $(H, \leqslant, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ are introduced and some their basic properties are obtained. The lattice theory characteristics about two types sets of expand ideals in a bounded heyting algebra $(H, \leqslant, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ are discussed. It's proved that (1) the set $\mathbb{E}_I(\mathscr{P}(H))$ of all expand ideals of a given ideal I associated to any subset of H is formed a bounded distributive lattice, further formed a Stone lattice and complete Heyting algebra under certain conditions. (2) the set $\mathbb{S}_{\mathbf{Id}(H)}(A)$ of all stable ideals associated to a given subset $A \subseteq H$ is formed a complete Heyting algebra. Finally, some properties of expand ideals of quotient and product bounded Heyting algebras are investigated.

Keywords: bounded Heyting algebra; ideal; expand ideal; stable ideal; Stone lattice; complete Heyting algebra

MR Subject Classification: 03G10; 06D35